MJA

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

# 直前東大理系数学発展演習

# 【3 回目】

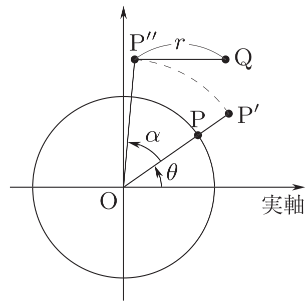
## 問題

【1】P を表す複素数 $z$ は

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおける．P′，P″ を表す複素数はそれぞれ

$$\sqrt{2}z,\ \sqrt{2}z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$




とおけるので，Q を表す複素数 $w$ は

$$w = r + \sqrt{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$$

$\sqrt{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \beta$ とおくと

$$w = r + \beta z$$

これより

$$\frac{w}{z} = \frac{1}{z}(r + \beta z) = \frac{1}{r}\overline{z} + \beta\ (\because |z|^2 = z \cdot \overline{z} = r^2)$$

$$\therefore\quad \overline{z} = r\left(\frac{w}{z} - \beta\right)$$

$|z| = r$ だから

$$|\overline{z}| = r \qquad \therefore\quad \left|\frac{w}{z} - \beta\right| = 1$$

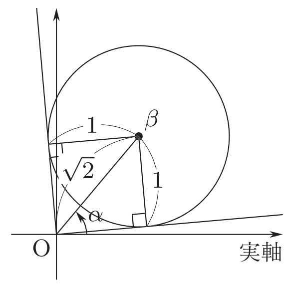
複素数 $\dfrac{w}{z}$ が表す点は，点 $\beta$ を中心，半径 1 の円周上を動く (下図参照)．ここで，$|\beta| = \sqrt{2}$ であり

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

そして，$\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{3}{4}\pi$ だから，右図より

$$\alpha - \frac{\pi}{4} \leqq \arg\frac{w}{z} \leqq \alpha + \frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{\alpha - \frac{\pi}{4}} \leqq \angle\mathrm{POQ} \leqq \boldsymbol{\alpha + \frac{\pi}{4}} \quad \text{（答）}$$




---

【配点の目安】

配点：25 点

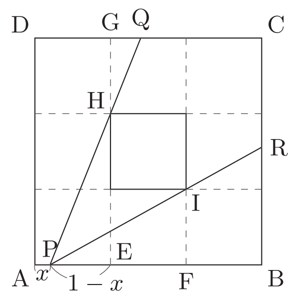
□$_1$ Q に対応する $w$ を $z$，$\alpha$，$r$ で表して ……………………………… 7 点
□$_2$ $\left|\dfrac{w}{z} - \beta\right| = 1$ に相当する内容に ……………………………… 8 点
□$_3$ 答に ……………………………………………………………… 10 点

【2】対称性より，点 P が線分 AB 上にあるときについて考えればよく，さらに AP $= x$ とおくとき，$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の場合について調べればよい．

(ⅰ) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

影の面積は，右図において

$$\mathrm{QC} \times 1 + \mathrm{RC} \times 1$$




ここで，$\mathrm{PE} = 1 - x$，$\mathrm{EH} = 2$，$\mathrm{HG} = 1$ より

$$\mathrm{GQ} = \frac{1}{2}\mathrm{PE} = \frac{1-x}{2}$$

となるので

$$\mathrm{QC} = 2 - \mathrm{GQ} = \frac{x+3}{2}$$

また，$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{PB}} = \dfrac{\mathrm{FI}}{\mathrm{PF}}$ より

$$\mathrm{BR} = \frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{PF}} \cdot \mathrm{PB} = \frac{3-x}{2-x}$$

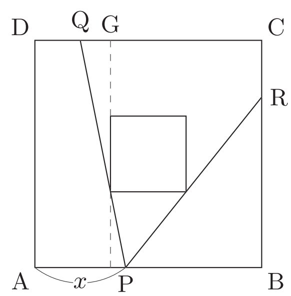
したがって，影の面積 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{2} + \left(3 - \frac{3-x}{2-x}\right) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x-2} + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

(ⅱ) $1 < x \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

(ⅰ) と同様に右図において

$$\mathrm{QG} = 2(x-1)$$




となるから

$$\mathrm{QC} = 2x$$

また，$\mathrm{BR} = \dfrac{3-x}{2-x}$ であるから，影の面積 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + \left(3 - \frac{3-x}{2-x}\right) \\ &= 2x + \frac{1}{x-2} + 2 \end{aligned}$$

したがって，$2 - x = t$ とおくことにより，影の面積（$g(t)$ とおく）は

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{9}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{t} & (1 \leqq t \leqq 2) \\ 6 - 2t - \dfrac{1}{t} & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t < 1\right) \end{cases}$$

となる．よって

$\dfrac{1}{2} < t < 1$ のとき　$g'(t) = -2 + \dfrac{1}{t^2}$

$1 < t < 2$ のとき　$g'(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{t^2}$

となるから，増減表は以下のようになる．

| $t$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $3$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $3$ |

ここで

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6 - 2\sqrt{2},\ g(\sqrt{2}) = \frac{9}{2} - \sqrt{2}$$

であるから，

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - g(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$$

より

**頂点からの距離が $\boldsymbol{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{6 - 2\sqrt{2}}$ をとり，**

**頂点からの距離が $\boldsymbol{0,\ 1,\ \frac{3}{2}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{3}$ をとる．** （答）

---

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ $0 \leqq x \leqq 1$ のときの $f(x)$ に……5 点

□$_2$ $1 < x \leqq \frac{3}{2}$ のときの $f(x)$ に……5 点

□$_3$ 増減表に……5 点

□$_4$ 最大値に……5 点

□$_5$ 最小値に……5 点

【3】(1) 整数 $x$ に対して，$l^x$ は $x$ の単調増加関数である．$1 < k^n$ なので，$x$ を $0$ から $1$ ずつ増加していけば，$k^n$ を超えない最大の $x$ がただ $1$ つある．それを $m-1$ とすればよい． (証終)

(2) 与えられた条件から，$a_{k^{n+1}} = a_{k^n} + a_k$ である．

そして

$$a_{k^2} = 2a_k,\ a_{k^3} = 3a_k,\ \cdots,\ a_{k^n} = na_k$$

と推測できる．

(i) $n=1$ のとき，$a_{k^1} = a_k = 1a_k$ だから成り立つ．

(ii) $n=N$ のとき，成り立つとすると

$$a_{k^{N+1}} = a_{k^N} + a_k = Na_k + a_k = (N+1)a_k$$

で成り立つ．

以上より 数学的帰納法により

$$a_{k^n} = na_k$$

が成り立つことが示された．

(1) の $m$ をとれば，$a_k$ は $k$ に関して単調増加なので

$$a_{l^{m-1}} \leqq a_{k^n} < a_{l^m} \qquad \therefore \quad (m-1)a_l \leqq na_k < ma_l$$

ここで，$a_l \leqq 0$ とすると，$a_{kl} \leqq a_k$ となり矛盾するから $a_l > 0$.

よって

$$m-1 \leqq \frac{na_k}{a_l} < m$$

また，(1) で $1$ より大きい底 $e$ の対数をとると，$(m-1)\log l \leqq n\log k < m\log l$ であるから

$$m-1 \leqq \frac{n\log k}{\log l} < m$$

よって

$$(m-1)-m < \frac{na_k}{a_l} - \frac{n\log k}{\log l} < m-(m-1)$$

つまり

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n} \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つ． (証終)

(3) (2) の結果は任意の $n$ について成り立つので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ より

$$\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{a_k}{\log k} = \frac{a_l}{\log l}$$

が成り立つ．$k$ によらず一定なこの値を $C$ とすると，$a_k = C\log k$ である．

$a_2 = a$ より

$$C = \frac{a}{\log 2} \qquad \therefore \quad a_k = a\frac{\log k}{\log 2} = \boldsymbol{a\log_2 k} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）5 点　（2）12 点　（3）8 点

（1）$\square_1$ 証明できて ……………………………………………………… 5 点

（2）$\square_1$ $a_{k^n} = na_k$ を示して ………………………………………… 4 点

$\square_2$ $m-1 \leqq \dfrac{na_k}{a_l} < m$，$m-1 \leqq \dfrac{n\log k}{\log l} < m$ のどちらかを示して …… 4 点

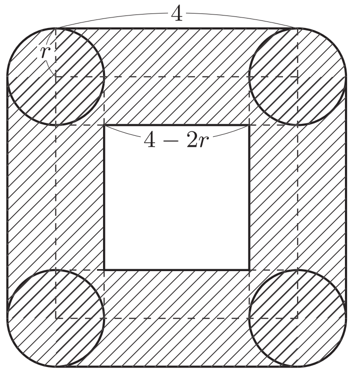
$\square_3$ 証明を完成させて …………………………………………………… 4 点

（3）$\square_1$ $\dfrac{a_k}{a_l} - \dfrac{\log k}{\log l} = 0$ を示して ………………………………… 4 点

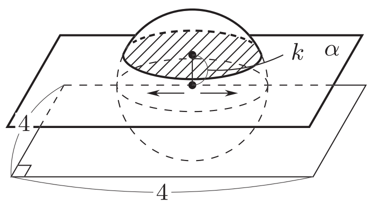
$\square_2$ 答に ……………………………………………………………… 4 点

【4】(1) 円の通過する部分は下図の斜線部分になるので，求める面積 $S(r)$ は

$$
\begin{aligned}
S(r) &= \frac{1}{4}\pi r^2 \times 4 + \{4^2 - (4-2r)^2\} + 4r \times 4 \\
&= \boldsymbol{32r - (4-\pi)r^2} \quad \text{（答）}
\end{aligned}
$$




(2) 辺の長さが 4 の正方形を含む平面からの距離が $k$ の平面を $\alpha$ とする．$\alpha$ による半径 1 の球の切り口の円の半径を $r$ とすると，この球が通過する部分の $\alpha$ による切り口の面積は (1) の $S(r)$ に等しい．




よって，$r = \sqrt{1-k^2}$ より

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^1 S(\sqrt{1-k^2})\,dk \\
&= 2\left\{32\int_0^1 \sqrt{1-k^2}\,dk - (4-\pi)\int_0^1 (1-k^2)\,dk\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-k^2}\,dk$ は半径 1 の円の $\dfrac{1}{4}$ の面積に等しいから

$$
\int_0^1 \sqrt{1-k^2}\,dk = \frac{\pi}{4}
$$

さらに

$$
\int_0^1 (1-k^2)\,dk = \left[k - \frac{k^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}
$$

よって

$$
V = 2\left\{32 \cdot \frac{\pi}{4} - (4-\pi) \cdot \frac{2}{3}\right\} = \boldsymbol{\frac{4}{3}(13\pi - 4)} \quad \text{（答）}
$$

---

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ $\dfrac{1}{4}\pi r^2 \times 4 + \{4^2 - (4-2r)^2\} + 4r \times 4$ に …………………… 5点

$\square_2$ 答に …………………… 5点

(2) $\square_1$ $V = 2\displaystyle\int_0^1 S(\sqrt{1-k^2})\,dk$ に …………………… 5点

$\square_2$ 答に …………………… 10点

MJA

直前東大理系数学発展演習

【3 回目】

| 会員番号 | | 氏　名 | |
|---|---|---|---|