MJB

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大文系数学発展演習

【1 回目】

問題

【1】(1) 与えられた漸化式に従って，a_n，b_n，c_n を表にすると，次のようになる：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	
b_n	**1**	**2**	**0**	**2**	**2**	**1**	**0**	**1**	**1**	**2**	(答)
c_n	1	3	3	5	7	8	8	9	10	12	

(2) まず，数列 $\{b_n\}$ は $(1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1)$ を 1 つの周期とする，長さ 8 の周期をもつ数列であることを示す．

以下，整数 A と B を 3 で割った余りが等しいとき，$A \equiv B$ と表すと

$$b_{n+2} \equiv a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \equiv b_{n+1} + b_n$$

であり，また (1) より $b_8 = b_0 = 1$，$b_9 = b_1 = 2$ であるから，

$$b_{10} \equiv b_9 + b_8 = b_1 + b_0 \equiv b_2, \qquad \therefore \quad b_{10} = b_2$$

$$b_{11} \equiv b_{10} + b_9 = b_2 + b_1 \equiv b_3, \qquad \therefore \quad b_{11} = b_3$$

などが成り立つ．よって

$$(b_8,\ b_9,\ \cdots,\ b_{15}) = (b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_7)$$

となるから，帰納的に，任意の正整数 N について $b_{N+8} = b_N$ が成り立つ．したがって，確かに $\{b_n\}$ は周期 8 の周期数列である．

数列 $\{c_n\}$ において，

$$c_{n+8} = c_n + (b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+8})$$

であり，数列 $\{b_n\}$ の隣接する 8 項の和は常に等しく，その値は

$$b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+8} = b_0 + b_1 + \cdots + b_7 = c_7$$

であるから，任意の非負整数 n について

$$c_{n+8} = c_n + c_7$$

が成り立つ．　(証終)

(3) n に関する数学的帰納法による．

(I) $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$ のとき，(1) の表より確かに成立．

(II) $n = k$ で成立を仮定する：

$$k + 1 \leqq c_k \leqq \frac{3}{2}(k+1)$$

示すべき式は

$$k + 9 \leqq c_{k+8} \leqq \frac{3}{2}(k+9)$$

(2) より $c_{k+8} = c_k + c_7$ であり，また (1) より $c_7 = 9$ であるから

$$c_{k+8} = c_k + c_7 = c_k + 9$$

そこで，仮定の辺々に 9 を加えて，

$$k+10 \leqq c_{k+8} = c_k + 9 \leqq \frac{3}{2}(k+1)+9 = \frac{3}{2}(k+7)$$

$k+9 < k+10$，$\dfrac{3}{2}(k+7) < \dfrac{3}{2}(k+9)$ であるから，$n=k+8$ でも成立.

以上，(I) と (II) により，任意の非負整数 n について，題意の不等式が成り立つ.

（証終）

■ 補足

本問で定義した記号 $\equiv$ は正式には

m を 2 以上の整数の定数とするとき，2 つの整数 a，b について

「$a-b$ が m で割り切れるとき，m を法として a と b は合同であるといい

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す」

というものである．上記の式を合同式と呼ぶ.

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　　(2) 10 点　　(3) 10 点

(1) □$_1$ b_0，b_1，$\cdots$，b_9 の値がすべて正しくて…………5 点

(2) □$_1$ $b_{N+8} = b_N$ を証明して…………5 点

□$_2$ $c_{n+8} = c_n + c_7$ を証明して…………5 点

(3) □$_1$ 数学的帰納法 (I) を述べて…………2 点

□$_2$ 数学的帰納法 (II) を示して…………8 点

【2】与えられた 6 個の点 A_1，A_2，$\cdots$，A_6 を結べば，正 8 面体になる．この内部の点からなる領域を D で表す．

図１　正 8 面体領域 D

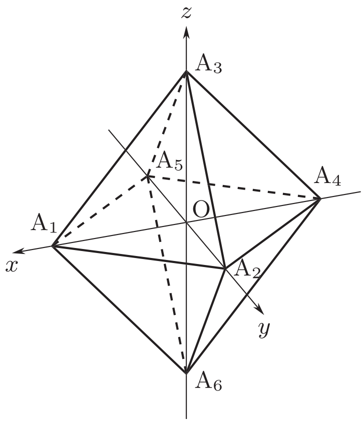
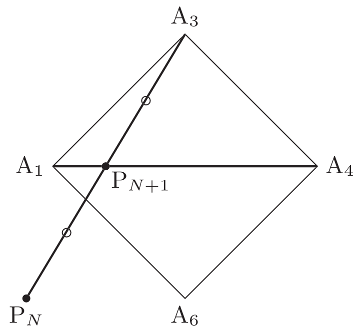


図２　断面 $A_1A_3A_4A_6$



(1) まず，点 P_n が正 8 面体 $A_1A_2\cdots A_6$ の対角線 A_1A_4 上にあるためには，P_1，P_2，$\cdots$，P_n を定める頂点 A_k は，すべて A_1 または A_4 のいずれかであることが必要かつ十分である．これを示す．

- 整数 N（ただし $0 \leqq N \leqq n-1$）について，P_N が線分 A_1A_4 上にあり，かつ P_{N+1} を定める点が頂点 A_1 または A_4 のいずれかであるならば，P_N とその頂点を結ぶ線分の中点 P_{N+1} も線分 A_1A_4 上にあることは明らか．
- 逆を示す．点 P_{N+1} が線分 A_1A_4 上にあり，かつ点 P_N が線分 A_1A_4 上にないとする．このとき，P_N から P_{N+1} を定める頂点が A_j（ただし $j=2,\ 3,\ 5,\ 6$）であるとすれば，P_{N+1} は線分 P_NA_j の中点であることから，P_N は正 8 面体領域 D の外部の点または境界上の点であることになるが，これは矛盾．図 2 を見よ．点 $P_{\mathrm{N+1}}$ を定める頂点 A_j を A_3 とした．

したがって，確かに点 P_n が線分 A_1A_4 上にあることと，点 P_0，P_1，$\cdots$，P_{n-1} がすべて線分 A_1A_4 上の点であることは，同値である．

よって，題意が成立するのは，n 回の試行において 1，4 のいずれかが続けて出る場合であるから，求める確率 U_n は

$$U_n = \left(\frac{2}{6}\right)^n = \boldsymbol{\frac{1}{3^n}} \quad \text{（答）}$$

(2) 正方形 $A_1A_2A_4A_5$ の内部の点からなる領域を S とすると，(1) と同様にして次が示される：

点 P_n が S に属する

$\Longleftrightarrow P_0$，P_1，$\cdots$，P_{n-1} を定める点は，A_1，A_2，A_4，A_5 のいずれかである．

$\Longleftarrow$ は明らかである．$\Longrightarrow$ は，(1) と同様に背理法による．P_{N+1} が領域 S に含まれ，かつ P_N から P_{N+1} を定める点が，正方形 S の頂点以外の，A_3，A_6 であるとする．これを A_j とする．このとき，P_{N+1} は線分 A_jP_N の中点であるか

ら，P_N は正 8 面体領域 D の境界上の点または外部の点であることになる．これは不合理であるから，A_j は正方形領域 S の頂点のいずれかである．

従って題意が成立するのは，n 回の試行において，すべて 1，2，4，5 のいずれかが出る場合であるから，求める確率 V_n は

$$V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n = \boldsymbol{\frac{2^n}{3^n}} \quad \text{(答)}$$

(3) 正 8 面体領域 D は，xy 平面，yz 平面，zx 平面に関して面対称性をもつことに着目する．

そこで，この領域 D を次の 3 種類の領域に分割する．

(i) 8 個の合同な 4 面体の内部：

$\mathrm{OA_1A_2A}_k$，$\mathrm{OA_2A_4A}_k$，$\mathrm{OA_4A_5A}_k$，$\mathrm{OA_5A_1A}_k$

ここで，k は $k=3$，6 のいずれかである．

点 P_n がこれら 8 個の領域のいずれに含まれるかは，対等である．その確率をそれぞれ X とする．

(ii) 原点 O を直角の頂点とする 12 個の合同な直角 2 等辺 3 角形の内部：

$\mathrm{OA_1A_2}$，$\mathrm{OA_2A_4}$，$\mathrm{OA_4A_5}$，$\mathrm{OA_5A_1}$，

$k=3$，6；$l=1$，2，3，4 として $\mathrm{OA}_k\mathrm{A}_l$

やはり，点 P_n がこれら 12 個のうちのどれに含まれるかの確率はすべて等しい．それをそれぞれ Y とする．

(iii) $k=1$，2，$\cdots$，6 として 6 本の線分 OA_k ：

同様に，どの線分に含まれるかは対等である．それをそれぞれ Z とする．

これら 3 種の領域は共通部分をもたない，かつ正 8 面体領域 D はこれらの和集合であるから，全確率として

$$8X + 12Y + 6Z = 1$$

また，(1)，(2) により

$$2Z = U_n,\ 4Y + 4Z = V_n \iff 4Y = V_n - 4Z = V_n - 2U_n$$

よって

$$12Y + 6Z = 3(V_n - 2U_n) + 3U_n = 3V_n - 3U_n$$

となるから，

$$8X = 1 - (3V_n - 3U_n) = 1 - \frac{2^n}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}}$$

以上より求める確率 $W_n = X$ は

$$W_n = \frac{1}{8}\cdot\frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} = \boldsymbol{\frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{8\cdot 3^{n-1}}} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）7 点　　（2）8 点　　（3）10 点

（1）□$_1$ U_n を求める過程に ……………………………………… 2 点

□$_2$ 答に ……………………………………………………… 5 点

（2）□$_1$ V_n を求める過程に ……………………………………… 3 点

□$_2$ 答に ……………………………………………………… 5 点

（3）□$_1$ ($8X + 12Y + 6Z = 1$ など) W_n を求める過程に ………………… 5 点

□$_2$ 答に ……………………………………………………… 5 点

【3】実数係数の 2 次方程式が虚数解 $z = a + bi$ をもつとき，他の解は z の共役複素数 $\overline{z} = a - bi$ であり，

$$a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi) = z\overline{z}$$

である．

解と係数の関係により

$$z\overline{z} = t(t^3 + 2t^2 - 2) = t^4 + 2t^3 - 2t$$

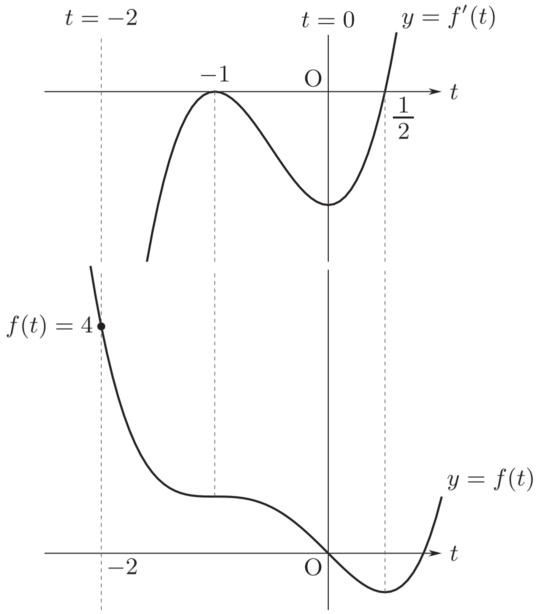
これを $f(t)$ とする：$f(t) = t^4 + 2t^3 - 2t$

与えられた方程式が虚数解をもつから，その判別式 D は負となり，

$$\frac{D}{4} = t^2(t+1)^2 - t(t^3 + 2t^2 - 2) = t^2 + 2t < 0 \qquad \therefore \quad -2 < t < 0$$

$a^2 + b^2 = f(t)$ をこの区間 $-2 < t < 0$ で考える．$f(t)$ を微分して

$$f'(t) = 4t^3 + 6t^2 - 2 = 2(t+1)^2(2t-1)$$



区間 $-2 < t < 0$ において $f'(t) < 0$ であるから，$f(t)$ はこの区間で単調に減少し，

$$f(-2) > f(t) > f(0)$$

$f(-2) = 16 - 16 + 4 = 4$，$f(0) = 0$ であるから，$0 < f(t) < 4$ となる．

以上より，求める $z\overline{z} = a^2 + b^2$ の範囲は

$$\boldsymbol{0 < z\overline{z} = a^2 + b^2 < 4} \quad \textbf{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ $a^2+b^2=t^4+2t^3-2t$ に …………………………………………… 7 点

$\square_2$ $f(t)=t^4+2t^3-2t$ の増減表またはグラフに ………………………… 8 点

$\square_3$ 答に …………………………………………………………………… 10 点

【4】$f(x)=0$ の整数解を m，n とする．

まず，$f(m)=0$ より

$$m(m^3+am^2+bm+c)=-1$$

m，m^3+am^2+bm+c はともに整数であるから，上式より

$$m=\pm 1$$

となる．n についても同様である．よって，2 つの整数解は

$$(-1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (1,\ 1)$$

のいずれかである．

さらに，虚数解の 1 つを $\alpha=u+vi$ （u，v は実数）とすると，もう 1 つの虚数解は $\overline{\alpha}=u-vi$ となるので

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1=(x-m)(x-n)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$$

が成り立ち，両辺の定数項を比較すると

$$mn\alpha\overline{\alpha}=mn(u^2+v^2)=1 \qquad \therefore \quad mn>0$$

となるから，2 つの整数解から $(-1,\ 1)$ の場合は除かれる．

(i) 2 つの整数解が $(1,\ 1)$ のとき

$f(x)$ は $(x-1)^2$ を因数にもつから，x^4 の係数と定数項が 1 であることを考慮すると

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$$

とおける．すなわち

$$\begin{aligned} x^4+ax^3+bx^2+cx+1&=(x-1)^2(x^2+px+1)\\ &=x^4+(p-2)x^3+(-2p+2)x^2+(p-2)x+1 \end{aligned}$$

よって

$$a=p-2,\ b=-2p+2,\ c=p-2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また，$x^2+px+1=0$ が虚数解をもつことより

$$p^2-4<0 \qquad \therefore \quad -2<p<2$$

a，b，c が整数であることと①より，p も整数でなければならないから

$$p=-1,\ 0,\ 1$$

これらを①に代入すると

$$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$$

(ii) 2 つの整数解が $(-1,\ -1)$ のとき

同様にして，$f(x)=(x+1)^2(x^2+qx+1)$ とおけるから

$$\begin{aligned} x^4+ax^3+bx^2+cx+1&=(x+1)^2(x^2+qx+1)\\ &=x^4+(q+2)x^3+(2q+2)x^2+(q+2)x+1 \end{aligned}$$

よって

$$a=q+2,\ b=2q+2,\ c=q+2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

また，$x^2+qx+1=0$ が虚数解をもつことより，上と同様にして $q=-1,\ 0,\ 1$ となるから，これらを②に代入して

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 3)$$

以上より，求める $a,\ b,\ c$ は

$(a,\ b,\ c)=$ **$(\pm 1,\ 0,\ \pm 1),\ (\pm 2,\ 2,\ \pm 2),\ (\pm 3,\ 4,\ \pm 3)$ (複号同順)** （答）

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ 整数解が $(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のいずれかであることを示して……………5 点
$\square_2$ (ⅰ)① に…………………………………………………………2 点
$\square_3$ 「$p^2-4<0$」や「$p=-1,\ 0,\ 1$」などに……………………………2 点
$\square_4$ (ⅱ)② に…………………………………………………………2 点
$\square_5$ 「$q^2-4<0$」や「$q=-1,\ 0,\ 1$」などに……………………………2 点
$\square_6$ (答)$(a,\ b,\ c)$ 1 組につき 2 点……………………………………12 点

MJB

直前東大文系数学発展演習

【1 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	