M3JSB/M3JB/M3TB

本科 0 期 1 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学 T

問題

【1】$y=f(x)$ の軸は $x=1$ である．

軸の範囲	$1 \leqq a$	$a<1 \leqq a+1$	$a+1<1 \leqq a+2$	$a+2<1$
a の範囲	$1 \leqq a$	$0 \leqq a<1$	$-1 \leqq a<0$	$a<-1$
$M(a)$	$f(a+2)$	$f(a+2)$	$f(a)$	$f(a)$
$m(a)$	$f(a)$	$f(1)$	$f(1)$	$f(a+2)$

ここで

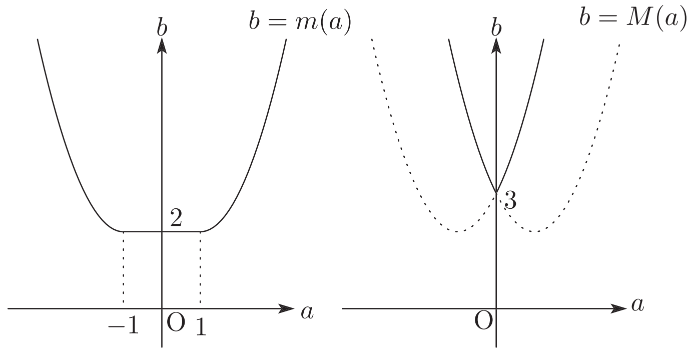
$$\begin{cases} f(a+2)=(a+2)^2-2(a+2)+3=a^2+2a+3 \\ f(a)=a^2-2a+3 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

よって

$$M(a)=\begin{cases} a^2+2a+3 & (0 \leqq a) \\ a^2-2a+3 & (a<0) \end{cases}$$

$$m(a)=\begin{cases} a^2-2a+3 & (1 \leqq a) \\ 2 & (-1 \leqq a<1) \\ a^2+2a+3 & (a<-1) \end{cases}$$

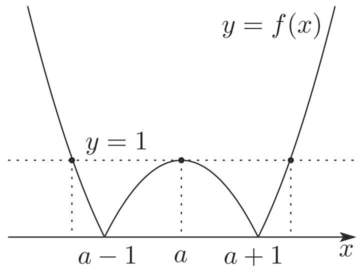
となり，求めるグラフは以下のようになる．　　　(答)



【2】$f(x)=|(x-a)^2-1|$ とおくと

$$(x-a)^2 \geqq 1 \iff x \leqq a-1,\ a+1 \leqq x$$
$$(x-a)^2 < 1 \iff a-1 < x < a+1$$

なので，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる．



そこで，いま

$f(x)=1 \quad (x \leqq a-1,\ a+1 \leqq x)$

となる x を求める．

この範囲で $f(x)=(x-a)^2-1$ だから

$(x-a)^2-1=1 \qquad \therefore \quad x=a\pm\sqrt{2}$

したがって，2 つの集合 A，B を

$A=\{x\,|\,0 \leqq x \leqq 2\}, \quad B=\{x\,|\,a-\sqrt{2} \leqq x \leqq a+\sqrt{2}\}$

と定めるとき

$A \subset B$

でなければならないから

$a-\sqrt{2} \leqq 0$ かつ $2 \leqq a+\sqrt{2}$

より

$2-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$

そして，この範囲の a は

$0 \leqq a \leqq 2$

をみたすから，点 $(a,\ 1)$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲に含まれ，$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値は確かに 1 となる．したがって，求める a の値の範囲は

$2-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ 　　(答)

【3】(1) $f(x)=2x^2+2ax+a^2-8=2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{2}-8$ より

頂点の座標は $\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{2}-8\right)$ **(答)**

また，グラフは下に凸であるから，x 軸と異なる 2 点で交わるとき

$\dfrac{a^2}{2}-8<0 \iff a^2<16 \iff -4<a<4$ **(答)**

(2) $-4<a<4$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる．また，グラフの軸 $x=-\dfrac{a}{2}$ について

$-3<-2<-\dfrac{a}{2}<2<3$

が成り立つ．さらに

$f(-3)=a^2-6a+10=(a-3)^2+1>0$

$f(3)=a^2+6a+10=(a+3)^2+1>0$

であるから，方程式 $f(x)=0$ の解は 2 つとも -3 と 3 の間にある．［証明終］

(3) 不等式 $f(x)<0$ が解をもつためには，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わらなければならないので，$-4<a<4$ のときを考えればよい．このとき，(2) より，$f(x)=0$ の 2 解は -3 と 3 の間にあるので，不等式 $f(x)<0$ の解がちょうど 4 つの整数を含むとき，その整数は

(i) $-2,\ -1,\ 0,\ 1$，(ii) $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

のいずれかである．

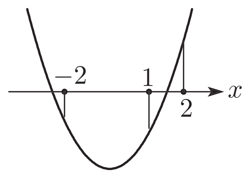
(i) の場合，グラフより

$f(-2)=a^2-4a<0 \iff 0<a<4$

$f(1)=a^2+2a-6<0$

$\iff -1-\sqrt{7}<a<-1+\sqrt{7}$

$f(2)=a^2+4a \geqq 0 \iff a\leqq -4,\ 0\leqq a$



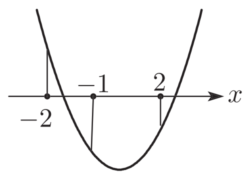
(ii) の場合，グラフより

$f(-2)=a^2-4a\geqq 0 \iff a\leqq 0,\ 4\leqq a$

$f(-1)=a^2-2a-6<0$

$\iff 1-\sqrt{7}<a<1+\sqrt{7}$

$f(2)=a^2+4a<0 \iff -4<a<0$



以上より，求める a の値の範囲は

$1-\sqrt{7}<a<0,\ 0<a<-1+\sqrt{7}$ **(答)**

【4】(1) $a>0$ より，与式の両辺に a^2 をかけて

$$a^{2x+1}-8a^{x+3}-a^x+8a^2<0$$

ここで，$t=a^x$ とすると

$$\begin{aligned}(\text{与式}) \quad &\iff \quad at^2-8a^3t-t+8a^2<0\\ &\iff \quad (at-1)(t-8a^2)<0\\ &\iff \quad 8a^2<t<\frac{1}{a} \quad \left(\because\ 0<a<\frac{1}{2}\text{より } 8a^2<2<\frac{1}{a}\right)\\ &\iff \quad a^{\log_a 8+2}<a^x<a^{-1}\end{aligned}$$

すなわち，求める x の範囲は

$$-1<x<\log_a 8+2 \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 真数条件より

$$0<x<2^k+3^k \quad \cdots ①$$

また，① の下で

$$(\text{与式}) \quad \iff \quad \log_6 x(2^k+3^k-x)>\log_6 6^k$$

であり，$\log_6 x$ は $x\ (>0)$ の単調増加関数であるから

$$\begin{aligned}(\text{与式}) \quad &\iff \quad x(2^k+3^k-x)>6^k\\ &\iff \quad x^2-(2^k+3^k)x+6^k<0\\ &\iff \quad (x-2^k)(x-3^k)<0\end{aligned}$$

以上から，求める x の範囲は

$$\begin{cases} k>0\text{ のとき} \quad 2^k<x<3^k \\ k=0\text{ のとき} \quad \text{なし} \\ k<0\text{ のとき} \quad 3^k<x<2^k \end{cases} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】条件から

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$$

が成り立つ．また

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\&=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

と変形できる．

ここで，条件 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$，$\alpha\geqq 0^\circ$，$\beta\geqq 0^\circ$，$\gamma\geqq 0^\circ$ より

$$\sin\frac{\alpha}{2}\geqq 0,\ \sin\frac{\beta}{2}\geqq 0,\ \sin\frac{\gamma}{2}\geqq 0$$

なので

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\geqq 0\quad\text{すなわち}\quad\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq 1$$

が示された． ［証明終］

なお，等号は 3 つの角の少なくとも 1 つが 0° のとき，成立する．

【6】条件より

$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 　(α は定数，$0<\alpha<\pi$)

$\mathrm{Q}(1,\ 0)$

と固定し，頂点 R の座標を

$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 　$(0<\theta<2\pi,\ \theta \fallingdotseq \alpha)$

とおいても一般性を失わない．

このとき，△PQR の重心 G の座標は

$$\left(\frac{\cos\theta+1+\cos\alpha}{3},\ \frac{\sin\theta+\sin\alpha}{3}\right)$$

であるから

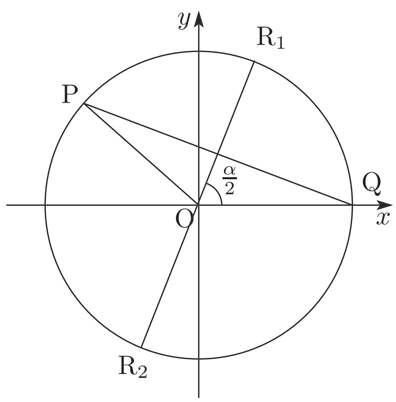
$$\begin{aligned}
9\mathrm{OG}^2 &= (\cos\theta+1+\cos\alpha)^2+(\sin\theta+\sin\alpha)^2\\
&= 2\cos\theta+2(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)+3+2\cos\alpha\\
&= 2\cos\theta+2\cos(\theta-\alpha)+3+2\cos\alpha\\
&= 4\cos\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}+3+2\cos\alpha \quad (\because\ \text{和積公式})
\end{aligned}$$

$0<\alpha<\pi$ より，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから，OG は

$$\begin{cases}
\cos\left(\theta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1 \iff \theta=\dfrac{\alpha}{2} & \text{のとき最大}\\
\cos\left(\theta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=-1 \iff \theta=\pi+\dfrac{\alpha}{2} & \text{のとき最小}
\end{cases}$$

となる．

図 1



したがって，線分 PQ の垂直 2 等分線と C との交点のうち，PQ に関して O と反対側にある点を R_1，O と同じ側にある点を R_2 とすると，OG は

$$\begin{cases}
\text{R が } \mathrm{R}_1 \text{ に一致するとき最大}\\
\text{R が } \mathrm{R}_2 \text{ に一致するとき最小}
\end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

となる．

【7】中辺を展開すると

$$x^3+3yx^2+(3y^2-1)x+y(y^2-1)$$

ここで

$$(\text{中辺})-(\text{左辺})=(3y^2-1)x+y(y^2-1)$$

であり，$y \geqq 1$ より $3y^2-1>0$，$y(y^2-1) \geqq 0$ であるから

$$(\text{中辺})-(\text{左辺})>0$$

が成り立つ x の範囲は

$$x>0 \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$(\text{右辺})-(\text{中辺})=x^2-(3y^2-1)x-y(y^2-1)$$

であり，①の範囲で

$$(\text{右辺})-(\text{中辺})>0$$

が成り立つ x の範囲は

$$x>\frac{3y^2-1+\sqrt{(3y^2-1)^2+4y(y^2-1)}}{2} \qquad (\text{答})$$

添削課題

【1】(1) 放物線 $y=x^2+2(2-a)x+2(1-2a)$ は

$$y=(x+2-a)^2-(2-a)^2+2(1-2a)=\{x-(a-2)\}^2-a^2-2$$

より，頂点が $(a-2,\ -a^2-2)$ である下に凸の放物線である．これを x 軸方向に 2, y 軸方向に -2 だけ平行移動すれば放物線 $y=f(x)$ となるから，放物線 $y=f(x)$ は頂点が $(a,\ -a^2-4)$ で，凹凸の変化はない．よって

$$f(x)=(x-a)^2-a^2-4=x^2-2ax-4$$ **(答)**

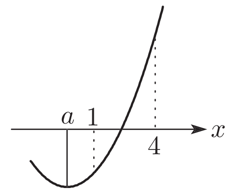
(2) $y=f(x)$ の軸の位置によって場合分けする．

(i) $a<1$ のとき

$$f(1)=-2a-3\leqq 0 \iff a\geqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4)=-8a+12\geqq 0 \iff a\leqq \frac{3}{2}$$

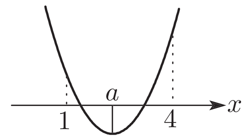
$a<1$ と合わせて　$-\dfrac{3}{2}\leqq a<1$



(ii) $1\leqq a\leqq 4$ のとき　頂点の y 座標は負であるから

$$f(1)=-2a-3\geqq 0 \iff a\leqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4)=-8a+12\geqq 0 \iff a\leqq \frac{3}{2}$$

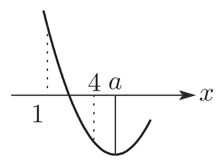


のいずれかが成り立てばよいから，$1\leqq a\leqq 4$ と合わせて　$1\leqq a\leqq \dfrac{3}{2}$

(iii) $4<a$ のとき

$$f(1)=-2a-3\geqq 0 \iff a\leqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4)=-8a+12\leqq 0 \iff a\geqq \frac{3}{2}$$



これを満たす a は存在しない．

以上より，求める a の値の範囲は

$$-\frac{3}{2}\leqq a\leqq \frac{3}{2}$$ **(答)**

２章　場合の数，確率

問題

【1】(1)

$$\frac{8!}{2!\,2!} = 10080 \text{ (通り)}$$　**(答)**

(2) AA，OO をそれぞれひとまとめにして扱い，他の 4 文字との順列を考えればよい．
求める場合の数は
$_6\mathrm{P}_6 = 720$ (通り)　**(答)**

(3) まず AO，OA ともに含まない順列を考える．Y，K，H，M，A，A を先に並べ，その後で A と隣り合わないように 2 個の O を間に入れる．

Y，K，H，M，A，A を先に並べるとき

(i) 2 個の A が隣り合う場合

AA をまとめて 1 文字と扱い，残り 4 文字との順列を考えればよいから，$_5\mathrm{P}_5$ 通り．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \square & & \square & & \square & & \mathrm{A} & & \mathrm{A} & & \square & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & & & \times & & \times & & \times & & \end{array}$$

上の ↑ の×以外の箇所に 2 個の O を入れる場合の数は $_4\mathrm{H}_2$ 通りである．

よって，このときの場合の数は
$_5\mathrm{P}_5 \times {}_4\mathrm{H}_2 = 1200$ (通り)

(ii) 2 個の A が隣り合わない場合

Y，K，H，M，A，A を先に並べる場合の数は $\dfrac{6!}{2!} - {}_5\mathrm{P}_5$ 通り．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \square & & \square & & \mathrm{A} & & \square & & \mathrm{A} & & \square & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \times & & \times & & \times & & \times & & \end{array}$$

上の ↑ の×以外の箇所に 2 個の O を入れる場合の数は $_3\mathrm{H}_2$ 通りである．

よって，このときの場合の数は

$$\left(\frac{6!}{2!} - {}_5\mathrm{P}_5\right) \times {}_3\mathrm{H}_2 = 1440 \text{ (通り)}$$

(i)，(ii) より，AO，OA ともに含まない順列は
$1200 + 1440 = 2640$ (通り)

よって，求める場合の数は，(1) より
$10080 - 2640 = 7440$ (通り)　**(答)**

【2】(1) 赤玉を 2 つ，白玉を 2 つ，黒玉を 1 つ取り出す確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_5}=3\cdot3\cdot2\cdot\frac{3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}=\frac{9}{28}$$

これが円形に「赤白白黒赤」と並ぶのは，黒を固定したときに「白白黒赤赤」と並ぶことである．

その確率は

$$\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

よって，求める確率は

$$\frac{9}{28}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{56}\qquad\text{(答)}$$

(2) 青玉を 1 つ固定する．このとき，玉を並べる全事象は

$${}_{5n-1}\mathrm{C}_{2n}$$

まず $3n$ 個の青玉を並べて，その間に黄玉を入れていく．このうち，黄玉を入れることのできるのは $3n$ ヶ所あるので

$${}_{3n}\mathrm{C}_{2n}$$

が，該当事象の総数である．

よって，求める確率は

$$\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_{2n}}{{}_{5n-1}\mathrm{C}_{2n}}=\frac{(3n)!}{(2n)!\,n!}\cdot\frac{(2n)!\,(3n-1)!}{(5n-1)!}=\frac{(3n)!\,(3n-1)!}{(5n-1)!\,n!}\qquad\text{(答)}$$

【3】(1) 全ての辺の長さが等しいとき，最初に塗る色は，どこに塗っても同じである．その対面の色の塗り方は 5 通り．残りの 4 面は 4 色を並べる円順列と考えて

$(4-1)! = 3! = 6$ (通り)

よって

$5 \times 6 = 30$ (通り)　　(答)

(2) まず，正方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り．残る 4 面の塗り方は (1) と同様に 6 通りであるから

${}_6\mathrm{C}_2 \times 6 = 90$ (通り)　　(答)

(3) まず，面積が $a \times b$ の長方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り．

次に，面積が $b \times c$ の長方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り．

最後に，面積が $c \times a$ の長方形の面の塗り方は 2 通り．

以上から

${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 2 = 180$ (通り)　　(答)

【4】(1) ちょうど n 回で終了する場合は

(A) $n-1$ 回目までに表が $k-1$ 回，裏が $n-k$ 回出て，n 回目に表が出る

(B) $n-1$ 回目までに裏が $k-1$ 回，表が $n-k$ 回出て，n 回目に裏が出る

の場合であり，事象 (A) と事象 (B) は排反であるから，求める確率 p_n は

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\times\frac{1}{2}\times 2 = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}{2^{n-1}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) (1) より，p_n と p_{n+1} の比をとると

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k-1}}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}\\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}\cdot\frac{(n-k)!(k-1)!}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n-k+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} p_{n+1} > p_n \iff \dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \iff n > 2(n-k+1) \iff n < 2k-2 \\ p_{n+1} = p_n \iff \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 \iff n = 2(n-k+1) \iff n = 2k-2 \end{cases}$$

であるから

$$p_k < p_{k+1} < \cdots < p_{2k-2} = p_{2k-1}$$

すなわち，p_n を最大にする n は $2k-2$，$2k-1$．　**(答)**

【5】(1) n 段の階段を題意のように昇る昇り方の数を a_n とする．このとき，1 歩目の段の数で場合を分けると

(i) 1 歩目に 1 段だけ昇るとき，2 歩目以降は題意をみたすように $n-1$ 段昇ることになる．この場合の昇り方は a_{n-1} 通りある．

(ii) 1 歩目に 2 段昇るとき，残りの $n-2$ 段は題意をみたすように昇るので，この場合の昇り方は a_{n-2} 通りある．

(i)，(ii) は互いに排反だから

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqq 3)$

すると，$a_1 = 1$ であり

$a_2 = 2 \quad$ (1 段が 2 回，2 段が 1 回)

なので，a_1，$a_2, \ldots$，a_{15} の値は下表のようになる．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

よって，求める昇り方は 987 通り．　　(答)

(2) (1) と同様に考える．n 段の階段を題意のように昇る昇り方の数を b_n とすると

(i) 1 歩目に 1 段だけ昇るとき，2 歩目以降は題意をみたすように $n-1$ 段昇ることになる．この場合の昇り方は b_{n-1} 通りある．

(ii) 1 歩目に 2 段昇るとき，2 歩目は 1 段しか昇れない．そして，残りの $n-3$ 段は題意をみたすように昇るので，この場合の昇り方は b_{n-3} 通りある．

(i)，(ii) は互いに排反だから

$b_n = b_{n-1} + b_{n-3} \quad (n \geqq 4)$

すると，$b_1 = 1$ であり

$b_2 = 2 \quad$ (1 段が 2 回，2 段が 1 回)

$b_3 = 3 \quad$ (1 段が 3 回，1 段と 2 段，2 段と 1 段)

なので，b_1，$b_2, \ldots$，b_{15} の値は下表のようになる．

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277

よって，求める昇り方は 277 通り．　　(答)

【6】(1) $n=1,\ 2$ のとき

$$p_1=0,\ p_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

であり，$n \geqq 3$ のとき，n 回目に A が 2 個のコインを持っているのは，$n-2$ 回目に A が 2 個のコインを持っていて，$n-1$ 回目に 3 の倍数以外の目が，n 回目に 3 の倍数の目が出る場合に限るから

$$p_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}p_{n-2}=\frac{2}{9}p_{n-2}\quad (n \geqq 3)$$

(i) $n=2m-1$ (m : 正整数) のとき

$$p_n=p_{2m-1}=\left(\frac{2}{9}\right)^{m-1}\cdot p_1=0$$

(ii) $n=2m$ (m : 正整数) のとき

$$p_n=p_{2m}=\left(\frac{2}{9}\right)^{m-1}\cdot p_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

まとめると

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき}\quad p_n=0 \\ n\text{ が偶数のとき}\quad p_n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \end{cases}$$ **(答)**

(2) n 回目に A が勝者となるのは，$n-1$ 回目の A のコインの数が 2 で，かつ n 回目に 3 の倍数の目が出る場合に限る．

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$q_n=\frac{1}{3}p_{n-1}\ \cdots①$$

また，題意より，1 回目の試行で A が勝者となる確率は $q_1=\dfrac{1}{3}$ であるから，$p_0=1$ とすれば，① は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，(1) の結果とあわせて

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき}\quad q_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} \\ n\text{ が偶数のとき}\quad q_n=0 \end{cases}$$ **(答)**

【7】n 回コインを投げ終えた後で A が勝利となるとき，A が n 回目に表を出して終了する．

また，$p(1)=p(3)=0$ である．

(i) B が 0 点で終了するとき

$(n-1)$ 回目までに

裏が偶数回，表が 1 回，裏が偶数回

の順で出るので，$n=2k$ (k は自然数) である．

このとき，1，3，$\cdots$，$(2k-1)$ 回目の k 通りのうちいずれか 1 回で表が出ればよいので，求める確率は

$$k\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^{n+1}}$$

(ii) B が 1 点で終了するとき

A が先に得点する場合，$(n-1)$ 回目までに

裏が偶数回，表が 1 回，裏が奇数回，表が 1 回，裏が奇数回

の順で出るので，$n=2k+1$ である．

このとき，1，3，$\cdots$，$(2k-1)$ 回目の k 通りのうちいずれか 2 回で表が出ればよいので，求める確率は

$${}_k\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

B が先に得点する場合，$(n-1)$ 回目までに

裏が奇数回，表が 1 回，裏が奇数回，表が 1 回，裏が偶数回

の順で出るので，$n=2k+1$ である．

このとき，2，4，$\cdots$，$2k$ 回目の k 通りのうちいずれか 2 回で表が出ればよいので，求める確率は

$${}_k\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，B が 1 点で終了するのは，$n=2k+1$ のときで，その確率は

$$2\cdot{}_k\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$$

これは $n=1$，3 でも正しい．

(i)，(ii) より

$$\begin{cases} p(n)=\dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ p(n)=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(答)

添削課題

【1】1 つのサイコロを n ($n \geqq 1$) 回投げたとき，1 の目が奇数回出る確率は

$$1 - p_n$$

である．

また，p_1 は，サイコロを 1 回振って 1 以外の目が出る確率を考えて

$$p_1 = \frac{5}{6}$$

である．

さて，$n \geqq 2$ のとき，n 回サイコロを投げたときに 1 の目が偶数回出る確率は

(i) $n-1$ 回目までに 1 の目が偶数回出て，n 回目に 1 以外の目が出る．

(ii) $n-1$ 回目までに 1 の目が奇数回出て，n 回目に 1 の目が出る．

のどちらかの場合であり，(i) と (ii) は排反であるから

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} \times \frac{5}{6} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

すなわち

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

である．ここで，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから，$n \geqq 1$ において

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \qquad \text{(答)}$$

3章　整数（1）

問題

【1】以下，正整数 $a,\ b$ の最大公約数を $(a,\ b)$ で表す.

(1) ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned}(2009,\ 1599) &= (410,\ 1599)\\ &= (410,\ 369)\\ &= (41, 369)\\ &= 41\end{aligned}$$

であるから，求める最大公約数は，41.　　**(答)**

(2) ユークリッドの互除法より

$(a_{n+2},\ a_{n+1}) = (a_{n+2} - a_{n+1},\ a_{n+1}) = (a_n,\ a_{n+1})$

であり，この式変形を繰り返し行うことにより，任意の正整数 n について

$(a_{n+2},\ a_{n+1}) = (a_n,\ a_{n+1}) = \cdots = (a_2,\ a_1) = (1,\ 1) = 1$

が成立する．つまり，与えられた数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項はつねに互いに素である．**[証明終]**

【2】(1) $n = 7k + r$ (k : 0 以上の整数，$r : 0 \leqq r \leqq 6$ なる整数) とおける.

$n^3 = (7k + r)^3 = 7(49k^3 + 21k^2r + 3kr^2) + r^3$

$m = 49k^3 + 21k^2r + 3kr^2$ (m : 整数) とおくと, $n^3 = 7m + r^3$ だから, n^3 を 7 で割った余りは r^3 を 7 で割った余り R と等しい.

r	0	1	2	3	4	5	6
R	0	1	1	6	1	6	6

$n \fallingdotseq$ (7 の倍数) のとき, n^3 を 7 で割った余りは

1，6　　**(答)**

(2)

$n^7 - n = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) \quad \cdots (*)$

(i) $n =$ (7 の倍数) のとき

$(*)$ 式 : 7 の倍数

(ii) $n \fallingdotseq$ (7 の倍数) のとき

(1) より, $n^3 = 7m + 1$ または $7m + 6$ (m : 整数)

$n^3 = 7m + 1$ のとき　$n^3 - 1$: 7 の倍数

$n^3 = 7m + 6$ のとき　$n^3 + 1$: 7 の倍数

したがって, $(*)$ 式 : 7 の倍数

(i), (ii) より

$n^7 - n$ は 7 の倍数.　　**[証明終]**

(3) $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1),\ n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$ より

$n^7 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \quad \cdots (*)$

$n - 1,\ n,\ n + 1$ は連続する 3 整数より, その積を因数にもつ $(*)$ は 6 の倍数

6 と 7 は互いに素より

$n^7 - n$ は 6 と 7 の最小公倍数 42 の倍数.　　**[証明終]**

【3】

$$\begin{aligned} n^4+4 &= (n^2+2)^2-4n^2 \\ &= (n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2+2n+2)(n^2-2n+2) \end{aligned}$$

これが素数 p になるとすると，$n^2+2n+2 > n^2-2n+2$ なので，

$$\begin{cases} n^2+2n+2=p \\ n^2-2n+2=1 \end{cases}$$

となるしかない．よって，

$$\begin{aligned} n^2-2n+2=1 \quad &\Longleftrightarrow \quad n^2-2n+1=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad n=1 \end{aligned}$$

このとき，$p=5$ で確かに素数である．

よって，$n=1$ のときに限り素数となり，その値は 5 である．　　**(答)**

【4】(1) 与式の両辺に $ab\ (>0)$ をかけて

$$3b+2a=ab$$

$$ab-2a-3b=0$$

$$(a-3)(b-2)=6$$

$a-3,\ b-2$ は整数で，$a>0,\ b>0$ より $a-3>-3,\ b-2>-2$ であるから

$$(a-3,\ b-2)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

$$\therefore \quad (a,\ b)=(4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3)$$ **(答)**

(2) 題意より，m を正整数として

$$x^2-6x+1=m^2$$

とかける．このとき

$$(x-3)^2-8=m^2$$

$$(x-3)^2-m^2=8$$

$$(x+m-3)(x-m-3)=8$$

x が整数のとき, $x+m-3,\ x-m-3$ は整数で, $m>0$ より, $x+m-3>x-m-3$ であり，かつ，$x+m-3$ と $x-m-3$ の偶奇は一致するから

$$(x+m-3,\ x-m-3)=(4,\ 2),\ (-2,\ -4)$$

$$\therefore \quad (x,\ m)=(6,\ 1),\ (0,\ 1)$$

以上から，求める x の値は

$x=0,\ 6$　　**(答)**

【5】2 桁の自然数を $N=10a+b$（a，b は $1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$ をみたす整数）とおく．

$$
\begin{aligned}
N^3 &= (10a+b)^3 \\
&= 1000a^3+300a^2b+30ab^2+b^3 \\
&= 100(10a^3+3a^2b)+30ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

より，N^3 の下 2 桁の数は $30ab^2+b^3$ の下 2 桁の数と一致する．

ここで，下 2 桁の数が一致するには，1 の位の数が一致することが必要であるから，b^3 の 1 の位の数は b と一致する．よって

$b=0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9$

に限られる．

(i) $b=0$ のとき

$30ab^2+b^3=0$

$10a$ の下 2 桁の数が 0 となるような a は存在しないので，不適．

(ii) $b=1$ のとき

$30ab^2+b^3=30a+1$

$30a+1$ の下 2 桁の数が $10a+1$ となるので，$a=5$

(iii) $b=4$ のとき

$30ab^2+b^3=480a+64$

$480a+64$ の下 2 桁の数は $80a+64$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+4$ となるので，$a=2$

(iv) $b=5$ のとき

$30ab^2+b^3=750a+125$

$750a+125$ の下 2 桁の数は $50a+25$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+5$ となるので，$a=2,\ 7$

(v) $b=6$ のとき

$30ab^2+b^3=1080a+216$

$1080a+216$ の下 2 桁の数は $80a+16$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+6$ となるので，$a=7$

(vi) $b=9$ のとき

$30ab^2+b^3=2430a+729$

$2430a+729$ の下 2 桁の数は $30a+29$ の下 2 桁の数と一致し，それが $10a+9$ となるので，$a=4,\ 9$

以上より，求める自然数は

24，25，49，51，75，76，99　（答）

【6】題意より，整数 m, r を用いて

$a = bm + r \quad (0 \leqq r < b) \cdots ①$

とおける．

a と b の最大公約数を $g_1(\neq 0)$ とおくと

$a = a_0g_1$, $b = b_0g_1$　(但し，a_0 と b_0 は互いに素な整数)

と表せる．これを ① に代入して

$$a_0g_1 = b_0g_1m + r$$

$$\iff \quad r = (a_0 - b_0m)g_1$$

よって，r は g_1 で割り切れる．

ここで，$r_0 = a_0 - b_0m$ とおくと

$r = r_0g_1$

であり

$$a_0g_1 = b_0g_1m + r_0g_1$$

$$\therefore \quad a_0 = b_0m + r_0 \quad (\because g_1 \neq 0) \cdots ②$$

である．さらに，b_0 と r_0 の最大公約数を g_2 とすると

$b_0 = b_1g_2$, $r_0 = r_1g_2$　(但し，b_1 と r_1 は互いに素な整数)

と表せる．これを ② に代入すると

$a_0 = b_1g_2m + r_1g_2 = g_2(b_1m + r_1)$

であり，a_0 は g_2 で割り切れるが，a_0 と b_0 は互いに素であるから

$g_2 = 1$

よって，b_0 と r_0 は互いに素であり，また，$b = b_0g_1$, $r = r_0g_1$ であるから，b と r の最大公約数は a と b の最大公約数 g_1 に等しい．　[証明終]

【7】$y=\sqrt{x}$ のグラフと x 軸および直線 $x=2014$ で囲まれた図形（境界を含む）を D とする．領域 D に含まれる点のうち，x 座標が整数で，y 座標が 1 以上の整数である点の個数を求めればよい．

このような点のうち，$y=l$ であるものの個数は，x 座標が l^2 から 2014 までの

$$2014-(l^2-1)=2015-l^2$$

個である．

$44<\sqrt{2014}<45$ であるから，求める点の個数は $2015-l^2$ において l を 1 から 44 まで変化させて加えたもの，すなわち

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{44}(2015-l^2)&=2015\cdot 44-\frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 89\\&=88660-29370\\&=59290\end{aligned}$$

したがって，求める和は

59290　　(答)

【8】(1) (iii) に $n=99$ を代入して

$$f(99)+f(99+g(99))=f(100)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(99)&=f(100)-f(99+g(99))\\&=f(100)-f(100)=0\quad(\because\ g(99)=1)\end{aligned}$$

よって，$f(99)=0$.　　(答)

(2) $f(n)\geqq 0$, $g(n)\geqq 0$ と (iii) より

$$f(n+1)-f(n)=f(n+g(n))\geqq 0$$

であるから

$$f(n+1)\geqq f(n)\ \cdots\cdots(\sharp)$$

また，(iii) に $n=100$ を代入して

$$f(100)+f(100+g(100))=f(101)$$

$$\therefore\quad 1+f(100)=f(101)$$

$$\therefore\quad f(101)=2$$

(iii) に $n=101$ を代入して

$$f(101)+f(101+g(101))=f(102)$$

$$\therefore\quad 2+f(101+g(101))=f(102)\ \cdots\cdots(\flat)$$

ここで，$g(101)\geqq 1$ とすると

$$101+g(101)\geqq 102$$

であり，($\sharp$) より

$$f(102)-f(101+g(101))\leqq 0$$

となるが，これは

$$(\flat)\quad\Longleftrightarrow\quad 2=f(102)-f(101+g(101))$$

に反する．

よって，$g(101)=0$.　　(答)

(3) (2) と同様にして，帰納的に

$$g(n) = 0 \quad (n = 100,\ 101, \ldots)$$

がいえる．よって，$n \geqq 100$ において

$$f(n) + f(n) = f(n+1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(n+1) = 2f(n)$$

であるから

$$f(2010) = 2f(2009) = 2^2 f(2008) = \cdots = 2^{1910} f(100)$$
$$= 2^{1910} \ (\because f(100) = 1) \qquad \textbf{(答)}$$

添削課題

【1】与式を因数分解すると

$$n^9 - n^3 = n^3(n^6 - 1) = (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1)$$

となる．ここで，n を 3 で割った余りで分けて考えると，

(i) $n = 3k$ (k は整数) のとき

$$n^3 = 27k^3 = 9 \cdot 3k^3$$

より，$n^9 - n^3$ は 9 の倍数である．

(ii) $n = 3k + 1$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} n^3 - 1 &= (3k + 1)^3 - 1 \\ &= 27k^3 + 27k^2 + 9k \\ &= 9(3k^3 + 3k^2 + k) \end{aligned}$$

より，$n^9 - n^3$ は 9 の倍数である．

(iii) $n = 3k - 1$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 1 &= (3k - 1)^3 + 1 \\ &= 27k^3 - 27k^2 + 9k \\ &= 9(3k^3 - 3k^2 + k) \end{aligned}$$

より，$n^9 - n^3$ は 9 の倍数である．

以上より，任意の整数 n に対して $n^9 - n^3$ は 9 で割り切れる．　[証明終]

M3JSB/M3JB/M3TB

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	