M3JA/M3TA

本科０期１月度

解答

Ｚ会東大進学教室

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

問題

【1】(1) $a>0$ より，与式の両辺に a^2 をかけて

$$a^{2x+1}-8a^{x+3}-a^x+8a^2<0$$

ここで，$t=a^x$ とすると

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &\iff at^2-8a^3t-t+8a^2<0\\ &\iff (at-1)(t-8a^2)<0\\ &\iff 8a^2<t<\frac{1}{a}\quad \left(\because\ 0<a<\frac{1}{2}\text{ より } 8a^2<2<\frac{1}{a}\right)\\ &\iff a^{\log_a 8+2}<a^x<a^{-1}\end{aligned}$$

すなわち，求める x の範囲は

$-1<x<\log_a 8+2$　　**(答)**

(2) 真数条件より

$0<x<2^k+3^k$ $\cdots$①

また，① の下で

$$(\text{与式}) \iff \log_6 x(2^k+3^k-x)>\log_6 6^k$$

であり，$\log_6 x$ は $x\ (>0)$ の単調増加関数であるから

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &\iff x(2^k+3^k-x)>6^k\\ &\iff x^2-(2^k+3^k)x+6^k<0\\ &\iff (x-2^k)(x-3^k)<0\end{aligned}$$

以上から，求める x の範囲は

$$\begin{cases} k>0 \text{ のとき}\quad 2^k<x<3^k\\ k=0 \text{ のとき}\quad \text{なし}\\ k<0 \text{ のとき}\quad 3^k<x<2^k\end{cases}$$　　**(答)**

【2】条件から

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$$

が成り立つ．また

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\&=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

と変形できる．

ここで，条件 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$，$\alpha\geqq 0^\circ$，$\beta\geqq 0^\circ$，$\gamma\geqq 0^\circ$ より

$$\sin\frac{\alpha}{2}\geqq 0,\ \sin\frac{\beta}{2}\geqq 0,\ \sin\frac{\gamma}{2}\geqq 0$$

なので

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq 1$$

が示された．［証明終］

なお，等号は 3 つの角の少なくとも 1 つが 0° のとき，成立する．

【3】 条件より

$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\quad(\alpha$ は定数, $0<\alpha<\pi)$

$\mathrm{Q}(1,\ 0)$

と固定し，頂点 R の座標を

$(\cos\theta,\ \sin\theta)\quad(0<\theta<2\pi,\ \theta\fallingdotseq\alpha)$

とおいても一般性を失わない.

このとき，△ PQR の重心 G の座標は

$$\left(\frac{\cos\theta+1+\cos\alpha}{3},\ \frac{\sin\theta+\sin\alpha}{3}\right)$$

であるから

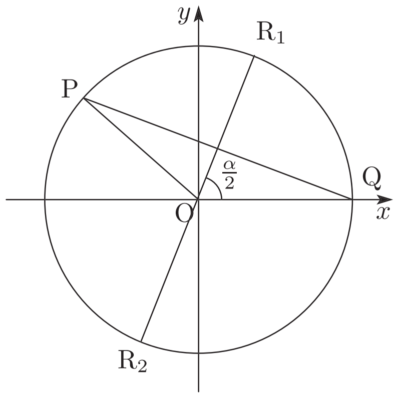
$$\begin{aligned}9\mathrm{OG}^2&=(\cos\theta+1+\cos\alpha)^2+(\sin\theta+\sin\alpha)^2\\&=2\cos\theta+2(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)+3+2\cos\alpha\\&=2\cos\theta+2\cos(\theta-\alpha)+3+2\cos\alpha\\&=4\cos\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}+3+2\cos\alpha\quad(\because\ \text{和積公式})\end{aligned}$$

$0<\alpha<\pi$ より，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから，OG は

$$\begin{cases}\cos\left(\theta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1 \iff \theta=\dfrac{\alpha}{2} & \text{のとき最大}\\ \cos\left(\theta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=-1 \iff \theta=\pi+\dfrac{\alpha}{2} & \text{のとき最小}\end{cases}$$

となる.

図 1



したがって，線分 PQ の垂直 2 等分線と C との交点のうち，PQ に関して O と反対側にある点を R_1，O と同じ側にある点を R_2 とすると，OG は

$$\begin{cases}\text{R が } \mathrm{R}_1 \text{ に一致するとき最大}\\ \text{R が } \mathrm{R}_2 \text{ に一致するとき最小}\end{cases}$$

(答)

となる.

【4】中辺を展開すると

$x^3+3yx^2+(3y^2-1)x+y(y^2-1)$

ここで

$(\text{中辺})-(\text{左辺})=(3y^2-1)x+y(y^2-1)$

であり，$y \geqq 1$ より $3y^2-1>0$，$y(y^2-1) \geqq 0$ であるから

$(\text{中辺})-(\text{左辺})>0$

が成り立つ x の範囲は

$x>0$ ……………………………………………………①

また

$(\text{右辺})-(\text{中辺})=x^2-(3y^2-1)x-y(y^2-1)$

であり，①の範囲で

$(\text{右辺})-(\text{中辺})>0$

が成り立つ x の範囲は

$$x>\frac{3y^2-1+\sqrt{(3y^2-1)^2+4y(y^2-1)}}{2} \qquad (\text{答})$$

問題

【1】(1) $\dfrac{4n+3}{2n^2+1} = \dfrac{4+\frac{3}{n}}{2n+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(2) $\dfrac{(n+1)(n+3)}{(2n-3)(n-1)} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\left(2-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1\cdot 1}{2\cdot 1} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{n^2+n+1}{-3n+2} = \dfrac{n+1+\frac{1}{n}}{-3+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

(4) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3} = \dfrac{(n+2)-(n-3)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}} = \dfrac{5}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(5) $n(\sqrt{n^2+3}-n) = \dfrac{n(n^2+3-n^2)}{\sqrt{n^2+3}+n} = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n} = \dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{2}$

(6) $3n\left(\sqrt[3]{n^3-n+1}-\sqrt[3]{n^3+8}\right)$

$$=\frac{3n\left\{(n^3-n+1)-(n^3+8)\right\}}{\left(\sqrt[3]{n^3-n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n^3-n+1}\sqrt[3]{n^3+8}+\left(\sqrt[3]{n^3+8}\right)^2}$$

($\because$　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ を利用)

$$=\frac{3\left(-1-\frac{7}{n}\right)}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\sqrt[3]{1+\frac{8}{n^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{8}{n^3}}\right)^2}$$

($\because$　分子・分母を n^2で割った)

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-3}{3} = -1$$

(7) $\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2^{2n+1}} = \dfrac{\frac{1-3^{n+1}}{1-3}}{2^{2n+1}} = \dfrac{3^{n+1}-1}{2^{2n+2}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{2^{2n+2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(8)　(i) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$0<\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<1$ より，

$$\frac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta} = \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n-1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-1}{1} = -1$$

(ii) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\sin\theta=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$$\frac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta} = 0$$

(iii) $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}<1$ より，

$$\frac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta} = \frac{1-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n}{1+\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1} = 1$$

(9) $2\log_2 n - \log_2 n(2n+1) = \log_2 \dfrac{n^2}{n(2n+1)} = \log_2 \dfrac{1}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log_2 \frac{1}{2} = -1$

(10) $\log_a \dfrac{a^{n+1}}{a^n+1} = \log_a \dfrac{a}{1+\frac{1}{a^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log_a a = 1 \quad (\because \quad a > 1$ より$)$

(11) $-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{2} \leqq 1$ より，$-\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2} \leqq \dfrac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ であるから，はさみうちの原理により，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 0$

(12) 一般に，$x-1 < [x] \leqq x$ が成り立つので，

$10^n\pi - 1 < [10^n\pi] \leqq 10^n\pi$

$\therefore \quad \pi - \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{[10^n\pi]}{10^n} \leqq \pi$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pi - \frac{1}{10^n}\right) = \pi$ であるから，はさみうちの原理により，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^n\pi]}{10^n} = \pi$

【2】I.

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{3n+4}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{3+\frac{4}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+2)}$$
$$=-\infty \qquad \left(\because \quad \frac{3+\frac{4}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+2)}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0\right)$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-3}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-3}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-(n-3)}{(n+2)-(n-2)}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}$$
$$=\frac{2}{2}=1$$

(3) 正の数 a，b の大小で場合分けする．

(i) $a>b$ のとき

$0<\dfrac{b}{a}<1$ より，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ なので，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{a}{1}=a$$

(ii) $a=b$ のとき
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+1}}{2a^n}=a$$

(iii) $a<b$ のとき

$0<\dfrac{a}{b}<1$ より，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}=\frac{b}{1}=b$$

以上より，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\max(a,\ b)$$

II.

(1) 第 n 部分和を S_n とすると，$n>1$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= 1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad\cdots\cdots+\left(-\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)-\frac{n}{n+1} \\ &= 1-\frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

したがって，収束して和は 0 である．　　　(答)

(2) $n=2m$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\cdots\cdots+\frac{m-1}{m}-\frac{m}{m+1} \\ &= 1-\frac{m}{m+1}=\frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

$n\to\infty$ のとき，$m\to\infty$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}=0$$

$n=2m-1$ のとき，

$$S_n = S_{2m}-\left(-\frac{m}{m+1}\right)=1$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

よって，

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} \fallingdotseq \lim_{m\to\infty} S_{2m-1}$$

より，この無限級数は発散する．　　　(答)

【3】(1) $f'(x)=2x$ より，$x=x_n$ における接線の方程式は

$$y-({x_n}^2-a)=2x_n(x-x_n)$$

よって，$y=0$ とすると，

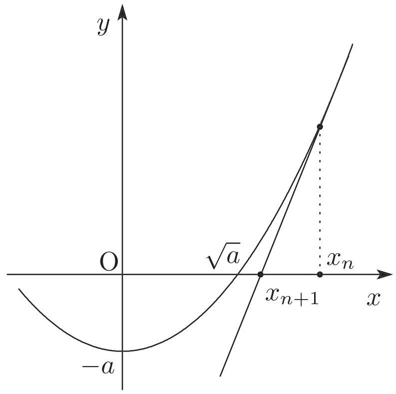
$$-{x_n}^2+a=2x_nx-2{x_n}^2$$

ここで，$x_n=0$ とすると，$a=0$ となり条件に反するので，$x_n \fallingdotseq 0$ より，

$$x=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

すなわち，

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \qquad \text{(答)}$$



(2) 条件より，

$$x_1>\sqrt{a}$$

$n=k$ のとき，

$$x_k>\sqrt{a}$$

を仮定すると，

$$\begin{aligned} x_{k+1}-\sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)-\sqrt{a} \\ &= \frac{{x_k}^2+a-2x_k\sqrt{a}}{2x_k} \\ &= \frac{(x_k-\sqrt{a})^2}{2x_k}>0 \quad (\because \quad x_k>\sqrt{a}) \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

したがって，任意の自然数 n に対して，$x_n>\sqrt{a}$ が成り立つので，

$$x_{n+1}>\sqrt{a} \quad \cdots\cdots ①$$

また，

$$\begin{aligned} x_n-x_{n+1} &= x_n-\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{2{x_n}^2-{x_n}^2-a}{2x_n} \\ &= \frac{(x_n-\sqrt{a})(x_n+\sqrt{a})}{2x_n}>0 \quad (\because \quad x_n>\sqrt{a}) \end{aligned}$$

より，

$$x_{n+1}<x_n \quad \cdots\cdots ②$$

したがって，①，② より，

$$\sqrt{a}<x_{n+1}<x_n$$

が成り立つ．　　(証明終)

(3) (2) の前半と同様に

$$\begin{aligned} |x_{n+1}-\sqrt{a}| &= \left|\frac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}\right| \\ &= \left|\frac{x_n-\sqrt{a}}{2x_n}\right||x_n-\sqrt{a}| \\ &= \left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right||x_n-\sqrt{a}| \end{aligned}$$

ここで，$0<\sqrt{a}<x_n$ であるから，

$$0<\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2x_n}<\frac{1}{2}$$

したがって，

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{a}\right|<\frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{a}\right| \qquad \text{(証明終)}$$

(4) (3) の結果を繰り返し用いて，

$$\begin{aligned}\left|x_n-\sqrt{a}\right| &< \frac{1}{2}\left|x_{n-1}-\sqrt{a}\right| \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^2\left|x_{n-2}-\sqrt{a}\right| \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{a}\right|\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{a}\right|=0$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a} \qquad \text{(答)}$$

《注意》

(2) の結果より，

$$\sqrt{a}<\cdots\cdots<x_{n+1}<x_n<x_{n-1}<\cdots\cdots<x_1$$

であるから，数列 $\{x_n\}$ は **下に有界で単調減少** である．したがって，$\{x_n\}$ は収束するので，その極限値を α とすると，(1) の漸化式より，

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{a}{\alpha}\right)$$

$\alpha>0$ であるから，

$$\alpha=\sqrt{a}$$

である．

この漸化式は方程式 $x^2-a=0$ の解を近似する漸化式で，適当な初項を与え，適当な項で打ち切ると $\sqrt{a}$ の値の近似値を求めることができる．このような方法で近似値を求めることを **ニュートン法** という．

初項を $x_1<-\sqrt{a}$ とすると，$\{x_n\}$ は上に有界で単調増加となり，$-\sqrt{a}$ に収束する．

添削課題

【1】(1) 放物線 $y = x^2 + 2(2-a)x + 2(1-2a)$ は

$$y = (x + 2 - a)^2 - (2-a)^2 + 2(1-2a) = \{x - (a-2)\}^2 - a^2 - 2$$

より，頂点が $(a-2,\ -a^2-2)$ である下に凸の放物線である．これを x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動すれば放物線 $y = f(x)$ となるから，放物線 $y = f(x)$ は頂点が $(a,\ -a^2-4)$ で，凹凸の変化はない．よって

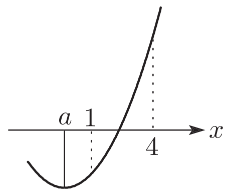
$$f(x) = (x-a)^2 - a^2 - 4 = x^2 - 2ax - 4$$ **(答)**

(2) $y = f(x)$ の軸の位置によって場合分けする．

(i) $a < 1$ のとき

$$f(1) = -2a - 3 \leqq 0 \iff a \geqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4) = -8a + 12 \geqq 0 \iff a \leqq \frac{3}{2}$$

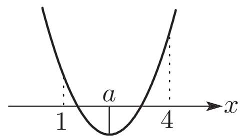


$a < 1$ と合わせて　$-\dfrac{3}{2} \leqq a < 1$

(ii) $1 \leqq a \leqq 4$ のとき　頂点の y 座標は負であるから

$$f(1) = -2a - 3 \geqq 0 \iff a \leqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4) = -8a + 12 \geqq 0 \iff a \leqq \frac{3}{2}$$

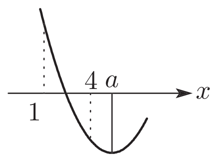


のいずれかが成り立てばよいから，$1 \leqq a \leqq 4$ と合わせて　$1 \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$

(iii) $4 < a$ のとき

$$f(1) = -2a - 3 \geqq 0 \iff a \leqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4) = -8a + 12 \leqq 0 \iff a \geqq \frac{3}{2}$$



これを満たす a は存在しない．

以上より，求める a の値の範囲は

$$-\frac{3}{2} \leqq a \leqq \frac{3}{2}$$ **(答)**

２章－１　場合の数，確率

問題

【1】(1) 全ての辺の長さが等しいとき，最初に塗る色は，どこに塗っても同じである．その対面の色の塗り方は 5 通り．残りの 4 面は 4 色を並べる円順列と考えて

$(4-1)! = 3! = 6$ (通り)

よって

$5 \times 6 = 30$ (通り)　　(答)

(2) まず，正方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り．残る 4 面の塗り方は (1) と同様に 6 通りであるから

${}_6\mathrm{C}_2 \times 6 = 90$ (通り)　　(答)

(3) まず，面積が $a \times b$ の長方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り．

次に，面積が $b \times c$ の長方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り．

最後に，面積が $c \times a$ の長方形の面の塗り方は 2 通り．

以上から

${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 2 = 180$ (通り)　　(答)

【2】(1) ちょうど n 回で終了する場合は

(A) $n-1$ 回目までに表が $k-1$ 回，裏が $n-k$ 回出て，n 回目に表が出る

(B) $n-1$ 回目までに裏が $k-1$ 回，表が $n-k$ 回出て，n 回目に裏が出る

の場合であり，事象 (A) と事象 (B) は排反であるから，求める確率 p_n は

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}{2^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より，p_n と p_{n+1} の比をとると

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k-1}}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}} \\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \cdot \frac{(n-k)!(k-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n-k+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} p_{n+1} > p_n \iff \dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \iff n > 2(n-k+1) \iff n < 2k-2 \\ p_{n+1} = p_n \iff \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 \iff n = 2(n-k+1) \iff n = 2k-2 \end{cases}$$

であるから

$$p_k < p_{k+1} < \cdots < p_{2k-2} = p_{2k-1}$$

すなわち，p_n を最大にする n は $2k-2,\ 2k-1$.　　(答)

【3】(1) n 段の階段を題意のように昇る昇り方の数を a_n とする．このとき，1 歩目の段の数で場合を分けると

(i) 1 歩目に 1 段だけ昇るとき，2 歩目以降は題意をみたすように $n-1$ 段昇ることになる．この場合の昇り方は a_{n-1} 通りある．

(ii) 1 歩目に 2 段昇るとき，残りの $n-2$ 段は題意をみたすように昇るので，この場合の昇り方は a_{n-2} 通りある．

(i)，(ii) は互いに排反だから

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqq 3)$

すると，$a_1 = 1$ であり

$a_2 = 2$　(1 段が 2 回，2 段が 1 回)

なので，a_1，$a_2, \ldots$，a_{15} の値は下表のようになる．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

よって，求める昇り方は 987 通り．　　**(答)**

(2) (1) と同様に考える．n 段の階段を題意のように昇る昇り方の数を b_n とすると

(i) 1 歩目に 1 段だけ昇るとき，2 歩目以降は題意をみたすように $n-1$ 段昇ることになる．この場合の昇り方は b_{n-1} 通りある．

(ii) 1 歩目に 2 段昇るとき，2 歩目は 1 段しか昇れない．そして，残りの $n-3$ 段は題意をみたすように昇るので，この場合の昇り方は b_{n-3} 通りある．

(i)，(ii) は互いに排反だから

$b_n = b_{n-1} + b_{n-3} \quad (n \geqq 4)$

すると，$b_1 = 1$ であり

$b_2 = 2$　(1 段が 2 回，2 段が 1 回)

$b_3 = 3$　(1 段が 3 回，1 段と 2 段，2 段と 1 段)

なので，b_1，$b_2, \ldots$，b_{15} の値は下表のようになる．

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277

よって，求める昇り方は 277 通り．　　**(答)**

【4】(1) $n=1,\ 2$ のとき

$$p_1=0,\ p_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

であり，$n\geqq 3$ のとき，n 回目に A が 2 個のコインを持っているのは，$n-2$ 回目に A が 2 個のコインを持っていて，$n-1$ 回目に 3 の倍数以外の目が，n 回目に 3 の倍数の目が出る場合に限るから

$$p_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}p_{n-2}=\frac{2}{9}p_{n-2}\quad(n\geqq 3)$$

(i) $n=2m-1$ (m : 正整数) のとき

$$p_n=p_{2m-1}=\left(\frac{2}{9}\right)^{m-1}\cdot p_1=0$$

(ii) $n=2m$ (m : 正整数) のとき

$$p_n=p_{2m}=\left(\frac{2}{9}\right)^{m-1}\cdot p_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n}$$

まとめると

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき}\quad p_n=0 \\ n\text{ が偶数のとき}\quad p_n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n} \end{cases}\qquad\text{(答)}$$

(2) n 回目に A が勝者となるのは，$n-1$ 回目の A のコインの数が 2 で，かつ n 回目に 3 の倍数の目が出る場合に限る.

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$q_n=\frac{1}{3}p_{n-1}\ \cdots ①$$

また，題意より，1 回目の試行で A が勝者となる確率は $q_1=\dfrac{1}{3}$ であるから，$p_0=1$ とすれば，① は $n=1$ のときも成り立つ.

よって，(1) の結果とあわせて

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき}\quad q_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} \\ n\text{ が偶数のとき}\quad q_n=0 \end{cases}\qquad\text{(答)}$$

【5】n 回コインを投げ終えた後で A が勝利となるとき，A が n 回目に表を出して終了する．

また，$p(1)=p(3)=0$ である．

(i) B が 0 点で終了するとき

$(n-1)$ 回目までに

裏が偶数回，表が 1 回，裏が偶数回

の順で出るので，$n=2k$ (k は自然数) である．

このとき，1，3，$\cdots$，$(2k-1)$ 回目の k 通りのうちいずれか 1 回で表が出ればよいので，求める確率は

$k\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{n}{2^{n+1}}$

(ii) B が 1 点で終了するとき

A が先に得点する場合，$(n-1)$ 回目までに

裏が偶数回，表が 1 回，裏が奇数回，表が 1 回，裏が奇数回

の順で出るので，$n=2k+1$ である．

このとき，1，3，$\cdots$，$(2k-1)$ 回目の k 通りのうちいずれか 2 回で表が出ればよいので，求める確率は

${}_k\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

B が先に得点する場合，$(n-1)$ 回目までに

裏が奇数回，表が 1 回，裏が奇数回，表が 1 回，裏が偶数回

の順で出るので，$n=2k+1$ である．

このとき，2，4，$\cdots$，$2k$ 回目の k 通りのうちいずれか 2 回で表が出ればよいので，求める確率は

${}_k\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって，B が 1 点で終了するのは，$n=2k+1$ のときで，その確率は

$2\cdot{}_k\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$

これは $n=1,\ 3$ でも正しい．

(i)，(ii) より

$$\begin{cases} p(n)=\dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ p(n)=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$ (答)

問題

【1】部分和を S_n とする.

(1)
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{aligned}$$

よって，級数は収束して，その和は 1

(2)
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって，級数は収束して，その和は $\frac{1}{3}$

(3)
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \log\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \{\log(k+1) - \log k\} + \sum_{k=2}^{n} \{\log(k-1) - \log k\} \\ &= (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + \cdots\cdots + (\log(n+1) - \log n) \\ &\quad + (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + \cdots\cdots + (\log(n-1) - \log n) \\ &= \log(n+1) - \log 2 - \log n \\ &= \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log 2 \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} -\log 2 \end{aligned}$$

よって，級数は収束して，その和は $-\log 2$

(4) 一般項は,
$$\frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} \ (\neq 0)$$

よって，級数は発散する.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は初項 4，公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数であり，$-1 <$ 公比 < 1 より，この級数は収束して，その和は

$$\frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

(6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$
の右辺はそれぞれ等比級数で，$-1 <$ 公比 < 1 より収束して，その和は
$$\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$$

(7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$
は，初項，公比 -1 の等比級数で，$-1 <$ 公比 < 1 をみたさないので，発散する．

(8)
$$x + x^2(x-2) + \cdots\cdots + x^n(x-2)^{n-1} + \cdots\cdots$$
は，初項 x，公比 $x(x-2)$ の等比級数であるので，

(i) $x = 0$ のとき

収束して，その和は 0

(ii) $x \neq 0$ のとき，

収束する条件は $-1 <$ 公比 < 1 であるので，

$$-1 < x(x-2) < 1 \iff \begin{cases} x^2 - 2x - 1 < 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

このとき，和は
$$\frac{x}{1-x(x-2)} = \frac{x}{1+2x-x^2}$$

以上より，

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \text{ かつ } x \neq 1 \text{ のとき，収束して，和は} \dfrac{x}{1+2x-x^2} \\ \text{上記以外の } x \text{ のとき，発散する} \end{cases}$$

(9)
$$S_{2n-1} = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \cdots\cdots - \frac{2n-1}{2n+1} + \frac{2n-1}{2n+1}$$
$$= \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$
$$S_{2n} = S_{2n-1} - \frac{2n+1}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$
よって，$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ より $\lim_{n\to\infty} S_n$ は存在しないので，級数は発散する．

【2】 I.

$f(x)=\sqrt{x^2+ax+1}-bx$ とおく．

$b \leqq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ となり，不適.

$b>0$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+ax+1)-b^2x^2}{\sqrt{x^2+ax+1}+bx}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-b^2)x^2+ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+bx}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-b^2)x+a+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+b}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{cases} 1-b^2>0 \text{ のとき，} & \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \\ 1-b^2<0 \text{ のとき，} & \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が収束するためには，

$1-b^2=0$

$b>0$ より，

$b=1$

このとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{a}{2}$$

条件より，

$\dfrac{a}{2}=3 \qquad \therefore\ a=6$

逆に，$a=6$，$b=1$ のときは題意が成立する．

したがって，

$a=6$，$b=1$ (答)

II.

(i) $|x|<1$ のとき，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2-bx}{x^{2n}+1}=ax^2-bx \quad \cdots\cdots ①$$

(ii) $|x|>1$ のとき，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}-\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x} \quad \cdots\cdots ②$$

(iii) $x=1$ のとき，

$$f(x)=\frac{1+a-b}{1+1}=\frac{1+a-b}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

(iv) $x=-1$ のとき，

$$f(x)=\frac{-1+a+b}{1+1}=\frac{-1+a+b}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

(i)(ii) により，$x \fallingdotseq 1$ では $f(x)$ は連続である．

$x=1$ で連続となるためには，①，②，③ より，

$$a-b=\frac{1}{1}=\frac{1+a-b}{2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$x=-1$ で連続となるためには，①，②，④ より，

$$a+b=\frac{1}{-1}=\frac{-1+a+b}{2} \quad \cdots\cdots ⑥$$

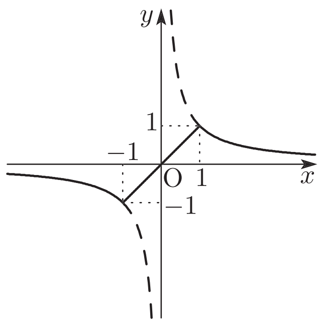
⑤，⑥ より，

$a=0,\quad b=-1$　　(答)

≪注意≫

このとき，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (|x|>1)\\ x & (|x|\leqq 1)\end{cases}$$



【3】$x \to \infty$ においては $\sqrt{x+1} \fallingdotseq \sqrt{x}$ であるから，直感的には

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right\}=0$$

と判断できる．この結果が正しいかどうかを考える．

形から，和➞積への変形を連想して，

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

より，

$$\begin{aligned}\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|&=2\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\\&\leqq 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \quad (\because\ \ \text{一般に}\left|\cos\theta\right|\leqq 1)\\&=2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 0\leqq\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|\leqq 2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0$ であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{x\to\infty}\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=0$$

すなわち，

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right\}=0$$

となり，結果が正しいことが論証された．

添削課題

【1】1 つのサイコロを n $(n \geqq 1)$ 回投げたとき，1 の目が奇数回出る確率は

$$1-p_n$$

である．

また，p_1 は，サイコロを 1 回振って 1 以外の目が出る確率を考えて

$$p_1=\frac{5}{6}$$

である．

さて，$n \geqq 2$ のとき，n 回サイコロを投げたときに 1 の目が偶数回出る確率は

(i) $n-1$ 回目までに 1 の目が偶数回出て，n 回目に 1 以外の目が出る．

(ii) $n-1$ 回目までに 1 の目が奇数回出て，n 回目に 1 の目が出る．

のどちらかの場合であり，(i) と (ii) は排反であるから

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1}\times\frac{5}{6}+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6} \end{aligned}$$

すなわち

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

である．ここで，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから，$n \geqq 1$ において

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ p_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \qquad \textbf{(答)}$$

３章－１　整数（１）

問題

【1】(1) 与式の両辺に $ab\ (>0)$ をかけて

$$3b+2a=ab$$

$$ab-2a-3b=0$$

$$(a-3)(b-2)=6$$

$a-3,\ b-2$ は整数で，$a>0,\ b>0$ より $a-3>-3,\ b-2>-2$ であるから

$$(a-3,\ b-2)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

$$\therefore\quad (a,\ b)=(4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3)$$ **(答)**

(2) 題意より，m を正整数として

$$x^2-6x+1=m^2$$

とかける．このとき

$$(x-3)^2-8=m^2$$

$$(x-3)^2-m^2=8$$

$$(x+m-3)(x-m-3)=8$$

x が整数のとき, $x+m-3,\ x-m-3$ は整数で, $m>0$ より, $x+m-3>x-m-3$ であり，かつ，$x+m-3$ と $x-m-3$ の偶奇は一致するから

$$(x+m-3,\ x-m-3)=(4,\ 2),\ (-2,\ -4)$$

$$\therefore\quad (x,\ m)=(6,\ 1),\ (0,\ 1)$$

以上から，求める x の値は

$x=0,\ 6$　**(答)**

【2】2 桁の自然数を $N=10a+b$（$a,\ b$ は $1\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9$ をみたす整数）とおく．

$$\begin{aligned}N^3&=(10a+b)^3\\&=1000a^3+300a^2b+30ab^2+b^3\\&=100(10a^3+3a^2b)+30ab^2+b^3\end{aligned}$$

より，N^3 の下 2 桁の数は $30ab^2+b^3$ の下 2 桁の数と一致する．

ここで，下 2 桁の数が一致するには，1 の位の数が一致することが必要であるから，b^3 の 1 の位の数は b と一致する．よって

$$b=0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9$$

に限られる．

(i) $b=0$ のとき

$$30ab^2+b^3=0$$

$10a$ の下 2 桁の数が 0 となるような a は存在しないので，不適．

(ii) $b=1$ のとき

$$30ab^2+b^3=30a+1$$

$30a+1$ の下 2 桁の数が $10a+1$ となるので，$a=5$

(iii) $b=4$ のとき

$$30ab^2+b^3=480a+64$$

$480a+64$ の下 2 桁の数は $80a+64$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+4$ となるので，$a=2$

(iv) $b=5$ のとき

$$30ab^2+b^3=750a+125$$

$750a+125$ の下 2 桁の数は $50a+25$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+5$ となるので，$a=2$，7

(v) $b=6$ のとき

$$30ab^2+b^3=1080a+216$$

$1080a+216$ の下 2 桁の数は $80a+16$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+6$ となるので，$a=7$

(vi) $b=9$ のとき

$$30ab^2+b^3=2430a+729$$

$2430a+729$ の下 2 桁の数は $30a+29$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+9$ となるので，$a=4$，9

以上より，求める自然数は

24，25，49，51，75，76，99 （答）

【3】題意より，整数 m, r を用いて

$a = bm + r \quad (0 \leqq r < b) \cdots$ ①

とおける．

a と b の最大公約数を $g_1 (\neq 0)$ とおくと

$a = a_0 g_1$, $b = b_0 g_1$　(但し，a_0 と b_0 は互いに素な整数)

と表せる．これを ① に代入して

$$a_0 g_1 = b_0 g_1 m + r$$

$$\iff \quad r = (a_0 - b_0 m) g_1$$

よって，r は g_1 で割り切れる．

ここで，$r_0 = a_0 - b_0 m$ とおくと

$r = r_0 g_1$

であり

$$a_0 g_1 = b_0 g_1 m + r_0 g_1$$

$\therefore \quad a_0 = b_0 m + r_0 \quad (\because g_1 \neq 0) \cdots$ ②

である．さらに，b_0 と r_0 の最大公約数を g_2 とすると

$b_0 = b_1 g_2$, $r_0 = r_1 g_2$　(但し，b_1 と r_1 は互いに素な整数)

と表せる．これを ② に代入すると

$a_0 = b_1 g_2 m + r_1 g_2 = g_2 (b_1 m + r_1)$

であり，a_0 は g_2 で割り切れるが，a_0 と b_0 は互いに素であるから

$g_2 = 1$

よって，b_0 と r_0 は互いに素であり，また，$b = b_0 g_1$, $r = r_0 g_1$ であるから，b と r の最大公約数は a と b の最大公約数 g_1 に等しい．　[証明終]

【4】$y = \sqrt{x}$ のグラフと x 軸および直線 $x = 2014$ で囲まれた図形（境界を含む）を D とする．領域 D に含まれる点のうち，x 座標が整数で，y 座標が 1 以上の整数である点の個数を求めればよい．

このような点のうち，$y = l$ であるものの個数は，x 座標が l^2 から 2014 までの

$2014 - (l^2 - 1) = 2015 - l^2$

個である．

$44 < \sqrt{2014} < 45$ であるから，求める点の個数は $2015 - l^2$ において l を 1 から 44 まで変化させて加えたもの，すなわち

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{44} (2015 - l^2) &= 2015 \cdot 44 - \frac{1}{6} \cdot 44 \cdot 45 \cdot 89 \\ &= 88660 - 29370 \\ &= 59290\end{aligned}$$

したがって，求める和は

59290　　(答)

【5】(1) (iii) に $n=99$ を代入して

$$f(99)+f(99+g(99))=f(100)$$

$$\therefore\quad f(99)=f(100)-f(99+g(99))$$

$$=f(100)-f(100)=0 \quad (\because\ \ g(99)=1)$$

よって，$f(99)=0$.　　　**(答)**

(2) $f(n)\geqq 0,\ g(n)\geqq 0$ と (iii) より

$$f(n+1)-f(n)=f(n+g(n))\geqq 0$$

であるから

$$f(n+1)\geqq f(n) \ \cdots\cdots(\sharp)$$

また，(iii) に $n=100$ を代入して

$$f(100)+f(100+g(100))=f(101)$$

$$\therefore\quad 1+f(100)=f(101)$$

$$\therefore\quad f(101)=2$$

(iii) に $n=101$ を代入して

$$f(101)+f(101+g(101))=f(102)$$

$$\therefore\quad 2+f(101+g(101))=f(102) \ \cdots\cdots(\flat)$$

ここで，$g(101)\geqq 1$ とすると

$$101+g(101)\geqq 102$$

であり，$(\sharp)$ より

$$f(102)-f(101+g(101))\leqq 0$$

となるが，これは

$$(\flat)\quad\Longleftrightarrow\quad 2=f(102)-f(101+g(101))$$

に反する．

よって，$g(101)=0$.　　　**(答)**

(3) (2) と同様にして，帰納的に

$$g(n)=0 \quad (n=100,\ 101,\ldots)$$

がいえる．よって，$n\geqq 100$ において

$$f(n)+f(n)=f(n+1)\quad\Longleftrightarrow\quad f(n+1)=2f(n)$$

であるから

$$f(2010)=2f(2009)=2^2f(2008)=\cdots=2^{1910}f(100)$$

$$=2^{1910}\ \ (\because f(100)=1)$$　　　**(答)**

問題

【1】(1)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+7x-2}{x^3-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{(x-2)(x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+1}{(x+1)^2}=-\boldsymbol{\frac{1}{9}}\qquad\textbf{(答)}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\mathbf{1}\qquad\textbf{(答)}$$

(3)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\mathbf{-1}\qquad\textbf{(答)}$$

(4) $x=-t$ とおくと，
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$$
$$=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad\textbf{(答)}$$

(5)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2 x-1}{1-\sqrt{2}\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1-\sqrt{2}\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\sqrt{2}\sin x)(1+\sqrt{2}\sin x)}{1-\sqrt{2}\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{2}\sin x)=\mathbf{2}\qquad\textbf{(答)}$$

(6)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\qquad\textbf{(答)}$$

(7)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad\textbf{(答)}$$

(8) $x-\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと，
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x-\pi}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{4t}{\sin t}=4\cdot 1=\mathbf{4}\qquad\textbf{(答)}$$

(9) $x - \dfrac{\pi}{3} = t$ とおくと，

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{3x - \pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi} \quad (\text{分子を合成する})$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2\sin t}{3t} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(10)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}} \qquad \textbf{(答)}$$

(11)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = \boldsymbol{-1} \qquad \textbf{(答)}$$

(12)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 3x^2)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(13) $a = e^{\log a}$ であるので，

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{x\log a} \cdot \log a$$

$$= 1 \cdot \log a = \boldsymbol{\log a} \qquad \textbf{(答)}$$

■別解

$f(x) = a^x$ とすると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = a^0 \log a = \log a \quad (\because \quad f'(x) = a^x \log a)$$

(14)

$$\lim_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \ \lim_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

より， $\displaystyle\lim_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} \neq \lim_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}}$ であるので，

$\displaystyle\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ は存在しない． **(答)**

(15) $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より， $e^{-x} (> 0)$ をかけて，

$$-e^{-x} \leqq e^{-x}\sin x \leqq e^{-x}$$

ここで， $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (-e^{-x}) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ なので，はさみうちの原理により，

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x}\sin x = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(答)}$$

【2】半径 1 で弧 A_0A_1 の長さが θ であるから，
$\angle A_0OA_1 = \theta$ である．

ここで，$A_nA_{n+1} = d_n$ とおくと，図２より，
$d_{n+1} = d_n \cos\theta$

これより，d_n は公比 $\cos\theta$ の等比数列であり，
$d_1 = A_1A_2 = \sin\theta$ であるから (図１)，
$d_n = \sin\theta\cos^{n-1}\theta$

さらに，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \cos\theta < 1$ なので，

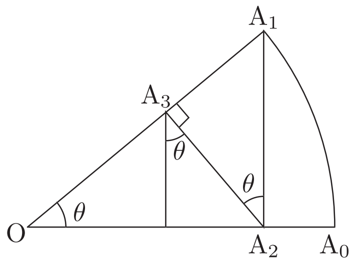
$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\theta\cos^{n-1}\theta = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

よって，

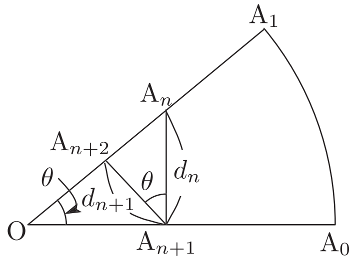
$$\theta g(\theta) = \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\theta g(\theta) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot(1+\cos\theta) = \mathbf{2}\end{aligned}$$
(答)



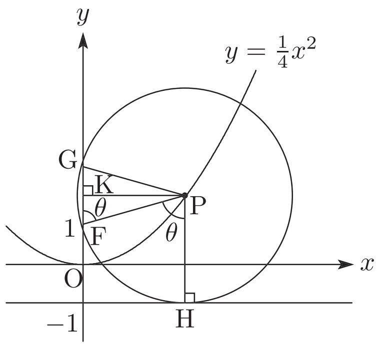
〔図１〕



〔図２〕

【3】P は放物線上の点で，$a>2$ より，

$$b=\frac{1}{4}a^2>1$$



△ PGF は二等辺三角形で，FG の中点

K の y 座標は $\frac{1}{4}a^2$ であるから，

$$\begin{aligned}T(a)&=\frac{1}{2}\mathrm{GF}\cdot\mathrm{PK}=\mathrm{KF}\cdot\mathrm{PK}\\&=\left(\frac{1}{4}a^2-1\right)\cdot a\\&=\frac{1}{4}a(a^2-4)\end{aligned}$$

また，$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}=\frac{1}{4}a^2-(-1)=\frac{1}{4}(a^2+4)$ であるから，$\angle\mathrm{FPH}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned}S(a)&=\frac{1}{2}\mathrm{PF}^2\times\angle\mathrm{FPH}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}(a^2+4)^2\theta\\&=\frac{1}{32}(a^2+4)^2\theta\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{T(a)}{S(a)}=\frac{\frac{1}{4}a(a^2-4)}{\frac{1}{32}(a^2+4)^2\theta}=\frac{8a(a^2-4)}{(a^2+4)^2\theta}$$

ここで，

$$\angle\mathrm{PFK}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{FPK}=\theta$$

であるから，

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{PF}}=\frac{a}{\frac{1}{4}(a^2+4)}=\frac{4a}{a^2+4}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{T(a)}{S(a)}&=\frac{4a}{a^2+4}\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\frac{2(a^2-4)}{a^2+4}\\&=\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2(a^2-4)}{a^2+4}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{4a}{a^2+4}=\lim_{a\to\infty}\sin\theta=0$ であり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから，

$a\to\infty$ のとき，$\theta\to 0$

したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}&=\lim_{a\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2(a^2-4)}{a^2+4}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{a\to\infty}\frac{2(a^2-4)}{a^2+4}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{a\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{4}{a^2}\right)}{1+\frac{4}{a^2}}\\&=1\cdot 2=\mathbf{2}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

添削課題

【1】与式を因数分解すると

$$n^9 - n^3 = n^3(n^6 - 1) = (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1)$$

となる． ここで， n を 3 で割った余りで分けて考えると，

(i) $n = 3k$ (k は整数) のとき

$$n^3 = 27k^3 = 9 \cdot 3k^3$$

より， $n^9 - n^3$ は 9 の倍数である．

(ii) $n = 3k + 1$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} n^3 - 1 &= (3k+1)^3 - 1 \\ &= 27k^3 + 27k^2 + 9k \\ &= 9(3k^3 + 3k^2 + k) \end{aligned}$$

より， $n^9 - n^3$ は 9 の倍数である．

(iii) $n = 3k - 1$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 1 &= (3k-1)^3 + 1 \\ &= 27k^3 - 27k^2 + 9k \\ &= 9(3k^3 - 3k^2 + k) \end{aligned}$$

より， $n^9 - n^3$ は 9 の倍数である．

以上より， 任意の整数 n に対して $n^9 - n^3$ は 9 で割り切れる．　[証明終]

M3JA/M3TA
東大理系数学Ⅰ Ａ Ⅱ Ｂ
東大理系数学Ⅲ
東大理系数学
難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	