P3J

本科 0 期 1 月度

解答

Z会東大進学教室

東大物理

1章　運動の決定方法（1）：一般論

問題

■演習

【1】

《解答》

初期条件は $x(0)=x_0$，$v(0)=\dot{x}(0)=v_0$ で共通である.

(1) (a) 運動方程式 $m\ddot{x}=F$ より，

$$\ddot{x}=\frac{F}{m}=\alpha(一定)$$

初期条件を満たす解は，

$$\begin{cases} v(t)=v_0+\alpha t \\ x(t)=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

(2) (a) 運動方程式 $m\ddot{x}=-f$ より，

$$\ddot{x}=-\frac{f}{m}=-\beta(一定)$$

初期条件を満たす解は，

$$\begin{cases} v(t)=v_0-\beta t \\ x(t)=x_0+v_0t-\dfrac{1}{2}\beta t^2 \end{cases}$$

(b) $v(t_1)=0$ より，

$$v(t_1)=v_0-\beta t_1=0 \qquad \therefore \quad t_1=\frac{v_0}{\beta}$$

このときの位置は，

$$x_1=x_0+v_0\cdot\frac{v_0}{\beta}-\frac{1}{2}\beta\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2=x_0+\frac{{v_0}^2}{2\beta}$$

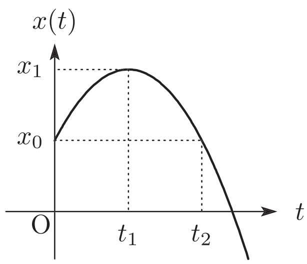
(c) $x(t_2)=x_0$ より，

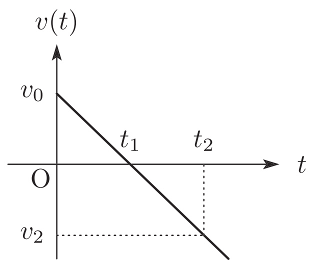
$$x_0+v_0t_2-\frac{\beta}{2}{t_2}^2=x_0 \qquad \therefore \quad t_2=\frac{2v_0}{\beta}$$

このときの速度は，

$$v_2=v_0-\beta\cdot\frac{2v_0}{\beta}=-v_0$$

(d)





(3) (a) 運動方程式 $m\ddot{x} = -kt$ より

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}t = -\gamma t$$

初期条件を満たす解は，

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - \dfrac{\gamma}{2}t^2 \\ x(t) = x_0 + v_0 t - \dfrac{\gamma}{6}t^3 \end{cases}$$

(b) $v(t_1) = 0$ より，

$$v_0 - \frac{\gamma}{2}{t_1}^2 = 0 \qquad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}}$$

このときの位置は，

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + v_0 \cdot \sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}} - \frac{\gamma}{6}\left(\sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}}\right)^3 \\ &= x_0 + \frac{2}{3}v_0\sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}} \end{aligned}$$

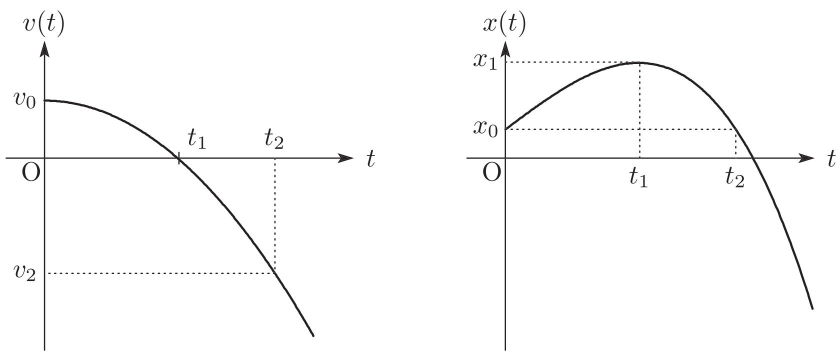
(c) $x(t_2) = x_0$ より，

$$x_0 + v_0 t_2 - \frac{\gamma}{6}{t_2}^3 = x_0 \qquad \therefore \quad t_2 = \sqrt{\frac{6v_0}{\gamma}}$$

このときの速度は，

$$v_2 = v_0 - \frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{\frac{6v_0}{\gamma}}\right)^2 = -2v_0$$

(d)

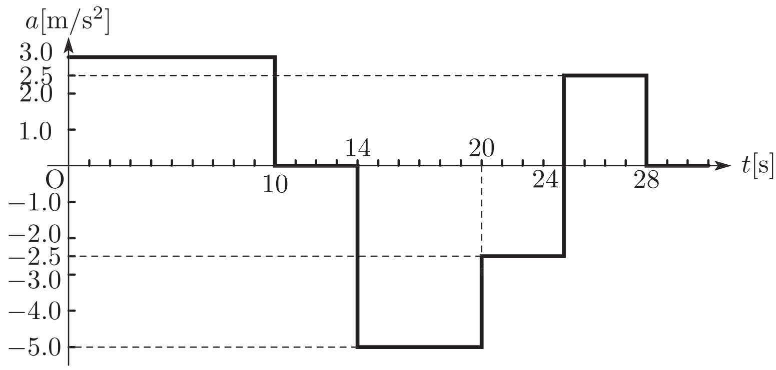


(4) 求めた解で，t が $t - t_0$ に置き換わる．

【2】

《解答》

(1) 各時間帯に分けて v–t グラフの傾きを求め，これらをグラフにまとめると下図のようになる．



(2) v–t グラフと t 軸で囲まれる面積が変位に対応するから，

$$x(10\mathrm{s}) - x(0\mathrm{s}) = \int_{0\mathrm{s}}^{10\mathrm{s}} v\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times 10\mathrm{s} \times 30\mathrm{m/s} = 1.5 \times 10^2\mathrm{m}$$

(3) (2) と同様に，面積を計算して，この間の変位は，

$$x(14\mathrm{s}) - x(10\mathrm{s}) = \int_{10\mathrm{s}}^{14\mathrm{s}} v\mathrm{d}t = 30\mathrm{m/s} \times 4\mathrm{s} = 1.2 \times 10^2\mathrm{m}$$

(4) (2)，(3) と同様に，

$$x(20\mathrm{s}) - x(0\mathrm{s}) = \int_{0\mathrm{s}}^{20\mathrm{s}} v\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(4\mathrm{s} + 20\mathrm{s}) \times 30\mathrm{m/s} = 3.6 \times 10^2\mathrm{m}$$

(5) 移動の向きを含めた変位は，

$$x(28\mathrm{s}) - x(20\mathrm{s}) = \int_{20\mathrm{s}}^{28\mathrm{s}} v\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times 8\mathrm{s} \times (-10\mathrm{m/s}) = -4.0 \times 10\mathrm{m}$$

走った距離は変位の大きさなので，

$$|-4.0 \times 10\mathrm{m}| = 4.0 \times 10\mathrm{m}$$

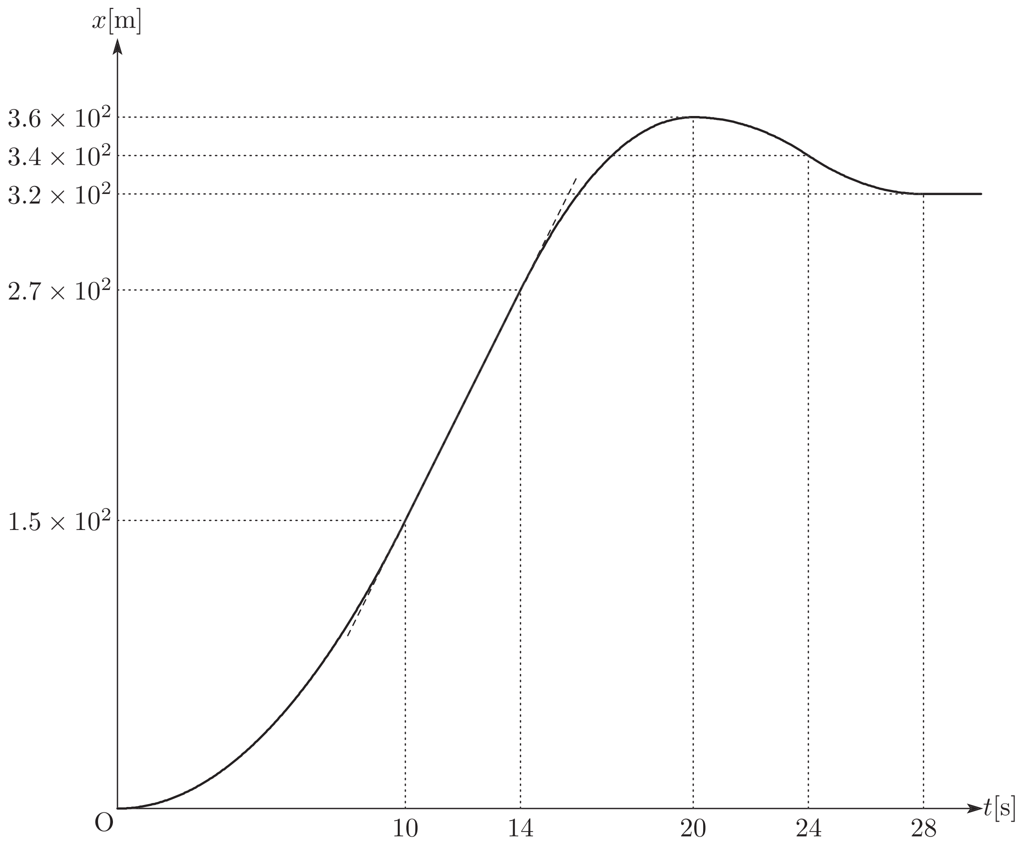
(6) (4)，(5) より，

$$\int_{0\mathrm{s}}^{20\mathrm{s}} v\mathrm{d}t + \left|\int_{20\mathrm{s}}^{28\mathrm{s}} v\mathrm{d}t\right| = 4.0 \times 10^2\mathrm{m}$$

(7) $x(0\mathrm{s}) = 0$ なので，

$$x(28\mathrm{s}) = \int_{0\mathrm{s}}^{28\mathrm{s}} v\mathrm{d}t = 3.2 \times 10^2\mathrm{m}$$

(8) $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の値が不連続である時刻はないので，x–t グラフが折れ曲がる時刻はない．よって，x–t グラフは下図のようになる．



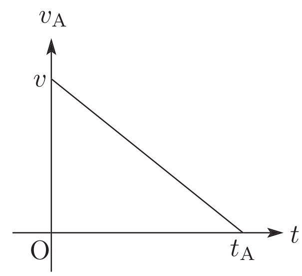
【3】

《解答》

(1) 右向きを正として，加速度を a_{A} とすると，減速中の運動方程式は，

$$ma_{\mathrm{A}} = -f \qquad \therefore \quad a_{\mathrm{A}} = -\frac{f}{m}$$

A の速度を v_{A}，静止するまでの時間を t_{A} とすると，$v_{\mathrm{A}} - t$ グラフは右図のようになるので，



$$-\frac{f}{m}t_{\mathrm{A}} + v = 0 \qquad \therefore \quad t_{\mathrm{A}} = \frac{mv}{f}$$

この間の移動距離を L_{A} とすると，

$$L_{\mathrm{A}} = \int_0^{t_{\mathrm{A}}} v_{\mathrm{A}}\mathrm{d}t = \frac{mv^2}{2f}$$

(2) (1) の加速度 a_{A} を t で積分していき，$t = 0$ における速度と位置を考慮すると，

$$x_{\mathrm{A}} = -\frac{f}{2m}t^2 + vt + l$$

質点 B の加速度を a_{B} とすると，運動方程式は，

$$Ma_{\mathrm{B}} = -F \qquad \therefore \quad a_{\mathrm{B}} = -\frac{F}{M}$$

t で積分していき，$t = 0$ における速度と位置を考慮すると，

$$x_{\mathrm{B}} = -\frac{F}{2M}t^2 + vt + 0$$

(3) (1) と同様に B が静止するまでの時間 t_{B} を求めると，$t_{\mathrm{B}} = \dfrac{Mv}{F}$ となる．A が B より先に静止するための条件は $t_{\mathrm{A}} < t_{\mathrm{B}}$ なので，

$$\frac{mv}{f} < \frac{Mv}{F} \qquad \therefore \quad F < \frac{M}{m}f$$

また，(1) をふまえると，A が静止する位置は，

$$x_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}}) = l + L_{\mathrm{A}} = l + \frac{mv^2}{2f}$$

同様に，B が静止する位置を求めると，

$$x_{\mathrm{B}}(t_{\mathrm{B}}) = 0 + L_{\mathrm{B}} = \frac{Mv^2}{2F}$$

B が A に衝突しないための条件は $x_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}}) > x_{\mathrm{B}}(t_{\mathrm{B}})$ なので，

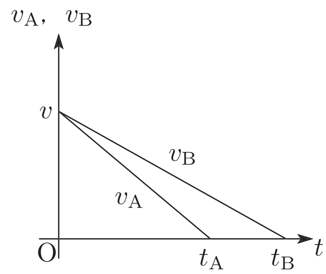
$$l + \frac{mv^2}{2f} > \frac{Mv^2}{2F} \qquad \therefore \quad F > \frac{Mv^2}{2fl + mv^2}f$$

以上より，F が満たすべき条件は，

$$\frac{Mv^2}{2fl + mv^2}f < F < \frac{M}{m}f$$

(4) A の速度 v_A，B の速度 v_B は，それぞれ右図のように変化するので，$t_\mathrm{A} = \dfrac{mv}{f}$ だけ時間が経過したときに $v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}$ が最大となり，その大きさは，

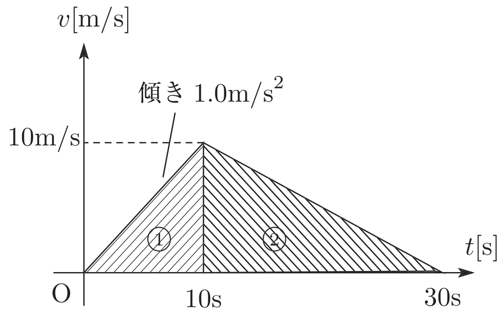
$$\begin{aligned} v_\mathrm{B}(t_\mathrm{A}) - 0 &= \left(-\frac{F}{M}t_\mathrm{A} + v\right) - 0 \\ &= \left(1 - \frac{mF}{Mf}\right)v \end{aligned}$$



【4】

《解答》

(1) 問題文より，C_1 について，v–t グラフは右図.



(2) (1) のグラフより，$t = 10\mathrm{s}$ での速度は，

$$10\mathrm{m/s}$$

A 地点からの変位は，グラフの三角形 ① の面積から，

$$50\mathrm{m}$$

(3) グラフの ① + ② 部分の面積より，

$$50\mathrm{m} + \frac{1}{2} \times 10 \times 20\mathrm{m} = 150\mathrm{m}$$

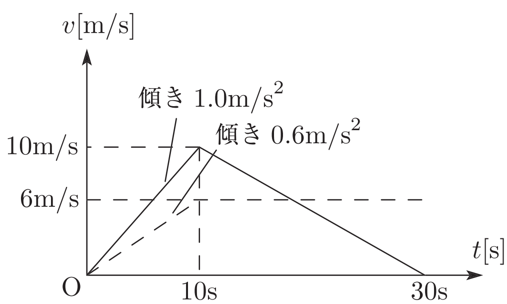
(4) C_1 の A 地点からの距離 $x(t)$ は，$10\mathrm{s} \leqq t < 30\mathrm{s}$ において，

$$\begin{aligned} x(t) &= 50 + \frac{1}{2}[10 + 10 - 0.5(t - 10)] \times (t - 10)[\mathrm{m}] \\ &= 50 + \frac{1}{4}(50 - t)(t - 10)[\mathrm{m}] \end{aligned}$$

$t \geqq 30\mathrm{s}$ では，C_1 は停車したままであるから，

$$x(t) = 150\mathrm{m}$$

(5) (1) のグラフに書き加えると下図.



(6) C_2 の A 地点からの距離 $x_2(t)$ は，$t \geqq 10\mathrm{s}$ において，

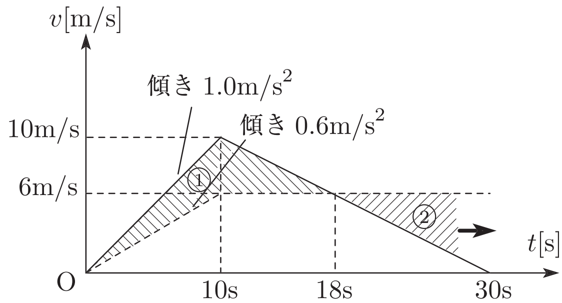
$$x_2(t) = 30 + 6(t - 10)[\mathrm{m}]$$

$x = x_2$ となる時刻 t は，

$$t = 30\mathrm{s}$$

《解説》

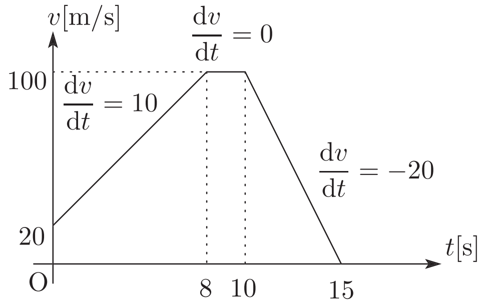
グラフで，$t = 18\mathrm{s}$ を境に速度が逆転する．①部分がその時間までの C_1 のリード分．②の面積が①の面積に一致したとき，C_2 は C_1 に追いつく．



添削課題

《解答》

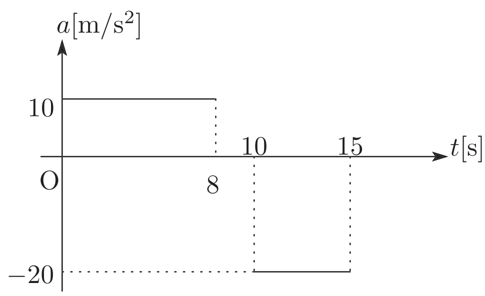
(1)



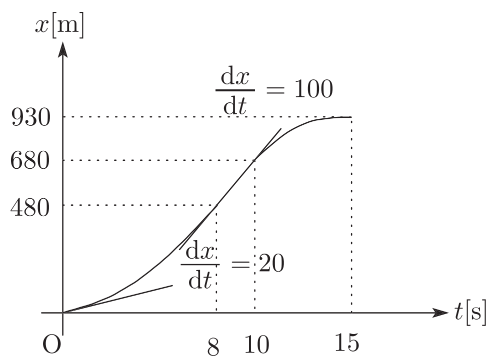
(2) (1) のグラフより，

$$\begin{cases} 0[\mathrm{s}] < t < 8[\mathrm{s}] \text{ のとき } \cdots\ v = 10t+20 \\ 8[\mathrm{s}] < t < 10[\mathrm{s}] \text{ のとき } \cdots\ v = 100 \\ 10[\mathrm{s}] < t < 15[\mathrm{s}] \text{ のとき } \cdots\ v = -20(t-15) \end{cases}$$

(3)



(4)



(5) 時刻 0[s] から t[s] まで，(1) のグラフと t 軸の間の面積を求めることにより，

$$\begin{cases} 0[\mathrm{s}] < t < 8[\mathrm{s}] \text{ のとき } \cdots\ x = 5t^2+20t \\ 8[\mathrm{s}] < t < 10[\mathrm{s}] \text{ のとき } \cdots\ x = 100(t-8)+480 \\ 10[\mathrm{s}] < t < 15[\mathrm{s}] \text{ のとき } \cdots\ x = -10(t-15)^2+930 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{配点}}$

(1)，(3) 各 15 点

(2)，(4) 各 20 点

(5)30 点

2章　運動の決定方法（2）：放物運動

問題

■演習

【1】

《解答》

I (1) 初速度を与えた後の運動方程式は,

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

(2) (1) の結果を t で積分して，初速度を考慮すると,

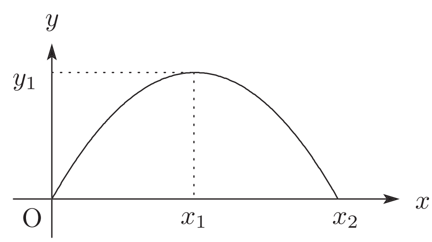
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = -gt + v_0 \sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の結果を t で積分して，初期座標を考慮すると,

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t + 0 \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \cdot t + 0 \end{cases}$$

(4) (3) より，t を消去すると,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0\sin\theta \cdot \frac{x}{v_0\cos\theta} \\ &= -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta \cdot x \end{aligned}$$



(5) (3) の y を平方完成すると,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{g}{2}\left(t^2 - \frac{2v_0\sin\theta}{g}t\right) \\ &= -\frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2 + \frac{g}{2}\cdot\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2 \end{aligned}$$

$t = \dfrac{v_0\sin\theta}{g}$ のとき，y は最大になる．このときの x 座標と y 座標は,

$$\begin{cases} x_1 = v_0\cos\theta \cdot \dfrac{v_0\sin\theta}{g} = \dfrac{{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g} \\ y_1 = \dfrac{g}{2}\cdot\left(\dfrac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2 = \dfrac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g} \end{cases}$$

(6) 着地するとき $y = 0$ に戻るので,

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta \cdot t = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

このときの x 座標は,

$$x_2 = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2{v_0}^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$

(7) (6) より，$x_2 = \dfrac{{v_0}^2 \sin(2\theta)}{g}$ と表せるので，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ としたときに最大値 $\dfrac{{v_0}^2}{g}$ となる.

II (1) $x = v_0 \cos\theta \cdot t \quad \cdots ①$

(2) $y = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\theta \cdot t + h \quad \cdots ②$

(3) ①，②より，t を消去すると,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0\sin\theta \cdot \frac{x}{v_0\cos\theta} + h \\ &= -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta \cdot x + h \end{aligned}$$

(4) (3) に $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ を代入すると,

$$y = -\frac{gx^2}{2{v_0}^2}(1+\tan^2\theta) + x\tan\theta + h$$

$\tan\theta$ についての 2 次方程式として整理すると,

$$\frac{gx^2}{2{v_0}^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + \left(y - h + \frac{gx^2}{2{v_0}^2}\right) = 0 \quad \cdots ③$$

(5) $D = 0$ より,

$$(-x)^2 - 4\cdot\frac{gx^2}{2{v_0}^2}\left(y - h + \frac{gx^2}{2{v_0}^2}\right) = 0 \qquad \therefore \quad y = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2 + \left(h + \frac{{v_0}^2}{2g}\right) \quad \cdots ④$$

(6) 点 Q では④で $y = 0$ なので,

$$0 = -\frac{g}{2{v_0}^2}{x_\mathrm{Q}}^2 + \left(h + \frac{{v_0}^2}{2g}\right) \qquad \therefore \quad x_\mathrm{Q} = \sqrt{\frac{2{v_0}^2 h}{g} + \frac{{v_0}^4}{g^2}}$$

(7) ${v_0}^2 = gh$ を (6) に代入すると,

$$x_\mathrm{Q} = \sqrt{\frac{2h\cdot gh}{g} + \frac{g^2h^2}{g^2}} = \sqrt{3}h$$

(8) ③に $x = \sqrt{3}h$，$y = 0$ 及び ${v_0}^2 = gh$ を代入すると,

$$\frac{g\cdot 3h^2}{2gh}\tan^2\theta - \sqrt{3}h\tan\theta + \left(0 - h + \frac{g\cdot 3h^2}{2gh}\right) = 0$$

これを解くと,

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

【2】

《解答》

(1) $(x_{\mathrm{R}},\ y_{\mathrm{R}}) = \left(l,\ -\dfrac{1}{2}gT^2 + h\right)$

(2) $(v_{\mathrm{R}x},\ v_{\mathrm{R}y}) = (0,\ -gT)$

(3) $(x_{\mathrm{Q}},\ y_{\mathrm{Q}}) = \left(v_0\cos\theta\cdot T,\ -\dfrac{1}{2}gT^2 + v_0\sin\theta\cdot T\right)$

(4) $(v_{\mathrm{Q}x},\ v_{\mathrm{Q}y}) = (v_0\cos\theta,\ -gT + v_0\sin\theta)$

(5) (1)，(3) より，R から見た Q の相対的な位置は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{R}} = v_0\cos\theta\cdot T - l \\ y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{R}} = v_0\sin\theta\cdot T - h \end{cases}$$

ここで，$\cos\theta = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+h^2}}$，$\sin\theta = \dfrac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}$ をふまえると，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{R}} = \left(\sqrt{l^2+h^2} - v_0T\right) \times \dfrac{-l}{\sqrt{l^2+h^2}} \\ y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{R}} = \left(\sqrt{l^2+h^2} - v_0T\right) \times \dfrac{-h}{\sqrt{l^2+h^2}} \end{cases}$$

よって，Q と R の距離は，

$$\overline{\mathrm{QR}} = \sqrt{(x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{R}})^2 + (y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{R}})^2} = \sqrt{l^2+h^2} - v_0T$$

(6) $\dfrac{y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{R}}}{x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{R}}} = \dfrac{h}{l}$

(7) $t = T'$ のとき，$\overline{\mathrm{QR}} = 0$ となるので，

$$\sqrt{l^2+h^2} - v_0T' = 0 \qquad \therefore\quad T' = \frac{\sqrt{l^2+h^2}}{v_0}$$

(8) $t = T'$ において $y_{\mathrm{R}} > 0$ であるためには，

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{l^2+h^2}}{v_0}\right)^2 + h > 0 \qquad \therefore\quad v_0 > \sqrt{\frac{g(l^2+h^2)}{2h}}$$

【3】

《解答》

(1) 加速度成分を a_x，a_y とすると，運動方程式は，

$$\begin{cases} ma_x = -mg\sin\alpha \\ ma_y = -mg\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_x = -g\sin\alpha \\ a_y = -g\cos\alpha \end{cases}$$

この加速度を t で積分して，初速度を考慮すると，

$$\begin{cases} v_x = -g\sin\alpha\cdot t + v\cos(\theta-\alpha) \\ v_y = -g\cos\alpha\cdot t + v\sin(\theta-\alpha) \end{cases}$$

(2) (1) の速度を t で積分して，初期座標を考慮すると，

$$\begin{cases} x = -\dfrac{g\sin\alpha}{2}t^2 + v\cos(\theta-\alpha)\cdot t + 0 \\ y = -\dfrac{g\cos\alpha}{2}t^2 + v\sin(\theta-\alpha)\cdot t + 0 \end{cases}$$

(3) $t = t_0$ のとき，$y = 0$ に戻るので，

$$-\frac{g\cos\alpha}{2}{t_0}^2 + v\sin(\theta-\alpha)\cdot t_0 = 0 \qquad \therefore \quad t_0 = \frac{2v\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}$$

(4) $t = t_0$ のとき，$x = x_0$ となるので，

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{g\sin\alpha}{2}\cdot\left\{\frac{2v\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}\right\}^2 + v\cos(\theta-\alpha)\cdot\frac{2v\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha} \\ &= \frac{v^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin\{2(\theta-\alpha)\}\cos\alpha - \frac{1-\cos\{2(\theta-\alpha)\}}{2}\cdot 2\sin\alpha\right] \\ &= \frac{v^2\{\sin(2\theta-\alpha)-\sin\alpha\}}{g\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

(5) x_0 が最大となるとき，

$$2\theta_{\max} - \alpha = 90^\circ \qquad \therefore \quad \theta_{\max} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

また，最大到達距離は，

$$\frac{v^2(\sin 90^\circ - \sin\alpha)}{g\cos^2\alpha} = \frac{v^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

【4】

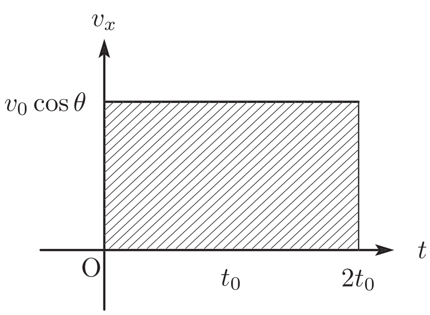
《解答》

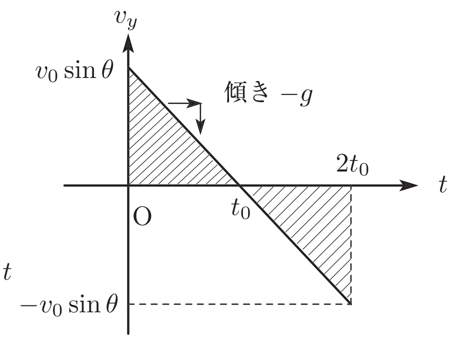
(1) 質点の質量を m とする．運動方程式の x，y 成分は，

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \therefore\quad \ddot{x} = 0 \qquad \therefore\quad \dot{x} = v_0\cos\theta (= 一定)$$

$$m\ddot{y} = -mg \qquad \therefore\quad \ddot{y} = -g \qquad \therefore\quad \dot{y} = -gt + v_0\sin\theta$$

速度の x 成分 v_x は $v_0\cos\theta$ で一定．y 成分 v_y は傾きすなわち加速度 $-g$ で減少．時刻 $t_0 = \dfrac{v_0\sin\theta}{g}$ で変位最大，その 2 倍の時刻に着地する．





各グラフと t 軸で囲まれる部分の面積を求めて，

$$x(t) = v_0\cos\theta\cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\cdot t$$

$x(t)$，$y(t)$ から t を消去して，

$$y = \tan\theta\cdot x - \frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2$$

(2) (1) の軌道が位置 (x_0, y_0) を通るので，

$$\begin{aligned} y_0 &= \tan\theta\cdot x_0 - \frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}{x_0}^2 \\ &= \tan\theta\cdot x_0 - \frac{g}{2{v_0}^2}(1+\tan^2\theta){x_0}^2 \end{aligned}$$

$\tan\theta$ について整理して，

$$\tan^2\theta - \frac{2{v_0}^2}{gx_0}\tan\theta + \left(\frac{2{v_0}^2y_0}{g{x_0}^2} + 1\right) = 0$$

$\tan\theta$ について解いて，

$$\tan\theta = \frac{{v_0}^2}{gx_0} \pm \sqrt{\left(\frac{{v_0}^2}{gx_0}\right)^2 - \left(\frac{2{v_0}^2y_0}{g{x_0}^2} + 1\right)}$$

(3) (2) の θ が存在するための条件は，根号内が 0 以上であることであり，

$$\left(\frac{{v_0}^2}{gx_0}\right)^2 - \left(\frac{2{v_0}^2 y_0}{g{x_0}^2} + 1\right) \geqq 0$$

これを y_0 について整理すると，

$$y_0 \leqq -\frac{g}{2{v_0}^2}{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{2g}$$

この式は，(x_0, y_0) が，放物線，

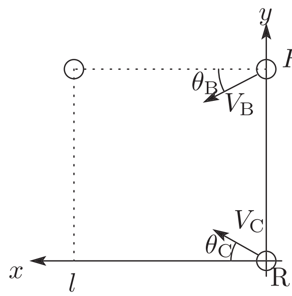
$$y_0 = -\frac{g}{2{v_0}^2}{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{2g}$$

の下部 (線上も含む) にあることを示す.

添削課題

《解答》

座標軸を右図のように設定する．物体 A が自由落下を始めた時刻を $t=0$ とすると，時刻 t における各物体の位置は，



$$\begin{cases} x_A = l \\ y_A = -\dfrac{g}{2}t^2 + H \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = V_B\cos\theta_B \cdot t \\ y_B = -\dfrac{g}{2}t^2 - V_B\sin\theta_B \cdot t + H \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = V_C\cos\theta_C \cdot t \\ y_C = -\dfrac{g}{2}t^2 + V_C\sin\theta_C \cdot t \end{cases}$$

物体 A が床に到達する時刻を $t=t_0$ とすると，

$$-\frac{g}{2}{t_0}^2 + H = 0 \qquad \therefore\quad t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

(1) 物体 A と小球 B が衝突する時刻を $t=t_1$ とすると，

$$\begin{cases} V_B\cos\theta_B \cdot t_1 = l \\ -\dfrac{g}{2}{t_1}^2 - V_B\sin\theta_B \cdot t_1 + H = -\dfrac{g}{2}{t_1}^2 + H \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \tan\theta_B = 0 \quad \cdots\overrightarrow{\mathrm{QP}}\text{の向き} \\ t_1 = \dfrac{l}{V_B} \end{cases}$$

物体 A が床に到達する前に衝突するとき，$t_1 < t_0$ なので，

$$\frac{l}{V_B} < \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad \therefore\quad V_B > l\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

(2) 物体 A と小球 C が衝突する時刻を $t=t_2$ とすると，

$$\begin{cases} V_C\cos\theta_C \cdot t_2 = l \\ -\dfrac{g}{2}{t_2}^2 + V_C\sin\theta_C \cdot t_2 = -\dfrac{g}{2}{t_2}^2 + H \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \tan\theta_C = \dfrac{H}{l} \quad \cdots\overrightarrow{\mathrm{RP}}\text{の向き} \\ t_2 = \dfrac{\sqrt{l^2+H^2}}{V_C} \end{cases}$$

物体 A が床に到達する前に衝突するとき，$t_2 < t_0$ なので，

$$\frac{\sqrt{l^2+H^2}}{V_C} < \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad \therefore\quad V_C > \sqrt{\frac{g(l^2+H^2)}{2H}}$$

(3) 小球 B，C が同時に衝突するとき，$t_1 = t_2$ なので，

$$\frac{l}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{\sqrt{l^2 + H^2}}{V_{\mathrm{C}}} \qquad \therefore \quad \frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{\sqrt{l^2 + H^2}}{l}$$

配点

(1)，(2) 各 40 点

(3)20 点

3章　束縛された運動：張力・垂直抗力

問題

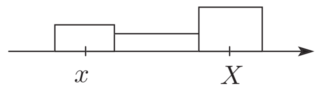
■演習

【1】

《解答》

I (1) 糸の長さが一定なので，右図の座標について，

$$X - x = (\text{定数}) \qquad \therefore \quad \ddot{X} - \ddot{x} = 0$$



これは 2 つの物体の加速度が等しいことを表している．

(2) 糸の左端における張力の大きさを T_1，右端における張力の大きさを T_2 とおく．糸が軽いことをふまえて，糸の運動方程式を立てると，

$$0 = T_2 - T_1 \qquad \therefore \quad T_2 = T_1$$

(3) 加速度の大きさを a，張力の大きさを T とおいて運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} ma = T & \cdots ① \\ Ma = F - T & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より，

$$(m + M)a = F \qquad \therefore \quad a = \frac{F}{M + m}$$

(4) a を ① に代入すると，

$$T = m \cdot \frac{F}{M + m} = \frac{m}{M + m}F$$

II (1) 定滑車の下側にある合計の糸の長さは変化しないので，$x_\mathrm{A} + 2x_\mathrm{B}$ が一定に保たれる．

(2) (1) をふまえると，

$$x_\mathrm{A} + 2x_\mathrm{B} = (\text{一定}) \qquad \therefore \quad \ddot{x}_\mathrm{A} + 2\ddot{x}_\mathrm{B} = 0$$

α，β は加速度の大きさなので，

$$(-\alpha) + 2\beta = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = 2\beta$$

(3) 下向きを正とすると，

$$\begin{cases} m \cdot (-\alpha) = mg - T \\ M\beta = Mg - T \cdot 2 \end{cases}$$

(4) (2)，(3) の式を連立して解くと，

$$\alpha = \frac{2(M - 2m)}{M + 4m}g, \quad \beta = \frac{M - 2m}{M + 4m}g, \quad T = \frac{3Mmg}{M + 4m}$$

$\beta > 0$ であるための条件は，

$$M - 2m > 0 \qquad \therefore \quad M > 2m$$

【2】

《解答》

(1) $\beta = 2\alpha \quad \cdots①$

(2) 水平方向は右向きを正，鉛直方向は下向きを正とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} M \cdot \alpha = 2T - F \quad \cdots② \\ M \cdot 0 = Mg + T - N \quad \cdots③ \\ m \cdot \alpha = F \quad \cdots④ \\ m \cdot \beta = mg - T \quad \cdots⑤ \end{cases}$$

(3) ②+④で F を消去し，①を用いて α を消去すると，

$$(M+m) \cdot \frac{\beta}{2} = 2T \qquad \therefore \quad (M+m) \cdot \frac{\beta}{4} = T \quad \cdots⑥$$

⑤+⑥で T を消去すると，

$$\frac{M+5m}{4}\beta = mg \qquad \therefore \quad \beta = \frac{4m}{M+5m}g$$

初速 0 でおもりが下がり始め，時間 t_0 で h だけ下がったので，

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4m}{M+5m} g \cdot {t_0}^2 = h \qquad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{h(M+5m)}{2mg}}$$

【3】

《解答》

(ア) 垂直抗力の大きさを N_0 とすると，斜面に垂直な方向の力のつりあいより，

$$0 = N_0 - mg\cos\theta \qquad \therefore \quad N_0 = mg\cos\theta$$

(イ) 加速度の大きさを a とすると，斜面に平行な方向の運動方程式は，

$$ma = mg\sin\theta \qquad \therefore \quad a = g\sin\theta$$

(ウ) $MA = N\sin\theta \quad \cdots ①$

(エ) $ma_x = -N\sin\theta \quad \cdots ②$

(オ) $ma_y = N\cos\theta - mg \quad \cdots ③$

(カ) $\tan\theta = \dfrac{y}{x - X} \quad \cdots ④$

(キ) ④ より，

$$\ddot{y} = (\ddot{x} - \ddot{X})\tan\theta \qquad \therefore \quad a_y = (a_x - A)\tan\theta$$

これと運動方程式より，a_x，a_y，A を消去すると，

$$\frac{N\cos\theta}{m} - g = \left(\frac{-N\sin\theta}{m} - \frac{N\sin\theta}{M}\right)\tan\theta \qquad \therefore \quad N = \frac{Mmg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

【4】

《解答》

(1) 三角柱と物体 P を内界としたときの運動方程式の x 成分より，

$$(M+m)A_0 = F \qquad \therefore \quad A_0 = \frac{F}{M+m}$$

(2) 三角柱に固定した座標系では，物体 P は静止している．したがって，P の運動方程式の X，Y 成分は，

$$0 = +R_0 \sin\theta - T\cos\theta - mA_0 \quad \cdots ①$$

$$0 = +R_0 \cos\theta + T\sin\theta - mg \quad \cdots ②$$

あるいは，P の運動方程式の x，y 成分は，

$$mA_0 = +R_0 \sin\theta - T\cos\theta$$

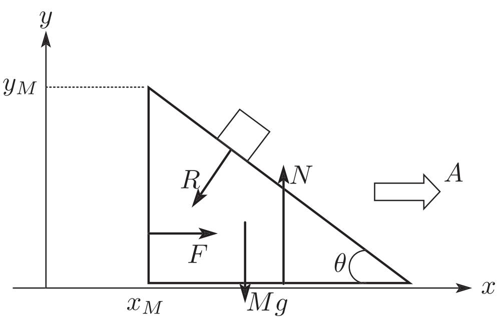
$$0 = +R_0 \cos\theta + T\sin\theta - mg$$

(3) ① $\times \cos\theta -$ ② $\times \sin\theta$ より，

$$T = mg\sin\theta - mA_0\cos\theta = mg\sin\theta - \frac{mF\cos\theta}{M+m}$$

(4) 三角柱の座標を $(x_M,\, y_M)$ とする．三角柱に作用する力は下図．運動方程式の x 成分は，

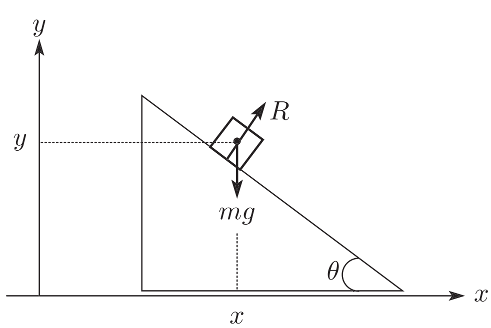
$$MA = F - R\sin\theta$$



(5) P の座標を $(x,\, y)$ とすると，P に作用する力は下図．運動方程式より，

$$ma = +R\sin\theta (= f_x)$$

$$mb = +R\cos\theta - mg (= f_y)$$



(6) P の加速度の x 成分 a を A と a' を用いて表すと，

$$a = A + a' \qquad \therefore \quad a' = a - A$$

(7) 束縛条件は，

$$\frac{V_Y}{V_X} = \frac{b}{a'} = -\tan\theta \qquad \therefore \quad b = -a'\tan\theta$$

(8) P の位置は，初期条件も考慮して，

$$x = x_0 + \frac{1}{2}at^2$$
$$y = y_0 + \frac{1}{2}bt^2$$
$$\therefore \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a} = 一定$$

これより軌跡は直線となる ($\Rightarrow$ (b)).

(9) 運動方程式から A，a，b を R を含む式で表し，(6) の結果を踏まえ，束縛条件に代入すると，

$$\frac{R\cos\theta - mg}{m} = -\left(\frac{R\sin\theta}{m} - \frac{F - R\sin\theta}{M}\right)\tan\theta$$

両辺に $Mm\cos\theta$ をかけ，R について整理すると，

$$R = \frac{m}{M + m\sin^2\theta}(Mg\cos\theta + F\sin\theta)$$

添削課題

《解答》

(イ) $ma_{\mathrm{A}} = mg - T$

(ロ) $Ma_{\mathrm{B}} = Mg - 2T$

(ハ) $2ma_{\mathrm{C}} = 2mg - T$

(ニ) $x_{\mathrm{A}} + 2x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{C}}$

(ホ) $a_{\mathrm{A}} + 2a_{\mathrm{B}} + a_{\mathrm{C}}$

(ヘ) $a_{\mathrm{A}} = \dfrac{8m - 5M}{3M + 8m}g$

(ト) $a_{\mathrm{B}} = \dfrac{3M - 8m}{3M + 8m}g$

(チ) $a_{\mathrm{C}} = \dfrac{8m - M}{3M + 8m}g$

(リ) $T = \dfrac{8Mm}{3M + 8m}g$

(ヌ) B が静止したままのとき，$a_{\mathrm{B}} = 0$ なので，

$$3M - 8m = 0 \qquad \therefore \quad M = \frac{8}{3}m$$

(ル) $\dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{g}{3}\right) \cdot t^2 = -\dfrac{1}{6}gt^2$

(ヲ) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{3} \cdot t^2 = \dfrac{1}{6}gt^2$

配点

(イ)〜(ホ)，(ヌ) 各 8 点

(ヘ)〜(リ) 各 10 点

(ル)，(ヲ) 各 6 点

Z-KAI

会員番号		氏　名	