M3MB

本科 0 期 1 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学ⅠＡⅡＢ

難関大理系数学Ｍ

難関大文系数学Ｍ

問題

【1】$y=f(x)$ の軸は $x=1$ である．

軸の範囲	$1 \leqq a$	$a<1\leqq a+1$	$a+1<1\leqq a+2$	$a+2<1$
a の範囲	$1 \leqq a$	$0 \leqq a < 1$	$-1 \leqq a < 0$	$a < -1$
$M(a)$	$f(a+2)$	$f(a+2)$	$f(a)$	$f(a)$
$m(a)$	$f(a)$	$f(1)$	$f(1)$	$f(a+2)$

ここで

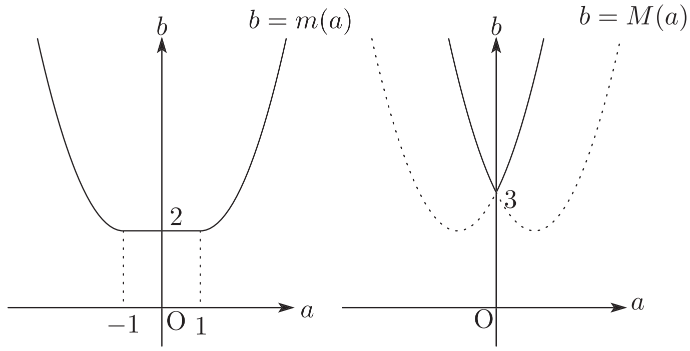
$$\begin{cases} f(a+2)=(a+2)^2-2(a+2)+3=a^2+2a+3 \\ f(a)=a^2-2a+3 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

よって

$$M(a)=\begin{cases} a^2+2a+3 & (0\leqq a) \\ a^2-2a+3 & (a<0) \end{cases}$$

$$m(a)=\begin{cases} a^2-2a+3 & (1\leqq a) \\ 2 & (-1\leqq a<1) \\ a^2+2a+3 & (a<-1) \end{cases}$$

となり，求めるグラフは以下のようになる．　　　**(答)**



【2】 $f(x)=|(x-a)^2-1|$ とおくと

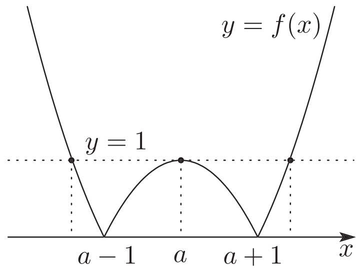
$(x-a)^2 \geqq 1 \iff x \leqq a-1,\ a+1 \leqq x$

$(x-a)^2 < 1 \iff a-1 < x < a+1$

なので，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる．そこで，いま

$f(x)=1 \quad (x \leqq a-1,\ a+1 \leqq x)$

となる x を求める．



この範囲で $f(x)=(x-a)^2-1$ だから

$(x-a)^2-1=1 \qquad \therefore \quad x=a\pm\sqrt{2}$

したがって，2 つの集合 A，B を

$A=\{x\,|\,0 \leqq x \leqq 2\}, \quad B=\{x\,|\,a-\sqrt{2} \leqq x \leqq a+\sqrt{2}\}$

と定めるとき

$A \subset B$

でなければならないから

$a-\sqrt{2} \leqq 0$ かつ $2 \leqq a+\sqrt{2}$

より

$2-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$

そして，この範囲の a は

$0 \leqq a \leqq 2$

をみたすから，点 $(a,\ 1)$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲に含まれ，$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値は確かに 1 となる．したがって，求める a の値の範囲は

$2-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ **(答)**

【3】(1) $f(x)=2x^2+2ax+a^2-8=2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{2}-8$ より

頂点の座標は $\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{2}-8\right)$

また，グラフは下に凸であるから，x 軸と異なる 2 点で交わるとき

$\dfrac{a^2}{2}-8<0 \iff a^2<16 \iff -4<a<4$ **(答)**

(2) $-4<a<4$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる．また，グラフの軸 $x=-\dfrac{a}{2}$ について

$-3<-2<-\dfrac{a}{2}<2<3$

が成り立つ．さらに

$f(-3)=a^2-6a+10=(a-3)^2+1>0$

$f(3)=a^2+6a+10=(a+3)^2+1>0$

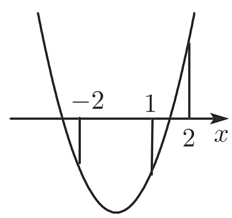
であるから，方程式 $f(x)=0$ の解は 2 つとも -3 と 3 の間にある． ［証明終］

(3) 不等式 $f(x)<0$ が解をもつためには，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わらなければならないので，$-4<a<4$ のときを考えればよい．このとき，(2) より，$f(x)=0$ の 2 解は -3 と 3 の間にあるので，不等式 $f(x)<0$ の解がちょうど 4 つの整数を含むとき，その整数は

(i) $-2,\ -1,\ 0,\ 1$，(ii) $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

のいずれかである．

(i) の場合，グラフより



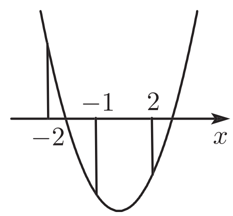
$f(-2)=a^2-4a<0 \iff 0<a<4$

$f(1)=a^2+2a-6<0$

$\iff -1-\sqrt{7}<a<-1+\sqrt{7}$

$f(2)=a^2+4a \geqq 0 \iff a \leqq -4,\ 0 \leqq a$

(ii) の場合，グラフより



$f(-2)=a^2-4a \geqq 0 \iff a \leqq 0,\ 4 \leqq a$

$f(-1)=a^2-2a-6<0$

$\iff 1-\sqrt{7}<a<1+\sqrt{7}$

$f(2)=a^2+4a<0 \iff -4<a<0$

以上より，求める a の値の範囲は

$1-\sqrt{7}<a<0,\ 0<a<-1+\sqrt{7}$ **(答)**

【4】(1) 放物線 $y=x^2+2(2-a)x+2(1-2a)$ は

$$y=(x+2-a)^2-(2-a)^2+2(1-2a)=\{x-(a-2)\}^2-a^2-2$$

より，頂点が $(a-2,\ -a^2-2)$ である下に凸の放物線である．これを x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動すれば放物線 $y=f(x)$ となるから，放物線 $y=f(x)$ は頂点が $(a,\ -a^2-4)$ で，凹凸の変化はない．よって

$$f(x)=(x-a)^2-a^2-4=x^2-2ax-4$$ **(答)**

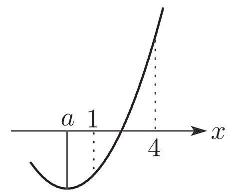
(2) $y=f(x)$ の軸の位置によって場合分けする．

(i) $a<1$ のとき

$$f(1)=-2a-3\leqq 0 \iff a\geqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4)=-8a+12\geqq 0 \iff a\leqq \frac{3}{2}$$

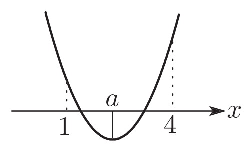
$a<1$ と合わせて　$-\dfrac{3}{2}\leqq a<1$



(ii) $1\leqq a\leqq 4$ のとき　頂点の y 座標は負であるから

$$f(1)=-2a-3\geqq 0 \iff a\leqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4)=-8a+12\geqq 0 \iff a\leqq \frac{3}{2}$$

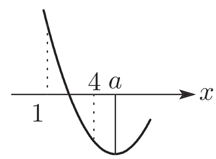


のいずれかが成り立てばよいから，$1\leqq a\leqq 4$ と合わせて　$1\leqq a\leqq \dfrac{3}{2}$

(iii) $4<a$ のとき

$$f(1)=-2a-3\geqq 0 \iff a\leqq -\frac{3}{2}$$

$$f(4)=-8a+12\leqq 0 \iff a\geqq \frac{3}{2}$$



これを満たす a は存在しない．

以上より，求める a の値の範囲は

$$-\frac{3}{2}\leqq a\leqq \frac{3}{2}$$ **(答)**

２章　場合の数，確率

問題

【1】(1)

$$\frac{8!}{2!\,2!} = 10080\ (\text{通り}) \qquad \textbf{(答)}$$

(2) AA，OO をそれぞれひとまとめにして扱い，他の 4 文字との順列を考えればよい．
求める場合の数は
$_6P_6 = 720$ (通り)　**(答)**

(3) まず AO，OA ともに含まない順列を考える．Y，K，H，M，A，A を先に並べ，その後で A と隣り合わないように 2 個の O を間に入れる．

Y，K，H，M，A，A を先に並べるとき

(i) 2 個の A が隣り合う場合

AA をまとめて 1 文字と扱い，残り 4 文字との順列を考えればよいから，$_5P_5$ 通り．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \square & & \square & & \square & & \mathrm{A} & & \mathrm{A} & & \square & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & & & \times & & \times & & \times & & \end{array}$$

上の ↑ の×以外の箇所に 2 個の O を入れる場合の数は $_4H_2$ 通りである．

よって，このときの場合の数は
$_5P_5 \times {}_4H_2 = 1200$ (通り)

(ii) 2 個の A が隣り合わない場合

Y，K，H，M，A，A を先に並べる場合の数は $\dfrac{6!}{2!} - {}_5P_5$ 通り．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \square & & \square & & \mathrm{A} & & \square & & \mathrm{A} & & \square & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \times & & \times & & \times & & \times & & \end{array}$$

上の ↑ の×以外の箇所に 2 個の O を入れる場合の数は $_3H_2$ 通りである．

よって，このときの場合の数は

$$\left(\frac{6!}{2!} - {}_5P_5\right) \times {}_3H_2 = 1440\ (\text{通り})$$

(i)，(ii) より，AO，OA ともに含まない順列は
$1200 + 1440 = 2640$ (通り)

よって，求める場合の数は，(1) より
$10080 - 2640 = 7440$ (通り)　**(答)**

【2】(1) 赤玉を 2 つ，白玉を 2 つ，黒玉を 1 つ取り出す確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_5}=3\cdot3\cdot2\cdot\frac{3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}=\frac{9}{28}$$

これが円形に「赤白白黒赤」と並ぶのは，黒を固定したときに「白白黒赤赤」と並ぶことである．

その確率は

$$\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

よって，求める確率は

$$\frac{9}{28}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{56}\qquad\text{(答)}$$

(2) 白玉を 1 つ固定する．このとき，玉を並べる全事象は

$${}_{3n-1}\mathrm{C}_n$$

ここにまず $(2n-1)$ 個の白玉を並べて，その間に赤玉を入れていく．このうち，赤玉を入れることのできるのは $2n$ ヶ所あるので

$${}_{2n}\mathrm{C}_n$$

が，該当事象の総数である．

よって，求める確率は

$$\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{{}_{3n-1}\mathrm{C}_n}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot\frac{(2n-1)!\,n!}{(3n-1)!}=\frac{(2n)!\,(2n-1)!}{(3n-1)!\,n!}\qquad\text{(答)}$$

【3】（1）全ての辺の長さが等しいとき，最初に塗る色は，どこに塗っても同じである．その対面の色の塗り方は 5 通り．残りの 4 面は 4 色を並べる円順列と考えて

$(4-1)! = 3! = 6$ (通り)

よって

$5 \times 6 = 30$ (通り)　**(答)**

（2）まず，正方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り．残る 4 面の塗り方は (1) と同様に 6 通りであるから

${}_6\mathrm{C}_2 \times 6 = 90$ (通り)　**(答)**

（3）まず，面積が $a \times b$ の長方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り．
次に，面積が $b \times c$ の長方形の面を塗るとすると，その塗り方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り．
最後に，面積が $c \times a$ の長方形の面の塗り方は 2 通り．
以上から

${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 2 = 180$ (通り)　**(答)**

【4】(1) ちょうど n 回で終了する場合は

(A) $n-1$ 回目までに表が $k-1$ 回，裏が $n-k$ 回出て，n 回目に表が出る
(B) $n-1$ 回目までに裏が $k-1$ 回，表が $n-k$ 回出て，n 回目に裏が出る

の場合であり，事象 (A) と事象 (B) は排反であるから，求める確率 p_n は

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}{2^{n-1}}$$　**(答)**

(2) (1) より，p_n と p_{n+1} の比をとると

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{{}_n\mathrm{C}_{k-1}}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}} \\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \cdot \frac{(n-k)!(k-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n-k+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} p_{n+1} > p_n \iff \dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \iff n > 2(n-k+1) \iff n < 2k-2 \\ p_{n+1} = p_n \iff \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 \iff n = 2(n-k+1) \iff n = 2k-2 \end{cases}$$

であるから

$p_k < p_{k+1} < \cdots < p_{2k-2} = p_{2k-1}$

すなわち，p_n を最大にする n は $2k-2$, $2k-1$.　**(答)**

添削課題

【1】1 つのサイコロを n $(n \geqq 1)$ 回投げたとき，1 の目が奇数回出る確率は

$$1 - p_n$$

である．

また，p_1 は，サイコロを 1 回振って 1 以外の目が出る確率を考えて

$$p_1 = \frac{5}{6}$$

である．

さて，$n \geqq 2$ のとき，n 回サイコロを投げたときに 1 の目が偶数回出る確率は

(i) $(n-1)$ 回目までに 1 の目が偶数回出て，n 回目に 1 以外の目が出る．

(ii) $(n-1)$ 回目までに 1 の目が奇数回出て，n 回目に 1 の目が出る．

のどちらかの場合であり，(i) と (ii) は排反であるから

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} \times \frac{5}{6} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

すなわち

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

である．ここで，数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから，$n \geqq 1$ において

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】以下，正整数 $a,\ b$ の最大公約数を $(a,\ b)$ で表す．

(1) ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned}(2009,\ 1599) &= (410,\ 1599)\\ &= (410,\ 369)\\ &= (41, 369)\\ &= 41\end{aligned}$$

であるから，求める最大公約数は，41.　　**(答)**

(2) ユークリッドの互除法より

$$(a_{n+2},\ a_{n+1}) = (a_{n+2} - a_{n+1},\ a_{n+1}) = (a_n,\ a_{n+1})$$

であり，この式変形を繰り返し行うことにより，任意の正整数 n について

$$(a_{n+2},\ a_{n+1}) = (a_n,\ a_{n+1}) = \cdots = (a_2,\ a_1) = (1,\ 1) = 1$$

が成立する．つまり，与えられた数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項はつねに互いに素である．［証明終］

【2】(1) $n = 7k + r$ (k : 0 以上の整数, $0 \leqq r \leqq 6$ なる整数) とおける．

$$n^3 = (7k + r)^3 = 7(49k^3 + 21k^2r + 3kr^2) + r^3$$

$m = 49k^3 + 21k^2r + 3kr^2$ (m : 整数) とおくと, $n^3 = 7m + r^3$ だから, n^3 を 7 で割った余りは r^3 を 7 で割った余り R と等しい.

r	0	1	2	3	4	5	6
R	0	1	1	6	1	6	6

$n \fallingdotseq$ (7 の倍数) のとき, n^3 を 7 で割った余りは

1, 6　　**(答)**

(2)

$$n^7 - n = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) \quad \cdots (*)$$

(i) $n =$ (7 の倍数) のとき

$(*)$ 式 : 7 の倍数

(ii) $n \fallingdotseq$ (7 の倍数) のとき

(1) より, $n^3 = 7m + 1$ または $7m + 6$ (m : 整数)

$n^3 = 7m + 1$ のとき　$n^3 - 1$: 7 の倍数

$n^3 = 7m + 6$ のとき　$n^3 + 1$: 7 の倍数

したがって, $(*)$ 式 : 7 の倍数

(i), (ii) より

$n^7 - n$ は 7 の倍数.　　［証明終］

(3) $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1),\ n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$ より

$$n^7-n=(n-1)n(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1) \quad \cdots (*)$$

$n-1,\ n,\ n+1$ は連続する 3 整数より, その積を因数にもつ $(*)$ は 6 の倍数.

6 と 7 は互いに素より

n^7-n は 6 と 7 の最小公倍数 42 の倍数.　　[証明終]

【3】

$$\begin{aligned} n^4+4 &= (n^2+2)^2-4n^2 \\ &= (n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2+2n+2)(n^2-2n+2) \end{aligned}$$

これが素数 p になるとすると，$n^2+2n+2>n^2-2n+2$ なので，

$$\begin{cases} n^2+2n+2=p \\ n^2-2n+2=1 \end{cases}$$

となるしかない．よって，

$$\begin{aligned} n^2-2n+2=1 \quad &\Longleftrightarrow \quad n^2-2n+1=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad n=1 \end{aligned}$$

このとき，$p=5$ で確かに素数である．

よって，$n=1$ のときに限り素数となり，その値は 5 である．　　**(答)**

【4】(1) 与式の両辺に $ab\ (>0)$ をかけて

$$3b+2a=ab$$

$$ab-2a-3b=0$$

$$(a-3)(b-2)=6$$

$a-3,\ b-2$ は整数で，$a>0,\ b>0$ より $a-3>-3,\ b-2>-2$ であるから

$$(a-3,\ b-2)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

$$\therefore \quad (a,\ b)=(4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3) \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 題意より，m を正整数として

$$x^2-6x+1=m^2$$

とかける．このとき

$$(x-3)^2-8=m^2$$

$$(x-3)^2-m^2=8$$

$$(x+m-3)(x-m-3)=8$$

x が整数のとき, $x+m-3,\ x-m-3$ は整数で, $m>0$ より, $x+m-3>x-m-3$ であり，かつ，$x+m-3$ と $x-m-3$ の偶奇は一致するから

$$(x+m-3,\ x-m-3)=(4,\ 2),\ (-2,\ -4)$$

$$\therefore \quad (x,\ m)=(6,\ 1),\ (0,\ 1)$$

以上から，求める x の値は

$x=0,\ 6$　　**(答)**

【5】以下，2 つの整数 m, n を 3 で割った余りが等しいことを $m \equiv n$ で表すと，

n, k, r を整数として，$n = 3k + r$ であるとき

$$n^3 = (3k + r)^3 = 3(9k^3 + 9k^2r + 3kr^2) + r^3$$

より

$$n^3 \equiv r^3$$

であり，同様に

$$n^2 \equiv r^2$$

である．

ここで，α を整数として，

(i) $\alpha \equiv 0$ のとき

$$f(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \equiv d = f(0)$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \fallingdotseq 0$ である．

(ii) $\alpha \equiv 1$ のとき

$$f(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \equiv a + b + c + d = f(1)$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \fallingdotseq 0$ である．

(iii) $\alpha \equiv -1$ のとき

$$f(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \equiv -a + b - c + d = f(-1)$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \fallingdotseq 0$ である．

以上から，任意の整数 α に対して $f(\alpha) \fallingdotseq 0$．すなわち，方程式 $f(x) = 0$ は整数解をもたない．［証明終］

M3MB

難関大数学ⅠＡⅡＢ

難関大理系数学Ｍ

難関大文系数学Ｍ

Z-KAI

会員番号	

氏　名	