M1JK

本科３期１月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高１東大数学Ｋ

２７章　微分・積分（１）ー極限，導関数ー

問題

【1】(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}(x-2)\\&=(-2)-2=\mathbf{-4}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)\\&=(-1)^2-(-1)+1=\mathbf{3}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}&=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x-2}\\&=\frac{3+1}{3-2}=\mathbf{4}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^3+x^2-x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)^2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\\&=\frac{1^2+1+1}{(1+1)^2}=\mathbf{\frac{3}{4}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^3-2x^2-4x+8}&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)^2}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{1}{x-2}\\&=\frac{1}{(-2)-2}=-\mathbf{\frac{1}{4}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【2】

$$\lim_{x\to3}\frac{ax^2+bx}{x-3}=1\qquad\cdots(*)$$

分母については

$$\lim_{x\to3}(x-3)=0$$

であり，分子については

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}(ax^2+bx)&=\lim_{x\to3}\left\{\frac{ax^2+bx}{x-3}\cdot(x-3)\right\}\\&=1\cdot0=0\end{aligned}$$

であるから，与式が極限値をもつためには

$$\lim_{x \to 3}(ax^2+bx)=0$$

が必要である．このとき

$$\lim_{x \to 3}(ax^2+bx)=9a+3b=0$$

$$\therefore \quad b=-3a \quad \cdots ①$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3}\frac{ax^2-3ax}{x-3} &= \lim_{x \to 3}\frac{ax(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3} ax \\ &= 3a = 1\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a=\frac{1}{3}$$

①に代入して $b=-1$.

ゆえに求める値は

$$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{1}{3},\ -1\right)} \qquad \text{(答)}$$

【3】 $f(x)=x^3-x$ より

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}\frac{\{(2+h)^3-(2+h)\}-(2^3-2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}\frac{h^3+6h^2+11h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(h^2+6h+11) \\ &= \mathbf{11} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

また，$f(2)=2^3-2=6$ なので，点 $(2,\ 6)$ における接線の方程式は

$$y=11(x-2)+6$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=11x-16} \qquad \text{(答)}$$

【4】 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在して，$f'(a)=3$ であるから

$$f'(a)=\lim_{\Delta \to 0}\frac{f(a+\Delta)-f(a)}{\Delta}=3 \qquad （\Delta\text{は任意}）$$

(1) $h \to 0$ のとき $3h \to 0$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h} &= \lim_{3h \to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3 \\ &= 3\cdot\lim_{3h \to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h} \\ &= 3\cdot f'(a) \\ &= \mathbf{9} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $h\to 0$ のとき $-2h\to 0$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h} &= \lim_{-2h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot(-2)\\ &= -2\cdot\lim_{-2h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\\ &= -2\cdot f'(a)\\ &= \mathbf{-6} \qquad (答)\end{aligned}$$

(3) $h\to 0$ のとき $3h\to 0$ かつ $-2h\to 0$ であるから

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}\right\}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3-\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot(-2)\right\}\\ &=3\lim_{3h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+2\lim_{-2h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\\ &=3\cdot f'(a)+2\cdot f'(a)\\ &=\mathbf{15} \qquad (答)\end{aligned}$$

【5】(1)

$$\begin{aligned}y' &= 5\cdot 2x-2\cdot 1\\ &= \mathbf{10x-2} \qquad (答)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}y' &= -2\cdot 3x^2+6\cdot 2x+4\cdot 1\\ &= \mathbf{-6x^2+12x+4} \qquad (答)\end{aligned}$$

(3)

$$y' = \mathbf{0} \qquad (答)$$

(4) $y=4x^2+4x+1$ より

$$\begin{aligned}y' &= 4\cdot 2x+4\cdot 1\\ &= \mathbf{8x+4} \qquad (答)\end{aligned}$$

＜別解＞

$$\begin{aligned}y' &= 2\cdot 2(2x+1)\\ &= \mathbf{8x+4} \qquad (答)\end{aligned}$$

(5) $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ より

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 4 \cdot 2x - 11 \cdot 1 \\ &= \boldsymbol{3x^2 - 8x - 11} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

＜別解＞

積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} y' &= (x+3)' \cdot (x-2)(x-5) + (x+3) \cdot (x-2)' \cdot (x-5) \\ &\qquad\qquad + (x+3)(x-2) \cdot (x-5)' \\ &= 1 \cdot (x-2)(x-5) + (x+3) \cdot 1 \cdot (x-5) + (x+3)(x-2) \cdot 1 \\ &= \boldsymbol{3x^2 - 8x - 11} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

(6) $y = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ より

$$\begin{aligned} y' &= 27 \cdot 3x^2 - 54 \cdot 2x + 36 \cdot 1 \\ &= \boldsymbol{81x^2 - 108x + 36} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

＜別解＞

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cdot 3(3x-2)^2 \\ &= \boldsymbol{9(3x-2)^2} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

【6】(1) $f'(x) = -4x - 3$ より

$$f'(0) = -4 \cdot 0 - 3 = \boldsymbol{-3} \qquad (\text{答})$$

(2) $f'(x) = 12x^2 - 2x$ より

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{2} \qquad (\text{答})$$

【7】

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから，与えられた条件より

$$f'(0) = b = -3 \quad \cdots ①$$
$$f'(1) = 2a + b = 1 \quad \cdots ②$$

また

$$f(2) = 4a + 2b + c = 3 \quad \cdots ③$$

①，②，③ を連立して解くと

$$\boldsymbol{a = 2,\ \ b = -3,\ \ c = 1} \qquad (\text{答})$$

【8】(1)

$$y' = -3 \cdot 2t$$
$$= \boldsymbol{-6t} \quad (答)$$

(2)

$$S' = 4\pi \cdot 2r$$
$$= \boldsymbol{8\pi r} \quad (答)$$

(3) $V = V_0 - \alpha V_0 t$ より

$$V' = 0 - \alpha V_0 \cdot 1$$
$$= \boldsymbol{-\alpha V_0} \quad (答)$$

(4)

$$h' = v_0 \cdot 1 - g \cdot 2t$$
$$= \boldsymbol{v_0 - 2gt} \quad (答)$$

(5) $y = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$ より

$$y' = a \cdot 2x - 2ap \cdot 1$$
$$= \boldsymbol{2ax - 2ap} \quad (答)$$

＜別解＞

$$y' = a \cdot 1 \cdot 2(x - p)$$
$$= \boldsymbol{2a(x - p)} \quad (答)$$

【9】(1) $n = 2$ のとき，$y = (ax + b)^2$ とすると

$$y = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

より

$$y' = 2a^2x + 2ab = 2a(ax + b)$$

よって

$$\{(ax + b)^2\}' = 2a(ax + b) \quad 〔証明終〕$$

$n = 3$ のとき，$y = (ax + b)^3$ とすると

$$y = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$$

より

$$y' = 3a^3x^2 + 6a^2bx + 3ab^2 = 3a(a^2x^2 + 2abx + b^2) = 3a(ax + b)^2$$

よって

$$\{(ax + b)^3\}' = 3a(ax + b)^2 \quad 〔証明終〕$$

(2) ① $y' = 3 \cdot 1 \cdot (x - 1)^2 = \boldsymbol{3(x - 1)^2}$ (答)

② $y' = 3 \cdot (-2) \cdot (-2x + 1)^2 = \boldsymbol{-6(-2x + 1)^2}$ (答)

③ $y' = 10 \cdot 3 \cdot (3x + 5)^9 = \boldsymbol{30(3x + 5)^9}$ (答)

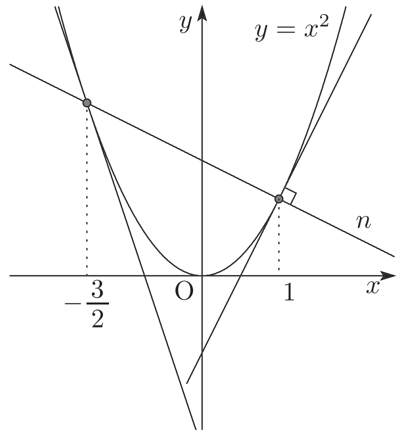
【10】

ポイント

曲線 $y=f(x)$ の，点 $(t,\ f(t))$ における法線は，

「点 $(t,\ f(t))$ を通り，その点において $y=f(x)$ の接線と直交する直線」

と定義される．



$f(x)=x^2$ とすると

$$f'(x)=2x$$

であり，$y=f(x)$ の，点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きは

$$f'(1)=2$$

ゆえに，この点における法線を n とすると，n の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1)$$

$$\therefore\quad n:\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

である．$y=f(x)$ と n との交点は

$$x^2=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad 2x^2+x-3=0$$

これを解いて

$$x=1,\ -\frac{3}{2}$$

ゆえに，n が再び $y=f(x)$ と交わる点の座標は $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$ である．

$x=-\frac{3}{2}$ における微分係数は

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

より，求める接線の方程式は

$$y=-3\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=-3x-\frac{9}{4}}\qquad \text{(答)}$$

２８章　微分・積分（２）－微分法の応用－

問題

【1】(1)

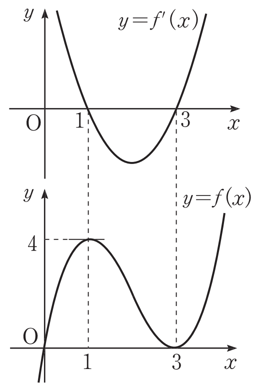
$$f(x) = x(x-3)^2$$

とおくと，

$$f'(x) = 1 \cdot (x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)$$
$$= 3(x-3)(x-1)$$

したがって，$y = f'(x)$ および $y = f(x)$ のグラフは右図　　(答)

また増減表は下のようになる．



x	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$	3	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2)

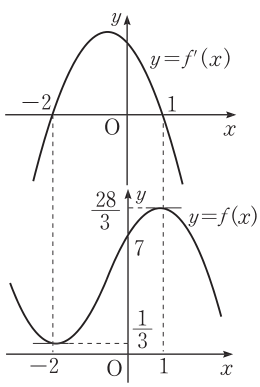
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 7$$

とおくと

$$f'(x) = -2x^2 - 2x + 4$$
$$= -2(x+2)(x-1)$$

したがって，$y = f'(x)$ および $y = f(x)$ のグラフは右図　　(答)

また増減表は下のようになる．



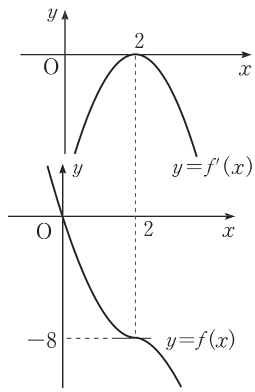
x	$\cdots\cdots$	-2	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{28}{3}$	$\searrow$

(3)
$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x$$

とおくと

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 12$$
$$= -3(x-2)^2$$

したがって，$y = f'(x)$ および $y = f(x)$ のグラフは右図　(答)



また増減表は下のようになる．

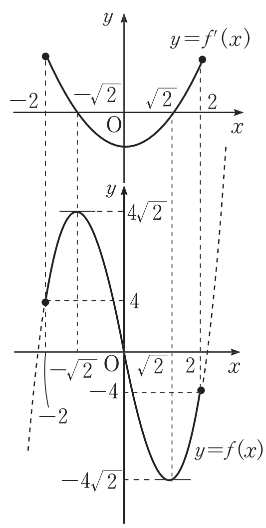
x	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\searrow$

【2】(1)
$$f(x) = x^3 - 6x \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$$

とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$
$$= 3\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

より，$y = f'(x)$ および $y = f(x)$ のグラフは右図．
また，増減表は下のようになる．



x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	-4

ゆえに求める最大値，最小値は

$$\begin{cases} x = \boldsymbol{-\sqrt{2}} \text{ のとき　最大値 } \boldsymbol{4\sqrt{2}} \\ x = \boldsymbol{\sqrt{2}} \text{ のとき　最小値 } \boldsymbol{-4\sqrt{2}} \end{cases}$$
(答)

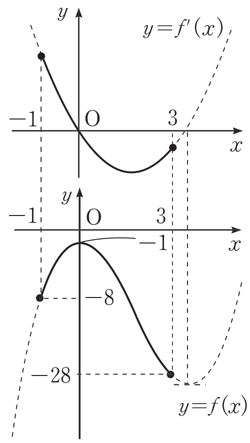
(2)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 1 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$$

とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$
$$= 3x(x-4)$$

より，$y = f(x)$ および $y = f'(x)$ のグラフは右図.



また，増減表は下のようになる.

x	-1	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-8	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-28

ゆえに求める最大値，最小値は

$$\begin{cases} x = \mathbf{0} \text{ のとき　最大値 } \mathbf{-1} \\ x = \mathbf{3} \text{ のとき　最小値 } \mathbf{-28} \end{cases}$$ (答)

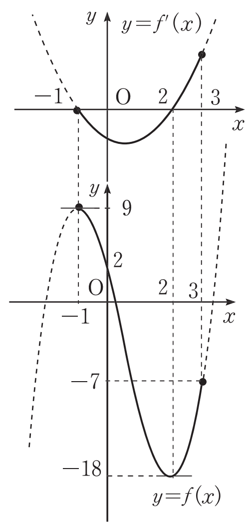
(3)

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$$

とおくと

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$= 6(x+1)(x-2)$$

より，$y = f'(x)$ および $y = f(x)$ のグラフは右図.
また，増減表は下のようになる.



x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	-18	$\nearrow$	-7

ゆえに求める最大値，最小値は

$$\begin{cases} x = \mathbf{-1} \text{ のとき　最大値 } \mathbf{9} \\ x = \mathbf{2} \text{ のとき　最小値 } \mathbf{-18} \end{cases}$$ (答)

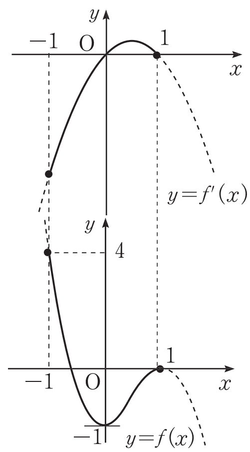
(4)

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 6x \\ &= -6x(x-1) \end{aligned}$$

より，$y = f'(x)$ および $y = f(x)$ のグラフは右図.
また，増減表は下のようになる.



x	-1	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

ゆえに求める最大値，最小値は

$$\begin{cases} x = \mathbf{-1} \text{ のとき　最大値 } \mathbf{4} \\ x = \mathbf{0} \text{ のとき　最小値 } \mathbf{-1} \end{cases}$$ (答)

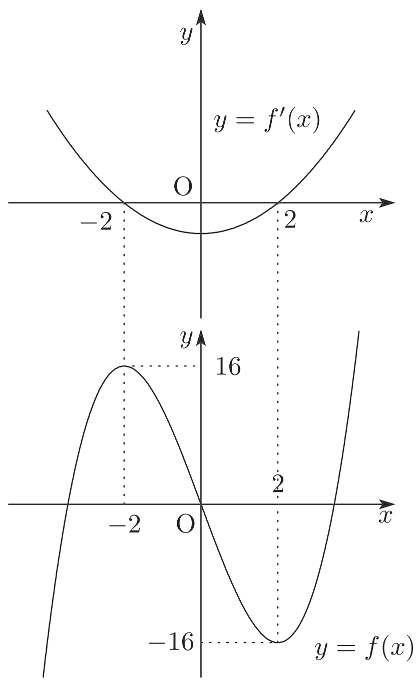
【3】(1)

$$f(x) = x^3 - 12x$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

より，$y = f'(x)$，$y = f(x)$ のグラフは
右図のようになる.　　(答)
また，増減表は下のようになる.



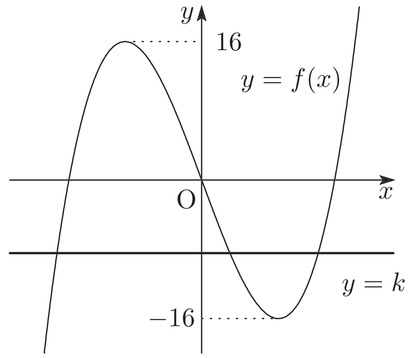
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

したがって

$$\begin{cases} x = -2 \text{ のとき極大値 } \mathbf{16} \\ x = 2 \text{ のとき極小値 } \mathbf{-16} \end{cases}$$ (答)

(2)
$$\begin{aligned} & x^3-12x-k=0 \quad \cdots(*) \\ \Longleftrightarrow\quad & x^3-12x=k \end{aligned}$$

より，$(*)$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点の個数に等しい．すなわち $y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わるような k の範囲を求めればよい．(1) で得られたグラフより，求める k の値の範囲は



$\boldsymbol{-16<k<16}$　　(答)

(3) $(*)$ が 2 つの正の解と 1 つの負の解をもつとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフは,「$x>0$ の部分で 2 点，$x<0$ の部分で 1 点」で交わる．ゆえに求める k の値の範囲は

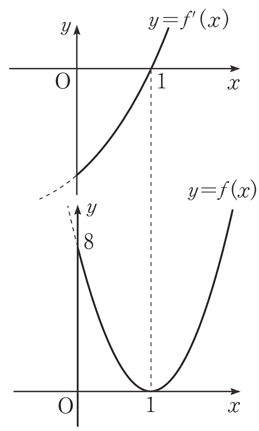
$\boldsymbol{-16<k<0}$　　(答)

【4】(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^3-27x \\ &= x^3+6x^2-15x+8 \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+12x-15 \\ &= 3(x+5)(x-1) \end{aligned}$$

より，$y=f'(x)$ および $y=f(x)$ のグラフは右図．
また，$x \geqq 0$ における増減表は下のようになる．



x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$	8	↘	0	↗

以上より $x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(1)=0$$

すなわち

$$f(x) \geqq f(1)=0 \quad (x \geqq 0)$$

よって

$$(x+2)^3 \geqq 27x \quad (x \geqq 0)$$

〔証明終〕

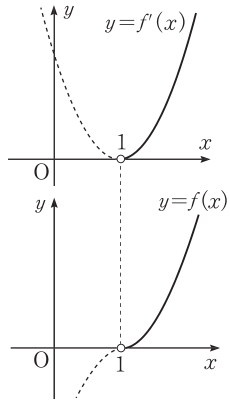
(2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 2x^2 - (x^2 - 3x + 1)\\
&= x^3 - 3x^2 + 3x - 1
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3\\
&= 3(x-1)^2
\end{aligned}
$$

より，$y = f'(x)$ および $y = f(x)$ のグラフは右図．



すなわち

$x > 1$ において $f(x) > f(1) = 0$

であるから

$x^3 - 2x^2 > x^2 - 3x + 1 \quad (x > 1)$ 〔証明終〕

【5】

$$f(x) = x^3 + (2+t)x^2 + t^2x + 3$$

とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 2(2+t)x + t^2$$

ここで

「すべての x で $f(x)$ が単調増加」
$\Longleftrightarrow$「すべての x で $f'(x) \geqq 0$」

2 次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= (2+t)^2 - 3t^2\\
&= 4 + 4t + t^2 - 3t^2\\
&= -2t^2 + 4t + 4 \leqq 0\\
\therefore \quad & t^2 - 2t - 2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

これをみたす t の範囲は，（左辺）$= 0$ の解を考えて

$\boldsymbol{t \leqq 1 - \sqrt{3},\ 1 + \sqrt{3} \leqq t}$ （答）

【6】

$$f(x) = x^3 + ax^2 + x$$

とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$$

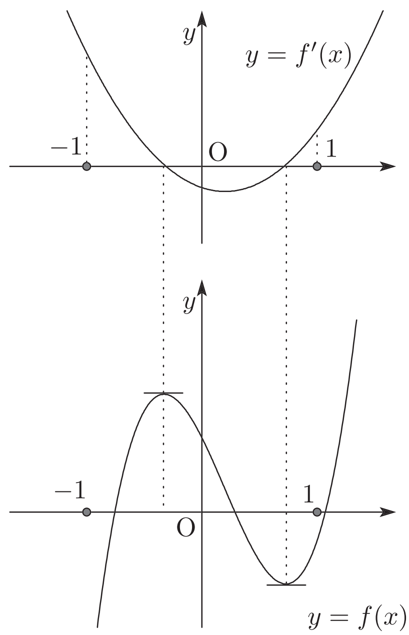
であり，$f(x)$ が題意の条件をみたすためには，$y = f(x)$，$y = f'(x)$ のグラフが下図のようになることが必要十分．すなわち

$$
\begin{aligned}
&「f'(x) \text{ が } -1 \leqq x \leqq 1 \text{ の範囲で 2 度符号を変える}」\\
\iff &「y = f'(x) \text{ のグラフが } -1 \leqq x \leqq 1 \text{ で } x \text{ 軸と 2 点を共有する}」\\
\iff &「\text{方程式 } f'(x) = 0 \text{ が } -1 \leqq x \leqq 1 \text{ の範囲に相異なる 2 実数解をもつ}」
\end{aligned}
$$

ここで

$$f'(x) = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{3}$$

であり，2 次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると，求める条件は



$$
\begin{aligned}
f'(1) &\geqq 0 && \cdots ① \\
f'(-1) &\geqq 0 && \cdots ② \\
D &> 0 && \cdots ③ \\
-1 < -\frac{a}{3} &< 1 && \cdots ④
\end{aligned}
$$

① より

$$f'(1) = 4 + 2a \geqq 0$$
$$\therefore \quad a \geqq -2 \quad \cdots ①'$$

② より

$$f'(-1) = 4 - 2a \geqq 0$$
$$\therefore \quad a \leqq 2 \quad \cdots ②'$$

③ より

$$D/4 = a^2 - 3 > 0$$
$$\iff \quad a < -\sqrt{3},\quad \sqrt{3} < a \quad \cdots ③'$$

④ より

$$-3 < a < 3 \quad \cdots ④'$$

求める a の範囲は ①$'$ かつ ②$'$ かつ ③$'$ かつ ④$'$ より

$$\boldsymbol{-2 \leqq a < -\sqrt{3},\quad \sqrt{3} < a \leqq 2} \qquad \text{(答)}$$

【7】

$$y = 8^x - 4^{x+1} + 2^{x+2} - 2 \quad \cdots (*)$$

で，$t = 2^x$ とおくと

$$-2 \leqq x \leqq 1 \quad \text{より} \quad \frac{1}{4} \leqq t \leqq 2$$

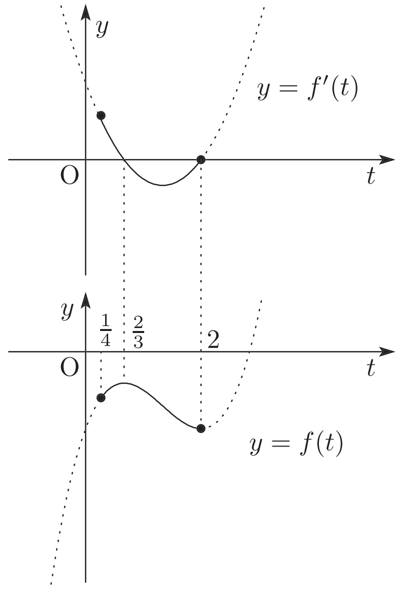
$(*)$ は

$$\begin{aligned} y &= (2^x)^3 - 4\cdot(2^x)^2 + 4\cdot 2^x - 2 \\ &= t^3 - 4t^2 + 4t - 2 \end{aligned}$$

これを $f(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 8t + 4 \\ &= (3t-2)(t-2) \end{aligned}$$

であるから，$y = f'(t)$，$y = f(t)$ のグラフは右のようになる．



また増減表は下のようになる．

t	$\frac{1}{4}$	$\cdots\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，

$$t(=2^x) = \frac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_2 \frac{2}{3} = 1 - \log_2 3$$

のとき $f(t)$ は極大かつ最大となり，その値は

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\cdot\frac{2}{3} - 2 &= \frac{8-48+72-54}{27} \\ &= -\boldsymbol{\frac{22}{27}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【8】(1) $x=\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= \left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) - 3\left(2\cos^2\theta - 1\right) + 3\cos\theta + 1 \\ &= 4\cos^3\theta - 6\cos^2\theta + 4 \\ &= \boldsymbol{4x^3 - 6x^2 + 4} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

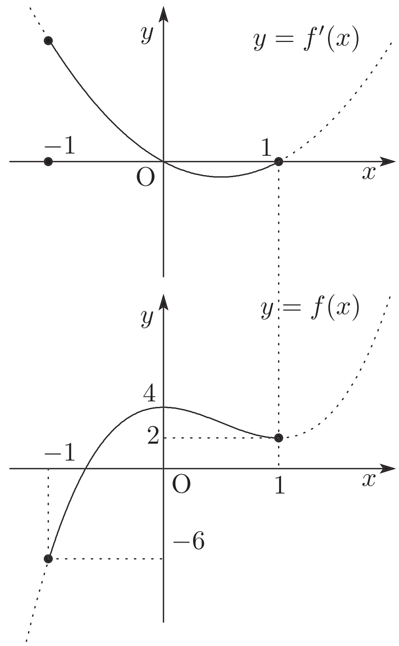
(2) $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より $-1 \leqq x \leqq 1$.
ゆえに x の関数

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

の最大値，最小値を求める．

$$f'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$

より，$y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．
また増減表は下のようになる．



x	-1	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-6	$\nearrow$	4	$\searrow$	2

以上より

$$\begin{cases} \text{最大値} & \boldsymbol{4} \\ \text{最小値} & \boldsymbol{-6} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【9】

「方程式 $x^3+3x^2-4=mx$ が異なる3つの実数解をもつ」

$\Longleftrightarrow$ 「$y=x^3+3x^2-4$ のグラフと $y=mx$ のグラフが3つの交点をもつ」

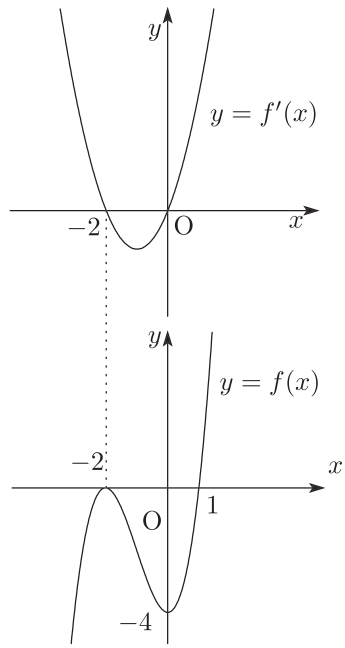
ここで

$$f(x)=x^3+3x^2-4$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2+6x \\ &=3x(x+2) \end{aligned}$$

より，$y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる．



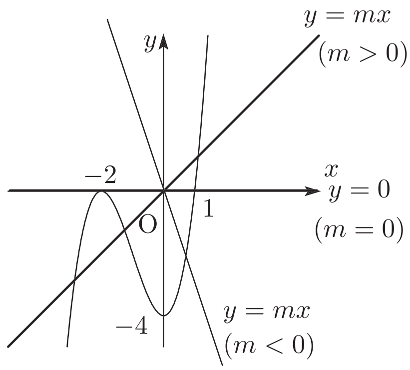
また増減表は下のようになる．

x	$\cdots\cdots$	-2	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

$y=mx$ は傾き m で原点を通る直線であるから，

$y=f(x)$ との交点は，右下図より

$m=0$ のとき　2つ
$m>0$ のとき　3つ
$m<0$ のとき　1つ



以上より，求める m の値の範囲は

$\boldsymbol{m>0}$　　(答)

【10】

> ポイント
>
> 3 次以下の関数に対しては，グラフの接線と接点の x 座標は 1 対 1 に対応する．ゆえに接線の本数を数えるためには，接点の個数を数えればよい．

$$f(x)=x^3-3x$$

とおくと

$$f'(x)=3x^2-3$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$$

整理して

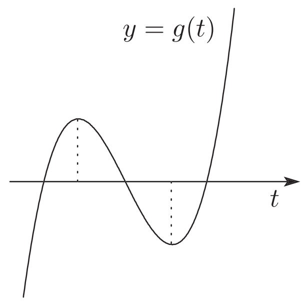
$$y=(3t^2-3)x-2t^3$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るから，

$$b=(3t^2-3)a-2t^3$$
$$\therefore\quad 2t^3-3at^2+3a+b=0$$

上式の左辺を $g(t)$ とおく．

「t の 3 次方程式 $g(t)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ」
$\iff$ 「$y=g(t)$ のグラフが t 軸と 3 点で交わる」
$\iff$ 「$g(t)$ が極値を持ち，かつそれらが異符号（右図）」



ここで

$$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$$

であるから

(i)　$a=0$ のとき，$g'(t)=0$ は重解をもつから不適．

(ii)　$a\fallingdotseq 0$ のとき，$g(t)$ は $t=0,\ a$ で極値をとるから

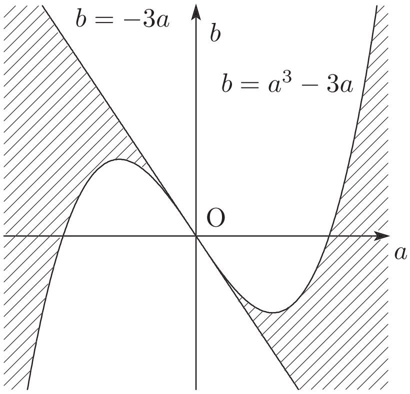
$$g(0)\cdot g(a)<0$$
$$(3a+b)(-a^3+3a+b)<0$$

ゆえに求める条件は

$3a+b<0$ かつ $-a^3+3a+b>0$　または
$3a+b>0$ かつ $-a^3+3a+b<0$　(答)

<参考>

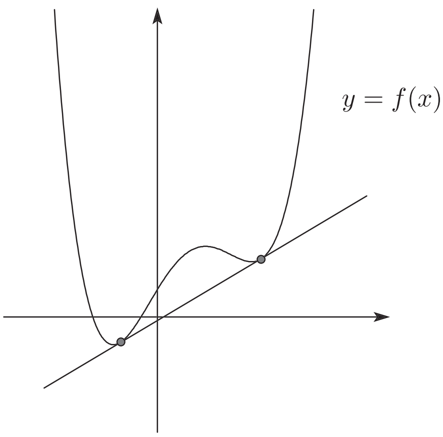
これを ab 平面に図示すると次のようになる.



ただし境界はすべて含まない.

<コメント>

4 次以上の関数については，接線の本数と接点の個数が 1 対 1 に対応しないことがある.



このような接線を「重接線」という.

【11】

$$f(x) = x^3 - 3ax + 4a$$

とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3a \\ &= 3\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) \quad (\because \quad a > 0) \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} &\text{「}x \geqq 0 \text{ において } f(x) > 0\text{」} \\ \iff &\text{「（}x \geqq 0 \text{ における } f(x) \text{ の最小値）} > 0\text{」} \end{aligned}$$

ここで $y = f'(x)$，$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，求める条件は

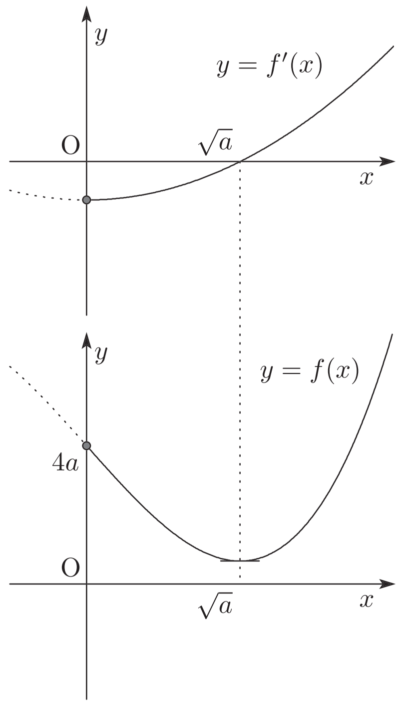
$$f\left(\sqrt{a}\right) > 0$$

である．ゆえに

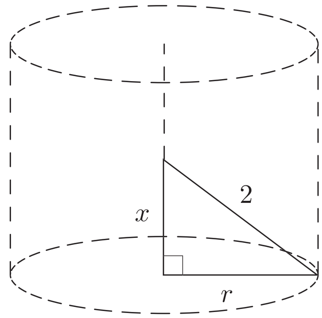
$$\begin{aligned} &f(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + 4a > 0 \\ \iff &\quad 2a > a\sqrt{a} \end{aligned}$$

$a > 0$ より両辺正である．ゆえに両辺 2 乗して，求める a の範囲は

$\mathbf{0 < a < 4}$ 　　(答)



【12】問題の球の半径は 2 であり，円柱の高さ $2x$ であるから，底面の半径 r は図より



$$r^2 = 2^2 - x^2 = 4 - x^2$$

また球の直径は 4 であるから，

$$0 < 2x < 4$$
$$\therefore 0 < x < 2$$

ゆえに円柱の底面積は

$$\pi r^2 = \pi(4 - x^2)$$

である．したがって円柱の体積を $V(x)$ とすると

$$V(x) = \pi(4 - x^2) \cdot 2x = 2\pi(-x^3 + 4x)$$

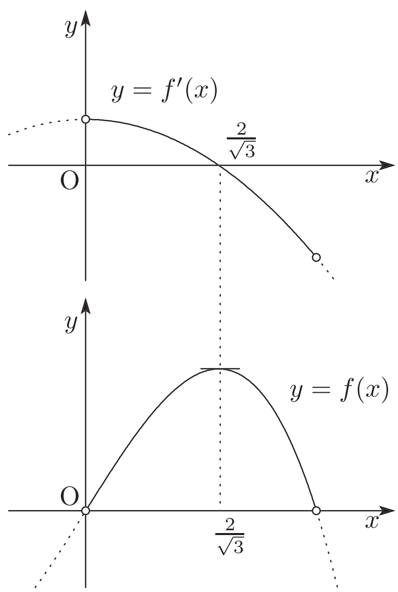
ここで

$$f(x) = -x^3 + 4x$$

とおくと，

$$f'(x) = -3x^2 + 4$$

であり，$y = f'(x)$，$y = f(x)$ のグラフは右のようになる．
また増減表は下のようになる．



x	0	$\cdots\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots\cdots$	2
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

よって $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，$f(x)$，および $V(x)$ は最大となる．ゆえに求める最大値は

$$V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \pi \cdot \left\{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}}{9}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【13】(1)
$$f(x) = 16x^3 - 20ax^2 + 8a^2x - a^3$$

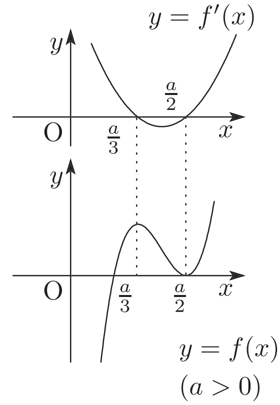
とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 48x^2 - 40ax + 8a^2 \\ &= 8(6x^2 - 5ax + a^2) \\ &= 8(3x - a)(2x - a) \end{aligned}$$

である．$a = 0$ のとき $f'(x) = 0$ は重解をもつから，$f(x)$ は極値をとらない．
以下，$a \fallingdotseq 0$ とする．このとき極値をとる x の値は

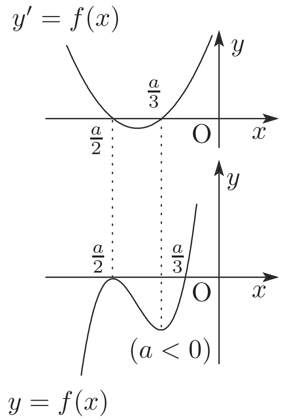
$$x = \frac{a}{3},\ \frac{a}{2}$$

である．



(i) $a > 0$ のとき
$y = f'(x)$，$y = f(x)$ のグラフは右のようになる．
また増減表は下のようになる．

x	$\cdots\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



(ii) $a < 0$ のとき
$y = f'(x)$，$y = f(x)$ のグラフは右のようになる．
また増減表は下のようになる．

x	$\cdots\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ここで

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{3}\right) &= 16 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - 20a \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 8a^2 \cdot \frac{a}{3} - a^3 \\ &= \frac{a^3}{27} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{2}\right) &= 16 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 20a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 8a^2 \cdot \frac{a}{2} - a^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>0}\ \textbf{のとき} & \begin{cases} \textbf{極大値} \quad \boldsymbol{\dfrac{a^3}{27}} & \left(\boldsymbol{x=\dfrac{a}{3}}\right) \\ \textbf{極小値} \quad \boldsymbol{0} & \left(\boldsymbol{x=\dfrac{a}{2}}\right) \end{cases} \\ \boldsymbol{a=0}\ \textbf{のとき} & \textbf{極値なし} \\ \boldsymbol{a<0}\ \textbf{のとき} & \begin{cases} \textbf{極大値} \quad \boldsymbol{0} & \left(\boldsymbol{x=\dfrac{a}{2}}\right) \\ \textbf{極小値} \quad \boldsymbol{\dfrac{a^3}{27}} & \left(\boldsymbol{x=\dfrac{a}{3}}\right) \end{cases} \end{cases}$$

(答)

(2) (1) の結果より,

$$\mathrm{P}(x,\ y)=\begin{cases} \left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a^3}{27}\right) & (a>0\ \text{のとき}) \\ \left(\dfrac{a}{2},\ 0\right) & (a<0\ \text{のとき}) \end{cases}$$

(i) $a>0$ のとき

$$x=\frac{a}{3} \quad \cdots ①,\quad y=\frac{a^3}{27} \quad \cdots ②$$

① より $a=3x$. ② に代入して

$$y=\frac{(3x)^3}{27}=x^3$$

このとき, ① より

$$x=\frac{a}{3}>0$$

(ii) $a<0$ のとき

$$x=\frac{a}{2} \quad \cdots ③,\quad y=0$$

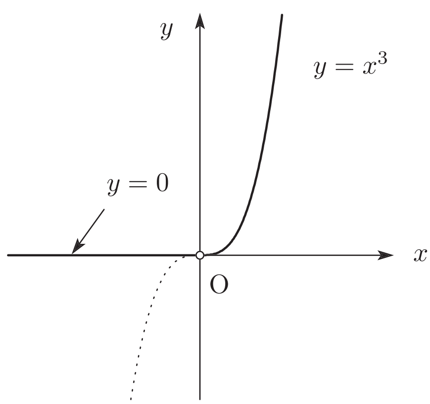
このとき ③ より

$$x<0$$

以上より, 点 $\mathrm{P}(x,y)$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x>0}\ \textbf{のとき} & \boldsymbol{y=x^3} \\ \boldsymbol{x<0}\ \textbf{のとき} & \boldsymbol{y=0} \end{cases}$$

上を動く (右図). (答)



【14】与えられた関数の右辺を $f(x)$ とおくと，

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

これが原点を通るから

$$-f(t) = f'(t)(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = tf'(t)$$

整理して

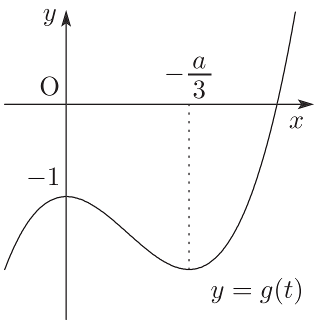
$$\begin{aligned} t^3 + at^2 + 1 &= 3t^3 + 2at^2 \\ 2t^3 + at^2 - 1 &= 0 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ の解が接点の x 座標であるから，問題の接線が 3 本存在するとき，3 次方程式 $(*)$ は異なる 3 つの実数解をもつ．$(*)$ の左辺を $g(t)$ とおくと，

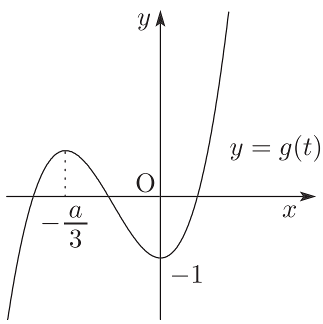
$$g'(t) = 6t^2 + 2at = 2t(3t + a)$$

$a \neq 0$ が必要．このとき $g(t)$ は $t = 0,\ -\dfrac{a}{3}$ で極値をとる．

$a < 0$ のとき．



$a > 0$ のとき．



図より $a > 0$ かつ $g\left(-\dfrac{a}{3}\right) > 0$ であることが必要十分．ゆえに

$$2\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 - 1 > 0$$

$$\therefore \quad \frac{a^3}{27} - 1 > 0$$

ゆえに求める a の値の範囲は

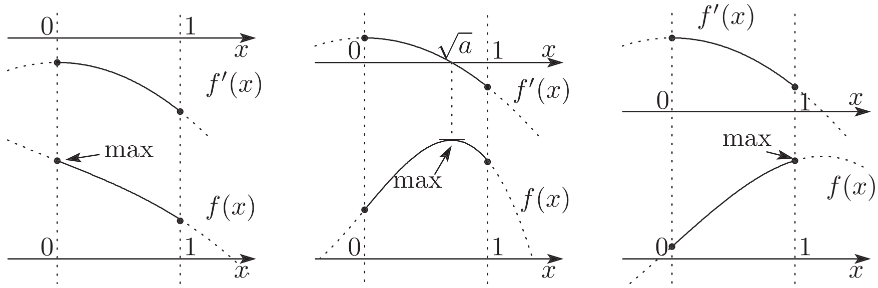
$\boldsymbol{a > 3}$ 　　(答)

【15】与式を微分して

$$f'(x) = -3x^2 + 3a = -3\left(x^2 - a\right)$$

a の値の範囲によって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

$a \leqq 0$ のとき．　　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき．　　$1 \leqq a$ のとき．



(i) $a \leqq 0$ のとき

$f'(x) \leqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調減少．ゆえに

$$\max f(x) = f(0) = 0$$

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

上の図より

$$\max f(x) = f\left(\sqrt{a}\right) = 2a\sqrt{a}$$

(iii) $1 \leqq a$ のとき

$f'(x) \geqq 0$ であるから，

$$\max f(x) = f(1) = 3a - 1$$

以上より，求める最大値は

$$\begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{a \leqq 0}) \\ \boldsymbol{2a\sqrt{a}} & (\boldsymbol{0 \leqq a \leqq 1}) \\ \boldsymbol{3a - 1} & (\boldsymbol{1 \leqq a}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ より，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

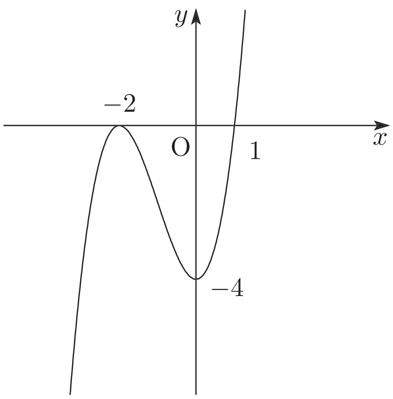
したがって，グラフは下図のようになる．

(2) $y' = -3x^2 + 12 = -3(x+2)(x-2)$ より，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-18	$\nearrow$	14	$\searrow$

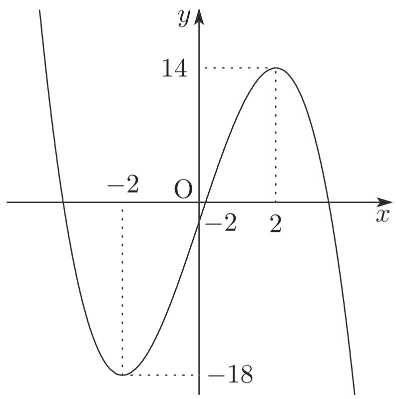
したがって，グラフは下図のようになる．

(1)



(答)

(2)



(答)

【2】(1) $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$ より，$-2 \leqq x \leqq 4$ における増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	12	$\searrow$	-15	$\nearrow$	37

したがって，グラフは下図のようになる．
これより

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=4} \text{ のとき，　最大値 } \boldsymbol{37} \\ \boldsymbol{x=2} \text{ のとき，　最小値 } \boldsymbol{-15} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

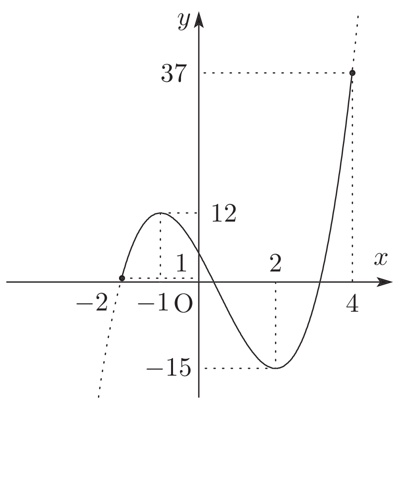
(2) $f'(x)=-3x^2+9=-3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ より，$-2 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ における増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	-10	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{35}{8}$

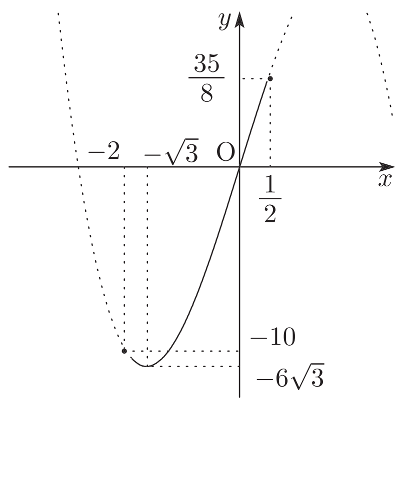
したがって，グラフは下図のようになる．
これより

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{1}{2}} \text{ のとき，　最大値 } \boldsymbol{\frac{35}{8}} \\ \boldsymbol{x=-\sqrt{3}} \text{ のとき，　最小値 } \boldsymbol{-6\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(1)



(2)

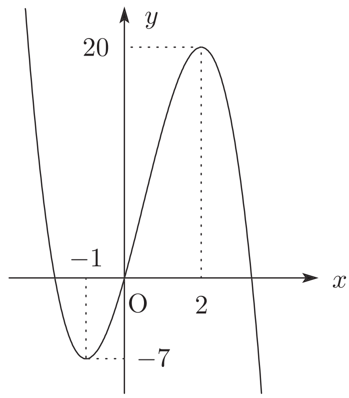


【3】(1) $y' = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x-2)(x+1)$

より，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-7	$\nearrow$	20	$\searrow$

したがって，グラフは右図．　(答)



(2) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ と $y = k$ のグラフの共有点を考えると，相異なる 2 つの負の解とひとつの正の解をもつような k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-7 < k < 0} \qquad \text{(答)}$$

【4】$y = 1 - 2x$ とすると，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より

$$1 - 2x \geqq 0 \qquad \therefore\ 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

また

$$2x^3 + y^3 = 2x^3 + (1-2x)^3 = -6x^3 + 12x^2 - 6x + 1$$

であるから

$$f(x) = -6x^3 + 12x^2 - 6x + 1$$

とすると，題意は，① のもとでの $f(x)$ の最大値・最小値を求めることに等しい．

$$f'(x) = -18x^2 + 24x - 6 = -6(3x-1)(x-1)$$

であるから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

である．したがって

$$\begin{cases} x = 0 \text{ のとき，} & \text{最大値 } 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & \text{最小値 } \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 0,\ y = 1} \text{ のとき} & \textbf{最大値 } \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x = \dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{1}{3}} \text{ のとき} & \textbf{最小値 } \boldsymbol{\dfrac{1}{9}} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

２９章　微分・積分（３）－不定積分と定積分－

問題

【1】C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int(-2)dx = \boldsymbol{-2x+C}$ （答）

(2) $\displaystyle\int(2x-3)dx = 2\int xdx - 3\int dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = \boldsymbol{x^2-3x+C}$ （答）

(3) $\displaystyle\int 4(x-1)dx = \int(4x-4)dx = 4\int xdx - 4\int dx$

$\displaystyle= 4\cdot\frac{x^2}{2} - 4x + C = \boldsymbol{2x^2-4x+C}$ （答）

(4) $\displaystyle\int(6x^2+3)dx = 6\int x^2dx + 3\int dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} + 3x + C = \boldsymbol{2x^3+3x+C}$ （答）

(5) $\displaystyle\int(-1-x+2x^2)dx = -\int dx - \int xdx + 2\int x^2dx$

$\displaystyle= -x - \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + C$

$\displaystyle= \boldsymbol{-x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + C}$ （答）

(6) $\displaystyle\int(3t^2-t)dt = 3\int t^2dt - \int tdt = 3\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C = \boldsymbol{t^3 - \frac{t^2}{2} + C}$ （答）

【2】C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int x(x-3)dx = \int(x^2-3x)dx$

$\displaystyle= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C}$ （答）

(2) $\displaystyle\int(x-2)(x+1)dx = \int(x^2-x-2)dx$

$\displaystyle= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C}$ （答）

(3) $\displaystyle\int(t-2)(t+2)dt = \int(t^2-4)dt$

$\displaystyle= \boldsymbol{\frac{1}{3}t^3 - 4t + C}$ （答）

(4) $\displaystyle\int(3+2x)(3x+2)dx = \int(6x^2+13x+6)dx$

$\displaystyle= \boldsymbol{2x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 6x + C}$ （答）

(5)
$$\int (x-1)^2 dx = \int (x^2-2x+1)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(x-1)^3\}' = 3\cdot 1\cdot (x-1)^2 = 3(x-1)^2$　より，$(x-1)^2 = \dfrac{1}{3}\cdot\{(x-1)^3\}'$

$$\therefore \int (x-1)^2 dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}(x-1)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C + \dfrac{1}{3}$ である．

(6)
$$\int (3x-2)^2 dx = \int (9x^2-12x+4)dx$$
$$= \boldsymbol{3x^3 - 6x^2 + 4x + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(3x-2)^3\}' = 3\cdot 3\cdot (3x-2)^2 = 9(3x-2)^2$　より，$(3x-2)^2 = \dfrac{1}{9}\cdot\{(3x-2)^3\}'$

$$\therefore \int (3x-2)^2 dx = \boldsymbol{\frac{1}{9}(3x-2)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C + \dfrac{8}{9}$ である．

(7)
$$\int (x-1)^3 dx = \int (x^3-3x^2+3x-1)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(x-1)^4\}' = 4\cdot 1\cdot (x-1)^3 = 4(x-1)^3$　より，$(x-1)^3 = \dfrac{1}{4}\cdot\{(x-1)^4\}'$

$$\therefore \int (x-1)^3 dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}(x-1)^4 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C - \dfrac{1}{4}$ である．

(8)
$$\int (2y+1)^3 dy = \int (8y^3+12y^2+6y+1)dy$$
$$= \boldsymbol{2y^4 + 4y^3 + 3y^2 + y + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(2y+1)^4\}' = 4\cdot 2\cdot (2y+1)^3 = 8(2y+1)^3$　より，$(2y+1)^3 = \dfrac{1}{8}\cdot\{(2y+1)^4\}'$

$$\therefore \int (2y+1)^3 dy = \boldsymbol{\frac{1}{8}(2y+1)^4 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C - \dfrac{1}{8}$ である．

(9) $$\int (x-1)^2(x+2)dx = \int (x^3-3x+2)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C} \qquad (答)$$

【3】(1) $$\int_0^2 (-3)dx = \Big[-3x\Big]_0^2 = -3(2-0) = \mathbf{-6} \qquad (答)$$

(2) $$\int_2^{-1} 2xdx = \Big[x^2\Big]_2^{-1} = 1-4 = \mathbf{-3} \qquad (答)$$

(3) $$\int_{-1}^1 3x^2dx = \Big[x^3\Big]_{-1}^1 = 1-(-1) = \mathbf{2} \qquad (答)$$

＜別解＞

$f(x)=3x^2$ とおくと，$f(-x)=3(-x)^2=3x^2=f(x)$ より $f(x)$ が偶関数なので

$$\int_{-1}^1 3x^2dx = 2\int_0^1 3x^2dx = 2\Big[x^3\Big]_0^1 = 2(1-0) = \mathbf{2} \qquad (答)$$

(4) $$\int_{-1}^{-1} x^5dx = \mathbf{0} \qquad (答)$$

【4】(1) $$\int_1^2 (2x+1)dx = \Big[x^2+x\Big]_1^2 = (4+2)-(1+1) = \mathbf{4} \qquad (答)$$

(2) $$\int_0^2 2(x-1)dx = 2\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2 = 2\left\{\left(\frac{4}{2}-2\right)-(0-0)\right\} = \mathbf{0} \qquad (答)$$

(3) $$\int_0^1 (6x^2-3)dx = \Big[2x^3-3x\Big]_0^1 = (2-3)-(0-0) = \mathbf{-1} \qquad (答)$$

(4) $$\int_{-1}^1 (x^2-3x)dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad (答)$$

(5) $$\int_2^{-2} (3+x-x^2)dx = \int_{-2}^2 (x^2-x-3)dx = 2\int_0^2 (x^2-3)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_0^2 = 2\left(\frac{8}{3}-6\right) = \boldsymbol{-\frac{20}{3}} \qquad (答)$$

(6) $$\int_0^{-1} (9x^2+4x-1)dx = \Big[3x^3+2x^2-x\Big]_0^{-1}$$
$$= (-3+2+1)-(0+0-0) = \mathbf{0} \qquad (答)$$

(7) $$\int_{-2}^{1}(3x^2-2x-1)dx=\Big[x^3-x^2-x\Big]_{-2}^{1}$$
$$=(1-1-1)-(-8-4+2)=\mathbf{9}\qquad(答)$$

(8) $$\int_{-1}^{2}(x^2-2x-2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{1}{3}\{8-(-1)\}-(4-1)-2\{2-(-1)\}=\mathbf{-6}\qquad(答)$$

(9) $$\int_{3}^{2}(x^2-4x-3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-3x\right]_{3}^{2}$$
$$=\frac{1}{3}(8-27)-2(4-9)-3(2-3)=\mathbf{\frac{20}{3}}\qquad(答)$$

【5】(1) $$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx=\mathbf{0}\qquad(答)$$

(2) $$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}(x^2-1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-1)dx&=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx\\&=2\int_{0}^{1}(x^2-1)dx\\&=2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{0}^{1}\\&=2\left(\frac{1}{3}-1\right)=\mathbf{-\frac{4}{3}}\qquad(答)\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx-\int_{1}^{2}(2+2x-3x^2-4x^3)dx\\&=\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx+\int_{1}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx\\&=\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx\\&=2\int_{0}^{2}(3x^2-2)dx\\&=2\Big[x^3-2x\Big]_{0}^{2}=2\cdot\big(2^3-2\cdot2\big)=\mathbf{8}\qquad(答)\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{a}^{c}(x-x^2-x^3)dx$

$$= \int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx-\int_{a}^{c}(x^3+x^2-x)dx$$
$$= \int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{c}^{a}(x^3+x^2-x)dx$$
$$= \int_{-a}^{a}(x^3+x^2-x)dx$$
$$= 2\int_{0}^{a}x^2dx$$
$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $1 \leqq x \leqq 3$ において，$|x-3|=-(x-3)$ より

$$\int_1^3|x-3|dx=\int_1^3\{-(x-3)\}dx$$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^3$$
$$=-\left\{\left(\frac{9}{2}-9\right)-\left(\frac{1}{2}-3\right)\right\}=\mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$|2x-4|=\begin{cases}-(2x-4) & (0 \leqq x \leqq 2)\\ 2x-4 & (2 \leqq x \leqq 3)\end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^3|2x-4|dx=\int_0^2\{-(2x-4)\}dx+\int_2^3(2x-4)dx$$
$$=-\left[x^2-4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^3$$
$$=-\{(4-8)-(0-0)\}+\{(9-12)-(4-8)\}=\mathbf{5} \qquad \text{(答)}$$

(3)
$$|x^2-1|=\begin{cases}-(x^2-1) & (0 \leqq x \leqq 1)\\ x^2-1 & (1 \leqq x \leqq 2)\end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^2|x^2-1|dx=\int_0^1\{-(x^2-1)\}dx+\int_1^2(x^2-1)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$$
$$=-\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-(0-0)\right\}+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=\mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(4)
$$|x^2-2x-3| = \begin{cases} -(x^2-2x-3) & (0 \leqq x \leqq 3) \\ x^2-2x-3 & (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^4 |x^2-2x-3|dx = \int_0^3 \{-(x^2-2x-3)\}dx + \int_3^4 (x^2-2x-3)dx$$

ここで

$$g(x) = -(x^2-2x-3)$$
$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \quad (g(x)\text{ の不定積分の 1 つ})$$

とおくと，上式の右辺は

$$\begin{aligned} \int_0^3 g(x)dx + \int_3^4 \{-g(x)\}dx &= \int_0^3 g(x)dx + \int_4^3 g(x)dx \\ &= \Big[G(x)\Big]_0^3 + \Big[G(x)\Big]_4^3 \\ &= 2G(3) - G(0) - G(4) \\ &= 2(-9+9+9) - (0-0-0) \\ &\qquad - \left(-\frac{64}{3} + 16 + 12\right) \\ &= \mathbf{\frac{34}{3}} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

コメント

本問のように被積分関数を $g(x)$ などとおくことで，計算の見通しが非常に良くなる．この方法は被積分関数が複雑になればなるほど有効である．

(5)
$$|2x^2-3x-2| = \begin{cases} -(2x^2-3x-2) & \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2\right) \\ 2x^2-3x-2 & \left(-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2},\ 2 \leqq x \leqq 3\right) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^3 |2x^2-3x-2|dx \\ =&\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x^2-3x-2)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^2 \{-(2x^2-3x-2)\}dx \\ &\qquad + \int_2^3 (2x^2-3x-2)dx \end{aligned}$$

ここで

$$g(x) = 2x^2-3x-2,$$

$$G(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x \quad (g(x)\text{ の不定積分の 1 つ})$$

とおくと，上式の右辺は

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2} \{-g(x)\}dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{2}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$$

$$=\Big[G(x)\Big]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \Big[G(x)\Big]_{2}^{-\frac{1}{2}} + \Big[G(x)\Big]_{2}^{3}$$

$$=2G\left(-\frac{1}{2}\right) + G(3) - G(-1) - 2G(2)$$

$$=2\left(-\frac{1}{12} - \frac{3}{8} + 1\right) + \left(18 - \frac{27}{2} - 6\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) - 2\left(\frac{16}{3} - 6 - 4\right)$$

$$=\mathbf{\frac{109}{12}}$$ （答）

【7】 $I(a) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - a^2| dx$ とおく．

$$|x^2 - a^2| = \begin{cases} -(x^2 - a^2) & (0 < x < a) \\ x^2 - a^2 & (a \leqq x) \end{cases}$$

であるから，a の値の範囲で場合に分ける．

(i) $0 < a < 1$ のとき

$$I(a) = \int_0^a \{-(x^2 - a^2)\}dx + \int_a^1 (x^2 - a^2)dx \quad \cdots (*)$$

ここで

$$g(x) = -\left(x^2 - a^2\right)$$

$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + a^2 x \quad (g(x) \text{ の不定積分の } 1 \text{ つ})$$

とおくと

$$\begin{aligned}(*) &= \int_0^a g(x)dx + \int_a^1 \{-g(x)\}dx \\ &= \int_0^a g(x)dx + \int_1^a g(x)dx \\ &= \Big[G(x)\Big]_0^a + \Big[G(x)\Big]_1^a \\ &= 2G(a) - G(0) - G(1) \\ &= 2\left(-\frac{1}{3}a^3 + a^3\right) - \left(-\frac{1}{3} + a^2\right) \\ &= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(ii) $1 \leqq a$ のとき

$$I(a) = \int_0^1 \{-(x^2 - a^2)\}dx = \int_0^1 g(x)dx$$
$$= \Big[G(x)\Big]_0^1 = G(1) - G(0) = a^2 - \frac{1}{3}$$

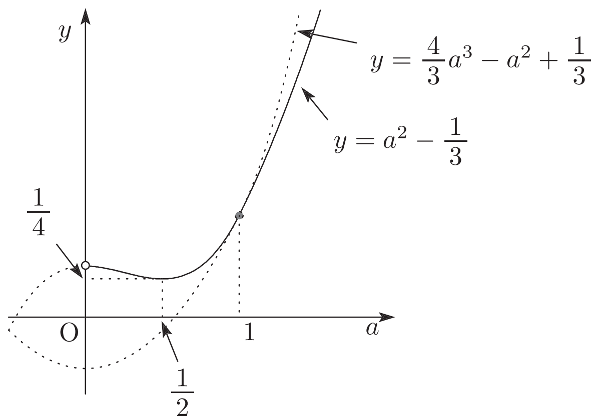
以上より

$$I(a) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}a^3 - a^2 + \dfrac{1}{3} & (0 < a < 1) \\ a^2 - \dfrac{1}{3} & (1 \leqq a) \end{cases}$$

ここで

$$\left(\frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\right)' = 4a^2 - 2a$$
$$= 2a\,(2a - 1)$$

であるから，$I(a)$ のグラフは次の図のようになる．



ゆえに求める $I(a)$ の最小値は，

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【8】

ポイント

与式における被積分関数を，$x - \alpha$ について展開する．
また，不定積分の公式

$$\int (x+a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を用いる．

≪証明≫

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx\\ &= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\}dx\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta\\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2\\ &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)^3\\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

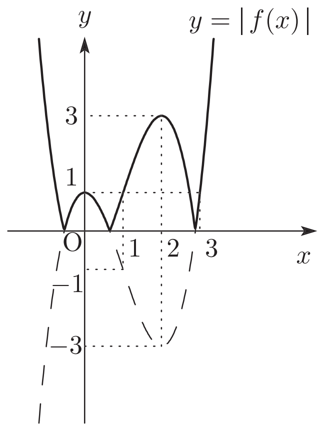
〔証明終〕

【9】(1) $f(x)=x^3-3x^2+1$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-6x\\ &=3x(x-2)\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

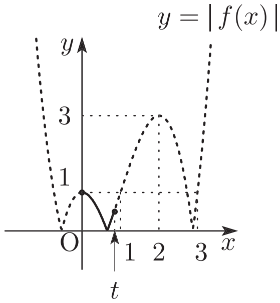
x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



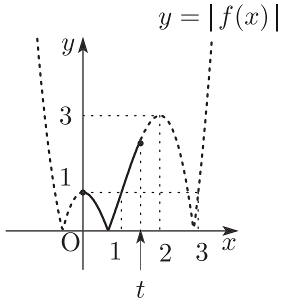
ゆえに $y=|f(x)|$ のグラフの概形は右図のようになる．

したがって $0\leqq x\leqq t$ における最大値は下図のようになる．

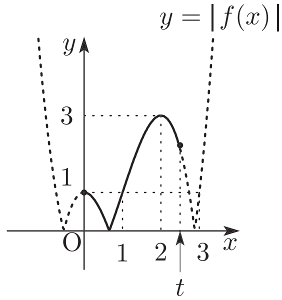
$0\leqq t\leqq 1$ のとき



$1\leqq t\leqq 2$ のとき



$2\leqq t\leqq 3$ のとき



ゆえに求める最大値は

$$\boldsymbol{g(t)=\begin{cases}1 & (0\leqq t\leqq 1)\\ -t^3+3t^2-1 & (1\leqq t\leqq 2)\\ 3 & (2\leqq t\leqq 3)\end{cases}}$$ （答）

(2) (1) より

$$\int_0^3 g(t)dt = \int_0^1 1dt + \int_1^2 (-t^3+3t^2-1)dt + \int_2^3 3dt$$
$$= \Big[t\Big]_0^1 + \Big[(-\frac{t^4}{4}+t^3-t)\Big]_1^2 + \Big[3t\Big]_2^3$$
$$= 1 + \frac{9}{4} + 3$$
$$= \boldsymbol{\frac{25}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【10】(1) $f(t)$ に関する条件より

$$f(t) = \int f'(t)dt = -t + C_1 \quad (C_1\text{は定数})$$

ここで，$f(0) = C_1 = 2$ より

$$\therefore\ f(t) = -t + 2$$

また $g(t)$ に関する条件より

$$g(t) = \int g'(t)dt$$
$$= \int (-t+2)dt$$
$$= -\frac{1}{2}t^2 + 2t + C_2 \quad (C_2\text{は定数})$$

同様に，$g(0) = C_2 = 7$ より

$$\therefore\quad g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 7$$

ここで

$$\begin{cases} x = f(t) = -t + 2 \\ y = g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 7 \end{cases}$$

とおく．第 1 式より $t = -x + 2$．これを第 2 式に代入して

$$y = -\frac{1}{2}(-x+2)^2 + 2(-x+2) + 7$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + 9$$

ところで $0 \leqq t \leqq c$ より

$$0 \leqq -x + 2 \leqq c \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - c \leqq x \leqq 2$$

以上より，求める軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + 9}$ の $\boldsymbol{2 - c \leqq x \leqq 2}$ の部分 (答)

(2) (1) と同様にして

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int h'(t)dt = t + h(0) = t + f(c) = t + 2 - c \\
k(t) &= \int k'(t)dt = \frac{1}{2}t^2 + (2-c)t + k(0) \\
&= \frac{1}{2}t^2 + (2-c)t + g(c) \\
&= \frac{1}{2}t^2 + (2-c)t - \frac{1}{2}c^2 + 2c + 7
\end{aligned}
$$

点 $(h(t),\ k(t))$ の軌跡が原点を通るとき，

$$
\begin{cases}
t + 2 - c = 0 & \cdots ① \\
\dfrac{1}{2}t^2 + (2-c)t - \dfrac{1}{2}c^2 + 2c + 7 = 0 & \cdots ②
\end{cases}
$$

となる t が存在するように c を定めればよい．ここで

$$
\begin{cases}
① \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - c = -t \\
② \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}t^2 + (2-c)t - \dfrac{1}{2}(2-c)^2 + 9 = 0
\end{cases}
$$

であるから，c を消去すると

$$
\frac{1}{2}t^2 - t^2 - \frac{1}{2}t^2 + 9 = 0 \quad \therefore\ t = 3 \quad (\because\ t \geqq 0)
$$

よって，① より

$$
2 - c = -3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{c = 5} \qquad \text{(答)}
$$

M1JK

高1東大数学K

Z-KAI

会員番号		氏　名	