

直前東大理系数学発展演習

【1 回目】



問題

$$\begin{aligned}
 \text{【1】(1)} \quad f_{n+2}(\theta) + f_n(\theta) &= \cos(n+2)\theta + \cos n\theta \\
 &= 2 \cos \frac{(n+2)\theta + n\theta}{2} \cos \frac{(n+2)\theta - n\theta}{2} \\
 &= 2 \cos(n+1)\theta \cos \theta \\
 &= 2f_1(\theta)f_{n+1}(\theta) \quad (\text{証終})
 \end{aligned}$$

(2) 数学的帰納法を用いて証明する.

(I) $n = 1$ のとき, $f_1(\theta) = \cos \theta$ より, $f_1(\theta)$ は $\cos \theta$ の 1 次式である.

$n = 2$ のとき

$$f_2(\theta) = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

より, $f_2(\theta)$ は $\cos \theta$ の 2 次式である.

(II) $n = k, k+1$ のとき題意が成り立つと仮定する. このとき, (1) より

$$f_{k+2}(\theta) = 2f_1(\theta)f_{k+1}(\theta) - f_k(\theta)$$

であり, $f_1(\theta)f_{k+1}(\theta)$ は $\cos \theta$ の $k+2$ 次式, $f_k(\theta)$ は $\cos \theta$ の k 次式となるから, $f_{k+2}(\theta)$ は $k+2$ 次式となる.

以上により, 1 以上の整数 n に対して, $f_n(\theta)$ は $\cos \theta$ の n 次式である. (証終)

(3) $x = \cos \theta$ とおくと

$$F_n(\cos \theta) = f_n(\theta) = \cos n\theta$$

であるから, θ について微分すれば

$$F_n'(\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) = -\sin n\theta \cdot n$$

ゆえに $\sin \theta \neq 0$ のとき

$$F_n'(\cos \theta) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

よって, $\theta = \frac{k}{n}\pi$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) とすれば

$$\sin \theta \neq 0, F_n' \left(\cos \frac{k}{n}\pi \right) = 0$$

ここで, $0 < \frac{k}{n}\pi < \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) より, $\cos \frac{k}{n}\pi$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) の値はすべて異なる.

したがって, $x = \cos \frac{k}{n}\pi$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) は $F_n'(x) = 0$ の $-1 < x < 1$ での相異なる実数解となり, 題意が示された. (証終)

【配点の目安】

配点: 25 点

(1) 5 点 (2) 10 点 (3) 10 点

(1) $\square_1$ 証明できて 5 点

- (2) ☐₁ 数学的帰納法 (I) ができて 5 点
 ☐₂ 数学的帰納法 (II) ができて 5 点
- (3) ☐₁ $F_n'(\cos \theta) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}$ に 5 点
 ☐₂ 証明ができて 5 点

- 【2】(1) m 個の赤球と n 個の白球をそれぞれ 2 個のグループに分けて, [赤] [白] [赤] [白] の順に並べればよい.

m 個の赤球を 2 個のグループに分ける分け方は, 赤球を 1 列に並べてその列に区切りを 1 個入れる入れ方を考えて, $m-1$ 通りある.

n 個の白球を 2 個のグループに分ける分け方も同様に考えて, $n-1$ 通り.

よって, 題意をみたすような並べ方は

$$(m-1)(n-1) \text{ (通り) } \quad (\text{答})$$

- (2) [赤] $k+1$ 個, [白] k 個のグループに分かれるのは

$$\underbrace{[\text{赤}] [\text{白}] [\text{赤}] [\text{白}] \cdots [\text{赤}]}_{[\text{赤}] : k+1 \text{ 個}, [\text{白}] : k \text{ 個}}$$

の順に並ぶときである.

m 個の赤球を $k+1$ 個のグループに分ける分け方は, 区切りを k 個入れる入れ方を考えて

$${}_{m-1}C_k \text{ (通り)}$$

n 個の白球を k 個のグループに分ける分け方は, 区切りを $k-1$ 個入れる入れ方を考えて

$${}_{n-1}C_{k-1} \text{ (通り)}$$

よって, 題意をみたすような並べ方は

$${}_{m-1}C_k \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \text{ (通り) } \quad (\text{答})$$

- (3) グループの総数が $2r+1$ 個となるのは, 次の (i)(ii) の場合である.

(i) [赤] $r+1$ 個, [白] r 個で, [赤] [白] [赤] $\cdots$ [赤] と並ぶ.

(ii) [赤] r 個, [白] $r+1$ 個で, [白] [赤] [白] $\cdots$ [白] と並ぶ.

よって, それぞれの場合に関して考える.

- (i) (2) と同様に考えて, m 個の赤球を $r+1$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{m-1}C_r$ 通りで, その各々に対して n 個の白球を r 個のグループに分ける分け方は ${}_{n-1}C_{r-1}$ 通り.

よって, (i) の場合の並べ方は

$${}_{m-1}C_r \cdot {}_{n-1}C_{r-1} \text{ (通り)}$$

- (ii) m 個の赤球を r 個のグループに分ける分け方は ${}_{m-1}C_{r-1}$ 通りで, その各々に対して n 個の白球を $r+1$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{n-1}C_r$ 通り. よって, (ii) の場合の並べ方は

$${}_{m-1}C_{r-1} \cdot {}_{n-1}C_r \text{ (通り)}$$

(i), (ii) は互いに排反だから題意をみたすような並べ方は

$${}_{m-1}C_r \cdot {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{m-1}C_{r-1} \cdot {}_{n-1}C_r \text{ (通り) } \quad (\text{答})$$

- (4) グループの総数が $2r$ 個となるのは次の (i), (ii) の場合である.

(i) [赤] r 個, [白] r 個で, [赤] [白] [赤] $\cdots$ [白] と並ぶ.

(ii) [赤] r 個, [白] r 個で, [白] [赤] [白] $\dots$ [赤] と並ぶ.

よって, それぞれの場合に関して考える.

(i) m 個の赤球を r 個のグループに分ける分け方は ${}_{m-1}C_{r-1}$ 通りで, その各々に
対して n 個の白球を r 個のグループに分ける分け方は ${}_{n-1}C_{r-1}$ 通り.

よって, (i) の場合の並べ方は

$${}_{m-1}C_{r-1} \cdot {}_{n-1}C_{r-1} \text{ (通り)}$$

(ii) (i) と同様にして, ${}_{m-1}C_{r-1} \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$ (通り)

(i), (ii) は互いに排反だから題意をみたすような並べ方は

$$2 \cdot {}_{m-1}C_{r-1} \cdot {}_{n-1}C_{r-1} \text{ (通り)} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点 : 25 点

(1) 5 点 (2) 7 点 (3) 7 点 (4) 6 点

(1) $\square_1$ 答に 5 点

(2) $\square_1$ ${}_{m-1}C_k$ (通り) または ${}_{n-1}C_{k-1}$ (通り) に 3 点

$\square_2$ 答に 4 点

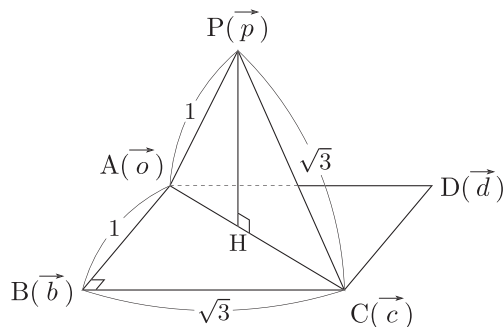
(3) $\square_1$ (i), (ii) のどちらかの場合ができて 3 点

$\square_2$ 答に 4 点

(4) $\square_1$ (i), (ii) のどちらかの場合ができて 3 点

$\square_2$ 答に 3 点

【3】 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{p}$ とする.



(1) $\overrightarrow{BP} = \vec{p} - \vec{b}$, $\overrightarrow{DP} = \vec{p} - \vec{d}$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} &= (\vec{p} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{d}) \\ &= |\vec{p}|^2 - (\vec{b} + \vec{d}) \cdot \vec{p} + \vec{b} \cdot \vec{d} \\ &= |\vec{p}|^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \vec{p}\end{aligned}$$

ここで $|\vec{p}| = 1$ であり, また $\triangle APC$ で $\angle PAC = \frac{\pi}{3}$, $AC = 2$ であるから

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{p} = 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

よって

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} = 1^2 - 1 = 0 \quad \therefore \angle BPD = \frac{\pi}{2} \quad (\text{答})$$

(2) (1) より, $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{DP}$ であるから

$$\triangle BPD = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{DP}|$$

ここで

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BP}|^2 &= |\vec{p} - \vec{b}|^2 = 2 - 2\vec{b} \cdot \vec{p} \\ |\overrightarrow{DP}|^2 &= |\vec{p} + \vec{b} - \vec{c}|^2 \\ &= 1 + 1 + 4 + 2\vec{b} \cdot \vec{p} - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2 + 2\vec{b} \cdot \vec{p}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BP}|^2 |\overrightarrow{DP}|^2 = 4\{1 - (\vec{b} \cdot \vec{p})^2\}$$

従って

$$\triangle BPD = \sqrt{1 - (\vec{b} \cdot \vec{p})^2}$$

となり, $|\vec{b} \cdot \vec{p}|$ が最小のとき $\triangle BPD$ の面積は最大となる.

P から AC に下ろした垂線の足を H とすると,

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HP}) \cdot \vec{b}$$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{HP} \cdot \vec{b} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \overrightarrow{HP} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \\
&= \frac{1}{4} + \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{HB}
\end{aligned}$$

ここで $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{HB}$ のなす角を θ とすれば

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \theta$$

であるから, $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき, $\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$ となり, このとき $|\vec{b} \cdot \vec{p}|$ は最小値 0 をとる.

このとき

$$\triangle BPD = \sqrt{1-0} = 1$$

だから, 求める最大値 $\max \triangle BPD$ は

$$\max \triangle BPD = 1 \quad (\text{答})$$

また, 面 PAC と面 π とのなす角 α は, 2 直線 BH, PH のなす角に等しい (ただし, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). $\overrightarrow{HB}$ と $\overrightarrow{HP}$ のなす角 θ について, $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ であるから, $\theta > \frac{\pi}{2}$ である.

よって, $\alpha = \pi - \theta$ であるから, 求める α の余弦は

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

【配点の目安】

配点 : 25 点

(1) 10 点 (2) 15 点

(1) $\square_1 \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} = |\vec{p}|^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \vec{p}$ に 5 点

$\square_2$ 答に 5 点

(2) $\square_1 \triangle BPD = \sqrt{1 - (\vec{b} \cdot \vec{p})^2}$ に 5 点

$\square_2 \triangle BPD$ の最大値 1 に 5 点

$\square_3$ 面 PAC と面 π とのなす角の余弦に 5 点

【4】 $f(x) = 0$ の整数解を m, n とする.

まず, $f(m) = 0$ より

$$m(m^3 + am^2 + bm + c) = -1$$

$m, m^3 + am^2 + bm + c$ はともに整数であるから, 上式より

$$m = \pm 1$$

となる. n についても同様である. よって, 2つの整数解は

$$(-1, -1), (-1, 1), (1, 1)$$

のいずれかである.

さらに, 虚数解の1つを $\alpha = u + vi$ (u, v は実数) とすると, もう1つの虚数解は $\bar{\alpha} = u - vi$ となるので

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = (x - m)(x - n)(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$$

が成り立ち, 両辺の定数項を比較すると

$$mn\alpha\bar{\alpha} = mn(u^2 + v^2) = 1 \quad \therefore mn > 0$$

となるから, 2つの整数解から $(-1, 1)$ の場合は除かれる.

(i) 2つの整数解が $(1, 1)$ のとき

$f(x)$ は $(x - 1)^2$ を因数にもつから, x^4 の係数と定数項が1であることを考慮すると

$$f(x) = (x - 1)^2(x^2 + px + 1)$$

とおける. すなわち

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 &= (x - 1)^2(x^2 + px + 1) \\ &= x^4 + (p - 2)x^3 + (-2p + 2)x^2 + (p - 2)x + 1 \end{aligned}$$

よって

$$a = p - 2, b = -2p + 2, c = p - 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また, $x^2 + px + 1 = 0$ が虚数解をもつことより

$$p^2 - 4 < 0 \quad \therefore -2 < p < 2$$

a, b, c が整数であることと①より, p も整数でなければならないから

$$p = -1, 0, 1$$

これらを①に代入すると

$$(a, b, c) = (-3, 4, -3), (-2, 2, -2), (-1, 0, -1)$$

(ii) 2つの整数解が $(-1, -1)$ のとき

同様に, $f(x) = (x + 1)^2(x^2 + qx + 1)$ とおけるから

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 &= (x + 1)^2(x^2 + qx + 1) \\ &= x^4 + (q + 2)x^3 + (2q + 2)x^2 + (q + 2)x + 1 \end{aligned}$$

よって

$$a = q + 2, b = 2q + 2, c = q + 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

また、 $x^2 + qx + 1 = 0$ が虚数解をもつことより、上と同様にして $q = -1, 0, 1$ となるから、これらを②に代入して

$$(a, b, c) = (1, 0, 1), (2, 2, 2), (3, 4, 3)$$

以上より、求める a, b, c は

$$(a, b, c) = (\pm 1, 0, \pm 1), (\pm 2, 2, \pm 2), (\pm 3, 4, \pm 3) \quad (\text{複号同順}) \quad (\text{答})$$

【配点の目安】

配点：25 点

- ☐₁ 整数解が $(1, 1), (-1, -1)$ のいずれかであることを示して……………5 点
- ☐₂ (i)① に……………2 点
- ☐₃ 「 $p^2 - 4 < 0$ 」や「 $p = -1, 0, 1$ 」などに……………2 点
- ☐₄ (ii)② に……………2 点
- ☐₅ 「 $q^2 - 4 < 0$ 」や「 $q = -1, 0, 1$ 」などに……………2 点
- ☐₆ (答) (a, b, c) 1 組につき 2 点……………12 点



会員番号

氏 名