

直前東大理系数学発展演習

【2 回目】

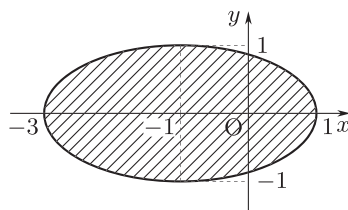


問題

【1】(1) $a = 2, b = 1$ のとき, 領域 D を表す不等式は

$$\frac{(x+1)^2}{2^2} + y^2 \leq 1$$

となる. よって, D は中心が $(-1, 0)$, 長軸の長さが $2 \times 2 = 4$, 短軸の長さが $2 \times 1 = 2$ の楕円の周および内部を表す. したがって, 図示すると下図の斜線部分 (境界は含む) となる.



(2) 領域 D の周上の点 (x, y) がすべて E に含まれればよい.

周上の点 (x, y) に対して

$$x = 1 - a + a \cos \theta, y = b \sin \theta$$

とおけるので, すべての実数 θ について, この点が $E: x^2 + y^2 \leq 1$ をみたせばよい.

代入して

$$(1 - a + a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 \leq 1$$

$$\therefore (a^2 - b^2) \cos^2 \theta + 2a(1 - a) \cos \theta + a^2 - 2a + b^2 \leq 0$$

となるから, $t = \cos \theta$ とおき

$$f(t) = (a^2 - b^2)t^2 + 2a(1 - a)t + a^2 - 2a + b^2$$

とすれば, 求める条件は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲でつねに $f(t) \leq 0$ となる条件となる.

(i) $a^2 - b^2 \geq 0$ つまり $(0 <) b \leq a$ のとき

$s = f(t)$ のグラフは下に凸または直線となるから, 求める条件は

$$f(-1) \leq 0 \text{ かつ } f(1) \leq 0$$

である. ここで

$$f(1) = (a^2 - b^2) + 2a(1 - a) + a^2 - 2a + b^2 = 0$$

$$f(-1) = (a^2 - b^2) - 2a(1 - a) + a^2 - 2a + b^2 = -4a(1 - a) \leq 0$$

より, $a > 0$ に注意すると

$$0 < a \leq 1$$

(ii) $a^2 - b^2 < 0$ つまり $b > a (> 0)$ のとき

$f(1) = 0$ だから $f(t)$ は $-1 \leq t \leq 1$ において単調増加でなければならない. したがって, 軸の位置は $t \geq 1$ である.

$s = f(t)$ の対称軸を考えて

$$-\frac{a(1-a)}{a^2-b^2} \geq 1$$

$$\iff -a(1-a) \leq a^2 - b^2 \quad (\because a^2 - b^2 < 0)$$

$$\iff b^2 \leq a$$

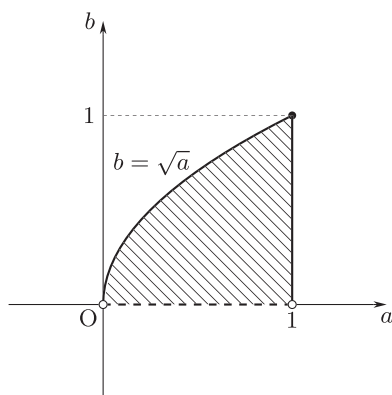
より, $b > 0$ に注意すると

$$0 < b \leq \sqrt{a}$$

よって, (i), (ii) から

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1 & (0 < b \leq a) \\ 0 < b \leq \sqrt{a} & (0 < a < b) \end{cases} \quad (\text{答})$$

で, これを図示すると, 下図の斜線部分 (境界は a 軸上以外は含み, a 軸上の点は含まない) である.



■ 別解

次のように, y を消去して考えることもできる.

領域 D の周上の点すべて E に含まれればよいので, $\frac{\{x - (1-a)\}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ より

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \{x - (1-a)\}^2$$

これを $x^2 + y^2 \leq 1$ に代入して

$$x^2 + \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} \{x - (1-a)\}^2 \right] \leq 1$$

$$\therefore a^2(x^2 - 1) - b^2(x-1)(x-1+2a) \leq 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで, D において x の取り得る値の範囲は

$$-a \leq x - (1-a) \leq a \quad \therefore 1-2a \leq x \leq 1$$

となるから, この範囲で①が成り立つ条件を求めればよい.

$1-2a \leq x \leq 1$ より, $x-1 \leq 0$ であるから, ①は

$$a^2(x+1) - b^2(x-1+2a) \geq 0$$

となる. この左辺を $g(x)$ とおけば, $g(x)$ は 1 次関数であるから, $g(1-2a) \geq 0$ かつ $g(1) \geq 0$ であればよい.

$$g(1-2a) = a^2(2-2a) = 2a^2(1-a) \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$$

$$g(1) = 2a^2 - 2ab^2 = 2a(a-b^2) \geq 0 \quad \therefore a \geq b^2 \quad (\because a > 0)$$

これと a, b が正であることから

$$0 < a \leq 1, b > 0, a \geq b^2$$

であり, これを図示すると先の図を得る.

【配点の目安】

配点: 25 点

(1) 5 点 (2) 20 点

(1) ☐₁ 正しく図示できて..... 5 点

(2) ☐₁ $0 < a \leq 1$ ($0 < b \leq a$) に..... 5 点

☐₂ $0 < b \leq \sqrt{a}$ ($0 < a < b$) に..... 5 点

☐₃ 図示に..... 10 点

別解

(2) ☒₁ $1-2a \leq x \leq 1$ で①が成り立つ条件を求めればよいことがわかって... 5 点

☒₂ $g(1-2a) \geq 0$ かつ $g(1) \geq 0$ であればよいことがわかって..... 5 点

☒₃ 図示に..... 10 点

【2】 集合 $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ を E_n と表す. まず, $n = 3$ として,

$$E_3 = \{1, 2, \dots, 8\}$$

について, 実験してみる. E_3 を分割して

$$A_3 = \{1, 4, 6, 7\}, B_3 = \{2, 3, 5, 8\}$$

とすると

$$\begin{aligned} & f(1) + f(4) + f(6) + f(7) \\ &= a(1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2) + b(1 + 4 + 6 + 7) + 4c \\ &= 102a + 18b + 4c \\ & f(2) + f(3) + f(5) + f(8) \\ &= a(2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2) + b(2 + 3 + 5 + 8) + 4c \\ &= 102a + 18b + 4c \end{aligned}$$

が成り立つ.

この実験から, 題意の成立には, それぞれの集合の要素の総和, および 2 乗の総和が等しければ十分であることが解る.

そこで, 集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ に対して, $\sum_{x \in A}$ で, 集合 A のすべての要素についての和を表すとして

- 関数値の和 $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_k)$ を $\sum_{x \in A} f(x)$ で,
- 2 乗の和 $\sum_{x \in A} x^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$ を $Q(A)$ で,
- 1 次の和 $\sum_{x \in A} x = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ を $L(A)$ で

表すことにすると, 与えられた関数 $f(x)$ について, 集合 A の要素の個数を n とすれば

$$\sum_{x \in A} f(x) = aQ(A) + bL(A) + cn$$

であるから, 2 つの集合 A と B について, 要素の個数をともに n とすれば,

$$[Q(A) = Q(B) \wedge L(A) = L(B)] \implies \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{x \in B} f(x)$$

が成り立つ ($\wedge$ は「かつ」を表す).

そこで, 要素の個数が 2^n である集合 E_n を, それぞれ $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ 個の要素をもつ 2 つの集合 A_n と B_n とに分割して,

$$Q(A_n) = Q(B_n), L(A_n) = L(B_n)$$

とできることを, n に関する数学的帰納法により示す. ただし, $n \geq 3$ とする.

(I) $n = 3$ のときは, 上の実験の通り,

$$A_3 = \{1, 4, 6, 7\}, B_3 = \{2, 3, 5, 8\}$$

とすれば,

$$L(A_3) = L(B_3), Q(A_3) = Q(B_3)$$

より成立.

(II) $k \geq 3$ なる正整数 k について, $n = k$ のとき成立を仮定する.

集合 $E_k = \{1, 2, \dots, 2^k\}$ について, E_k を同じ要素を含まず, かつ要素の個数が等しい 2 つの集合 A_k と B_k に分割して,

$$L(A_k) = L(B_k), \quad Q(A_k) = Q(B_k)$$

とすることができる.

このとき, 集合 A_k と B_k の要素の個数は, いずれも $\frac{2^k}{2} = 2^{k-1}$ である. この値を l と置き,

$$A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}, \quad B_k = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$$

とする.

$n = k + 1$ のとき,

$$A_{k+1} = A_k \cup \{2l + a_1, 2l + a_2, \dots, 2l + a_l\},$$

$$B_{k+1} = B_k \cup \{2l + b_1, 2l + b_2, \dots, 2l + b_l\}$$

として, 集合 A_{k+1} , B_{k+1} を定めれば, この 2 つの集合は同じ要素を含まず, また, 1 次の和 L , 2 次の和 Q が等しいことが次のように示される:

$$L(A_{k+1}) = L(A_k) + l \cdot 2l + L(A_k) = 2L(A_k) + 2l^2$$

$$L(B_{k+1}) = L(B_k) + l \cdot 2l + L(B_k) = 2L(B_k) + 2l^2$$

$$\therefore L(A_{k+1}) = L(B_{k+1}) \quad (\because \text{仮定より})$$

$$Q(A_{k+1}) = Q(A_k) + l \cdot (2l)^2 + 2 \cdot 2l \cdot L(A_k) + Q(A_k)$$

$$= 2Q(A_k) + 4l^3 + 4lL(A_k)$$

$$Q(B_{k+1}) = Q(B_k) + l \cdot (2l)^2 + 2 \cdot 2l \cdot L(B_k) + Q(B_k)$$

$$= 2Q(B_k) + 4l^3 + 4lL(B_k)$$

$$\therefore Q(A_{k+1}) = Q(B_{k+1}) \quad (\because \text{仮定より})$$

従って

$$\sum_{x \in A_{k+1}} f(x) = \sum_{x \in B_{k+1}} f(x)$$

が成り立つ.

以上 (I), (II) より, 題意が成立することが示された.

(証終)

【配点の目安】

配点：25 点

- ☐₁ 「 $Q(A) = Q(B)$ かつ $L(A) = L(B) \Rightarrow \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{x \in B} f(x)$ 」と同等の内容を述べて 10 点
- ☐₂ 数学的帰納法 (I) の部分に 5 点
- ☐₃ 数学的帰納法 (II) の部分に 10 点

- 【3】(1) 放物線を回転してできる曲面上の点 (x, y, z) と、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ との距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ であるから、曲面上の点 (x, y, z) のみたす関係式、すなわち曲面の方程式は

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$$

この曲面と平面 $z = y$ で囲まれた立体の表面および内部の点は

$$D : x^2 + y^2 \leq z \leq y$$

をみたす。このとき

$$y^2 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq y$$

により

$$0 \leq y \leq 1$$

である。

よって、平面 $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で D を切ると、切り口は $y = t$ 上の領域

$$x^2 + t^2 \leq z \leq t$$

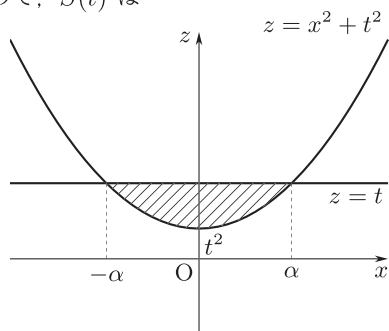
となる。ここで、 $x^2 + t^2 \leq t$ より、 $\alpha = \sqrt{t - t^2}$ として

$$-\alpha \leq x \leq \alpha$$

である。

したがって、切り口は右図のようになるので、 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \{t - (x^2 + t^2)\} dx \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x + \alpha)(x - \alpha) dx \\ &= \frac{1}{6} \{\alpha - (-\alpha)\}^3 = \frac{4}{3} \alpha^3 \\ &= \frac{4}{3} (1 - t)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



- (2) (1) より、 $t = \sin^2 \theta$ とおくと D の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(t) dt &= \frac{4}{3} \int_0^1 (1 - t)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin^3 \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 2\theta}{8} d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 4\theta + \cos^2 4\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{24} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2 \cos 4\theta + \frac{1 + \cos 8\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{24} \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \cdot \frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 8\theta}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{4} \pi \\
&= \frac{\pi}{32} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 13 点 (2) 12 点

- (1) $\square_1$ $D : x^2 + y^2 \leq z \leq y$ に 3 点
 $\square_2$ $S(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \{t - (x^2 + t^2)\} dx$ に 5 点
 $\square_3$ 答に 5 点
- (2) $\square_1$ 置き換えなどの方針に 2 点
 $\square_2$ θ の積分の式が正しくできて 5 点
 $\square_3$ 答に 5 点

【4】(1) $a_i \vec{f}_i = (x_i, y_i)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0 A_n} &= \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i, y_i) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i, \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right)\end{aligned}$$

となる. ここで, $A_0 = A_n$ で G が凸多角形となるとき

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0$$

である.

ところで

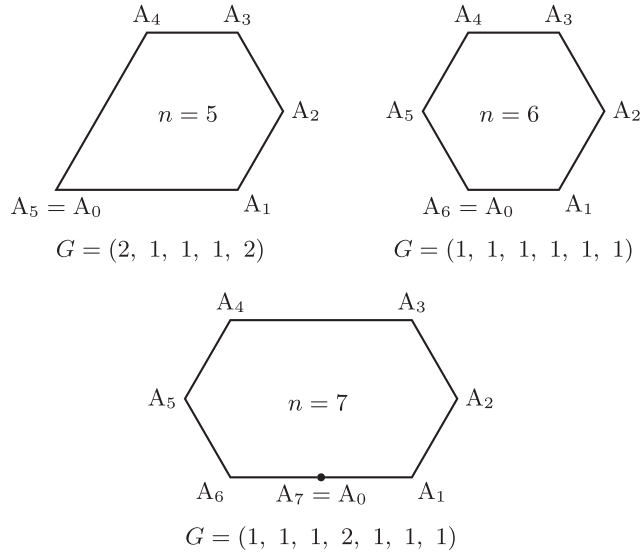
$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a_3 \cdot 0 > 0$$

であるから, $\sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0$ が成り立つのは $n \geq 5$ のときである.

$n = 5, 6, 7$ のとき, 例えば

$$G(2, 1, 1, 1, 2), G(1, 1, 1, 1, 1, 1), G(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$$

とすれば, 下図のようになるので, 凸多角形が存在する.



$n \geq 8$ で, $A_0 = A_n$ とすると

$$\vec{f}_1 \parallel (-\vec{f}_4) \parallel \vec{f}_7$$

であるから, $A_1 A_2, A_4 A_5, A_7 A_8$ は平行な辺となり, 多角形は凸でない.

したがって, 凸多角形となるのは $n = 5, 6, 7$ の場合に限る.

(証終)



会員番号

氏 名