MJB

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大文系数学発展演習

【2 回目】

問題

【1】まず，$f(n)$ が

$$f(n)=5^{2n}(5^n+1)+5^n+1=(5^n+1)(5^{2n}+1)$$

と分解できることに着目する．

(1) 一般に，正整数 N が奇数のとき，次が成り立つ：

$$x^N+1=(x+1)(x^{N-1}-x^{N-2}+\cdots-x+1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

これを用いて，題意を示す．

n は 4 の倍数でないから，n を 4 で割った余りは 1，2，3 のいずれかである．

(i) n を 4 で割って余りが 1 または 3 であるとき，n は奇数である．よって $f(n)$ の因数 $5^{2n}+1$ について

$$5^{2n}+1=25^n+1$$

に着目すると，n が奇数であることから，①で $x=25$ として 25^n+1 は $25+1=26=2\cdot13$ を因数にもつ．よって確かに $13\mid f(n)$ が成り立つ．

(ii) n を 4 で割って，余りが 2 であるとき，奇数 m について $n=2m$ が成り立つ．よって $f(n)$ の因数 5^n+1 について，

$$5^n+1=5^{2m}+1=25^m+1$$

で m が奇数であるから，(i) と同様にして 5^n+1 は $25+1=2\cdot13$ を因数にもつ．よってこのときにも，$13\mid f(n)$ が成立．

以上，(i)，(ii) より，題意が成立する． （証終）

(2) 13 を法とする合同について考察する．

条件 $4\mid n$ より k を正整数として $n=4k$ と置ける．このとき，

$$\begin{aligned}f(n)&=(5^n+1)(5^{2n}+1)\\&=(5^{4k}+1)(5^{8k}+1)\\&=(25^{2k}+1)(25^{4k}+1)\\&\equiv\{(-1)^{2k}+1\}\{(-1)^{4k}+1\}\pmod{13}\quad(\because 25\equiv-1\pmod{13})\\&=2\cdot2=4\end{aligned}$$

よって $f(n)\equiv4\pmod{13}$ が成り立つから，

$4\mid n$ のとき，$f(n)$ を 13 で割った余りは **4** （答）

■ 参考

(1) 13 を法とする合同について考えると，極めて鮮明な次の証明が得られる：

$25\equiv-1\pmod{13}$ であるから，

(i) n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}5^{2n}+1=25^n+1&\equiv(-1)^n+1\pmod{13}\\&=-1+1=0 \qquad \therefore\quad f(n)\equiv0\pmod{13}\end{aligned}$$

(ii) n が偶数でかつ 4 の倍数でないとき，つまり m を奇数として $n=2m$ のとき

$$5^n+1=25^m+1\equiv(-1)^m+1 \pmod{13}$$
$$=-1+1=0 \qquad \therefore \quad f(n)\equiv 0 \pmod{13}$$

いずれにしても，

$$f(n)\equiv 0 \pmod{13} \qquad \therefore \quad 13 \mid f(n)$$

■ 補足

一般に整数 a が整数 b で割り切れるとき，$b \mid a$ と表す.

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 15 点　　(2) 10 点

(1) $\square_1$ $5^{3n}+5^{2n}+5^n+1=(5^n+1)(5^{2n}+1)$ の因数分解に……………… 3 点

$\square_2$ x^N+1 の因数分解（①式）に……………………………………… 4 点

$\square_3$ (i) の証明ができて……………………………………………… 4 点

$\square_4$ (ii) の証明ができて……………………………………………… 4 点

(2) $\square_1$ 余りが 4 となる説明に ……………………………………………… 5 点

$\square_2$ 答の「余り 4」に …………………………………………………… 5 点

【2】赤球 r 個，白球 w 個の状態を $(r,\ w)$ で表せば，すべての状態は

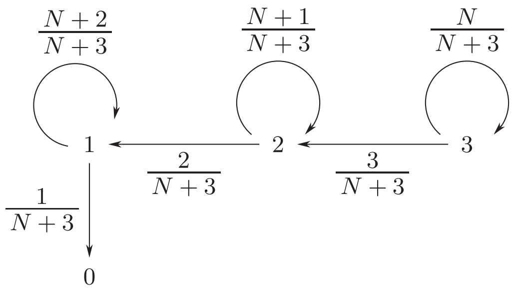
$$(1,\ N+2),\ (2,\ N+1),\ (3,\ N),\ (0,\ N+3),$$

で尽くされる．更に，袋の中の球の総数は常に $(N+3)$ 個であることから，赤球の個数 r が定まれば状態は一意的に決定するから，$r=1,\ 2,\ 3,\ 0$ の状態をそれぞれ

1　2　3　0

で表すと，次の図 1 状態遷移図を得る．

図 1　状態遷移図



(1) n 回目の試行の前に，$r=i$（ただし $r=1,\ 2,\ 3$）である確率を $Q_{i,\,n}$ と表すと，事象

n 回目の試行の前に $r=i$ であり，かつ赤球が取り出される

の確率 $P_{i,\,n}$ について，次が成り立つ：

$$P_{1,n}=Q_{1,n}\cdot\frac{1}{N+3} \qquad \therefore\quad Q_{1,n}=(N+3)P_{1,n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$P_{2,n}=Q_{2,n}\cdot\frac{2}{N+3} \qquad \therefore\quad Q_{2,n}=\frac{N+3}{2}P_{2,n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$P_{3,n}=Q_{3,n}\cdot\frac{3}{N+3} \qquad \therefore\quad Q_{3,n}=\frac{N+3}{3}P_{3,n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

また，図 1 より

$$Q_{1,n+1}=Q_{1,n}\cdot\frac{N+2}{N+3}+Q_{2,n}\cdot\frac{2}{N+3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$$Q_{2,n+1}=Q_{2,n}\cdot\frac{N+1}{N+3}+Q_{3,n}\cdot\frac{3}{N+3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$Q_{3,n+1}=Q_{3,n}\cdot\frac{N}{N+3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

④，①，②から

$$(N+3)P_{1,n+1}=(N+3)P_{1,n}\cdot\frac{N+2}{N+3}+\frac{N+3}{2}P_{2,n}\cdot\frac{2}{N+3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{P_{1,n+1}=\frac{N+2}{N+3}P_{1,n}+\frac{1}{N+3}P_{2,n}} \quad \text{（答）}$$

同様に⑤，②，③から

$$\frac{N+3}{2}P_{2,n+1}=\frac{N+3}{2}P_{2,n}\cdot\frac{N+1}{N+3}+\frac{N+3}{3}P_{3,n}\cdot\frac{3}{N+3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{P_{2,n+1}=\frac{N+1}{N+3}P_{2,n}+\frac{2}{N+3}P_{3,n}} \quad \text{（答）}$$

⑥, ③から

$$\frac{N+3}{3}P_{3,n+1}=\frac{N+3}{3}P_{3,n}\cdot\frac{N}{N+3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{P_{3,n+1}=\frac{N}{N+3}P_{3,n}}\quad \text{(答)}$$

（2）$r=1$，$r=2$，$r=3$ であるという事象は排反であるから，

$$P_n=P_{1,n}+P_{2,n}+P_{3,n}$$

が成り立つ．従って，添え字 n を $n+1$ にすると

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=P_{1,n+1}+P_{2,n+1}+P_{3,n+1}\\&=\frac{N+2}{N+3}P_{1,n}+\frac{1}{N+3}P_{2,n}+\frac{N+1}{N+3}P_{2,n}+\frac{2}{N+3}P_{3,n}+\frac{N}{N+3}P_{3,n}\\&=\frac{N+2}{N+3}(P_{1,n}+P_{2,n}+P_{3,n})=\frac{N+2}{N+3}P_n\end{aligned}$$

が成り立つ．

$P_1=\dfrac{3}{N+3}$ であるから，数列 $\{P_n\}$ は初項 $\dfrac{3}{N+3}$，公比 $\dfrac{N+2}{N+3}$ の等比数列になり，

$$\boldsymbol{P_n=\frac{3}{N+3}\left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1}}\quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）15 点　　（2）10 点

（1）□$_1$ 「図 1　状態遷移図」のような状態が把握できていれば……………3 点

□$_2$ $P_{1,n+1}$ を $P_{1,n}$ と $P_{2,n}$ で表して……………………………………4 点

□$_3$ $P_{2,n+1}$ を $P_{2,n}$ と $P_{3,n}$ で表して……………………………………4 点

□$_4$ $P_{3,n+1}=\dfrac{N}{N+3}P_{3,n}$ に……………………………………………4 点

（2）□$_1$ $P_n=P_{1,n}+P_{2,n}+P_{3,n}$ に……………………………………………3 点

□$_2$ $P_{n+1}=\dfrac{N+2}{N+3}P_n$ を導いて……………………………………………3 点

□$_3$ 答に………………………………………………………………………4 点

【3】(1) 与えられたベクトルの和を求めると，任意の非負整数 n について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{6n}\mathrm{P}_{6n+1}}+\overrightarrow{\mathrm{P}_{6n+1}\mathrm{P}_{6n+2}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{P}_{6n+5}\mathrm{P}_{6n+6}}$$
$$=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}-a\overrightarrow{u}-b\overrightarrow{v}-c\overrightarrow{w}$$
$$=\overrightarrow{0}$$

であるから，2 点 P_{6n} と P_{6n+6} は一致する．

従って，一般に 6 を法として

$$i\equiv j \pmod 6 \Longleftrightarrow \mathrm{P}_i=\mathrm{P}_j$$

が成り立つから，点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は周期 6 をもつ循環点列となる．a，b，c はすべて正であるから，図形 $\mathrm{P}_{6n}\mathrm{P}_{6n+1}\mathrm{P}_{6n+2}\cdots\mathrm{P}_{6n+5}$ は 6 角形を作る．これを H とする．

図 1　3 つの単位ベクトル

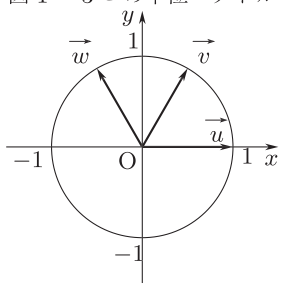
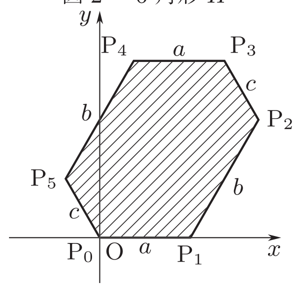


図 2　6 角形 H



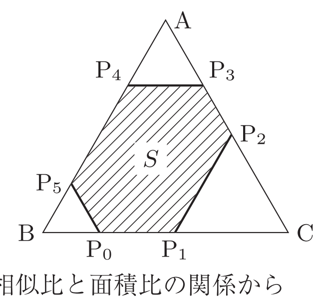
さらに，図 1 のように，$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ の，x 軸正方向とのなす角はそれぞれ 0，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$ であるから，H の内角はすべて $\dfrac{2\pi}{3}$ となり，対辺の長さは 3 組ともすべて等しい．

これを図示して，図 2 を得る．

(2) 点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は周期 6 で循環するから，特に H を $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\cdots\mathrm{P}_5$ として一般性を失わない．

辺 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ を両方向へ延長して，交点を図 3 のように A，B，C と定めれば，△ABC は正 3 角形となり，その 1 辺は $a+b+c$ となる．

図 3　H の面積 S



この面積を S とすると，相似比と面積比の関係から

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b+c)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(ab+bc+ca)$$

となる．この S を，$4a+3b+2c=1$ の下で最大にする．

$V=ab+bc+ca$ とする．$c=\dfrac{1-4a-3b}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned}V&=ab+(b+a)\cdot\frac{1-4a-3b}{2}\\&=-\frac{1}{2}(a+b)(4a+3b-1)+ab\\&=-2a^2+\frac{1-5b}{2}a-\frac{3}{2}b^2+\frac{1}{2}b\\&=-2\left(a-\frac{1-5b}{8}\right)^2+\frac{(1-5b)^2}{32}-\frac{3}{2}b^2+\frac{1}{2}b\end{aligned}$$

この第 2 項目以降は

$$-\frac{23}{32}b^2+\frac{6}{32}b+\frac{1}{32}=\frac{1}{32}(-23b^2+6b+1)$$

となり，

$$-23b^2+6b+1=-23\left(b-\frac{3}{23}\right)^2+\frac{32}{23}$$

と平方完成されるから，結局

$$V=-2\left(a-\frac{1-5b}{8}\right)^2-\frac{23}{32}\left(b-\frac{3}{23}\right)^2+\frac{1}{23}$$

を得る．

従って，V が最大となるのは

$$a-\frac{1-5b}{8}=0 \text{ かつ } b=\frac{3}{23}\iff a=\frac{1}{23},\ b=\frac{3}{23},\ c=\frac{5}{23}$$

のときで，これは $a,\ b,\ c$ が正であるという条件をみたす．

このとき，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}V$ より

$$\boldsymbol{\max S=\frac{\sqrt{3}}{46},\ (a,\ b,\ c)=\left(\frac{1}{23},\ \frac{3}{23},\ \frac{5}{23}\right)} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）15 点　　（2）10 点

（1）$\square_1$ $\overrightarrow{\mathrm{P}_{6n}\mathrm{P}_{6n+1}}+\overrightarrow{\mathrm{P}_{6n+1}\mathrm{P}_{6n+2}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{P}_{6n+5}\mathrm{P}_{6n+6}}=\overrightarrow{0}$ を示して ……5 点

$\square_2$ 6 角形の内角がすべて $\dfrac{2}{3}\pi$ であることに気づいて ……5 点

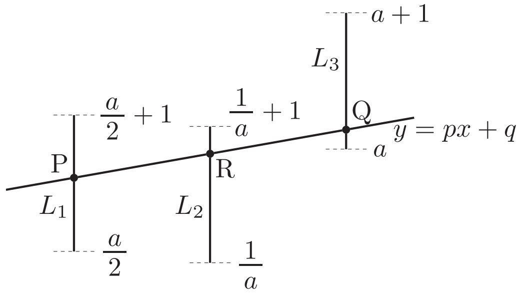
$\square_3$ 図示に ……5 点

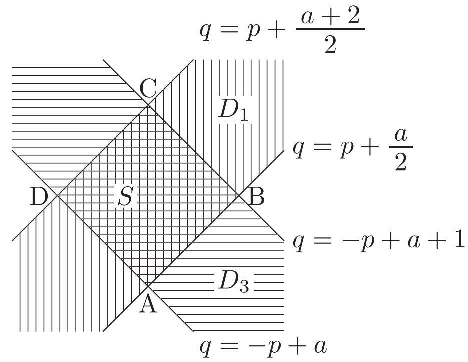
（2）$\square_1$ $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a+b+c)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)$ に ……3 点

$\square_2$ 最大値に ……4 点

$\square_3$ $(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{23},\ \dfrac{3}{23},\ \dfrac{5}{23}\right)$ に ……3 点

【4】





（1）$l: y=px+q$ が線分 L_1 と共有点 P をもつならば，その x 座標は -1 であるから，$\mathrm{P}(-1,\ -p+q)$ である．従って，y 座標について

$$\frac{a}{2} \leqq -p+q \leqq \frac{a}{2}+1 \Longleftrightarrow p+\frac{a}{2} \leqq q \leqq p+\frac{a}{2}+1$$

が成り立つ．これは，pq 座標平面で右上図の帯状領域 D_1 を表す．

同様に線分 L_3 と共有点 Q をもつことから，

$$a \leqq p+q \leqq a+1 \Longleftrightarrow -p+a \leqq q \leqq -p+a+1$$

が成り立つ．これは，pq 座標平面で右上図の帯状領域 D_3 を表す．

このいずれもが成り立つとき，直線 l は 2 本の線分 L_1，L_3 の両方と共有点をもつ．従って，求める条件は

$$\left(p+\frac{a}{2} \leqq q \leqq p+\frac{a}{2}+1\right) \wedge (-p+a \leqq q \leqq -p+a+1)$$

となり（ここで $\wedge$ は，「かつ」(and) を表す），pq 座標平面に図示すれば，**右上図の正方形領域 $\boldsymbol{S=D_1 \cap D_3}$** となる．（答）

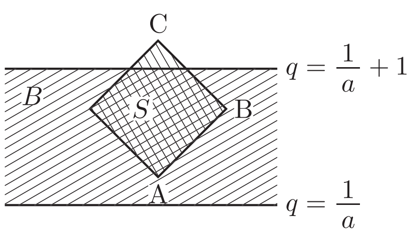
（2）直線 $l: y=px+q$ が，線分 L_2 と共有点 R をもつとすれば，$\mathrm{R}(0,\ q)$ であるから，

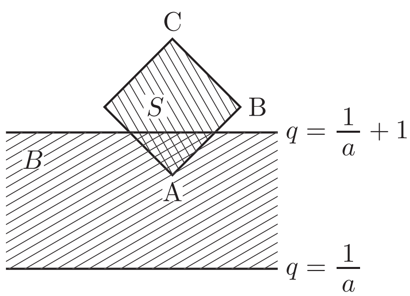
$$\frac{1}{a} \leqq q \leqq \frac{1}{a}+1$$

であり，これは下図の帯状領域 B となる．従って l が 3 線分 L_1，L_2，L_3 と共有点をもつためには，(1) で求めた集合 S と，この帯状領域 B が共有点をもつこと，つまり，S と B の共通部分が空集合でないこと

$$S \cap B \neq \phi$$

が必要かつ十分である．





点 A と点 C の q 座標を求める．A は 2 直線 $q=p+\frac{a}{2}$ と $q=-p+a$ の交点で

あるから，連立して $p=\dfrac{a}{4}$，$q=\dfrac{3a}{4}$ を得る．よって $\mathrm{A}(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{3a}{4})$．また，A と C の p 座標は等しく，q 座標の差は 1 であるから，$\mathrm{C}(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{3a}{4}+1)$ である．

正方形領域 S と帯状領域 B について，

$$S\cap B\neq\phi \iff \left(\frac{3a}{4}\leqq\frac{1}{a}+1\right)\wedge\left(\frac{3a}{4}+1\geqq\frac{1}{a}\right)$$

である．これらの不等式を解く．$a>0$ であるから

$$\frac{3a}{4}\leqq\frac{1}{a}+1$$
$$\iff 3a^2\leqq 4+4a$$
$$\iff (3a+2)(a-2)\leqq 0$$
$$\iff -\frac{2}{3}\leqq a\leqq 2$$
$$\frac{3a}{4}+1\geqq\frac{1}{a}$$
$$\iff 3a^2+4a\geqq 4$$
$$\iff (3a-2)(a+2)\geqq 0$$
$$\iff a\leqq -2,\ \frac{2}{3}\leqq a$$

これらの共通部分を求めて，

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}\leqq a\leqq 2}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）11 点　　（2）14 点

（1）$\square_1$ $p+\dfrac{a}{2}\leqq q\leqq p+\dfrac{a}{2}+1$ に……4 点

$\square_2$ $-p+a\leqq q\leqq -p+a+1$ に……4 点

$\square_3$ 図示に……3 点

（2）$\square_1$ $\dfrac{1}{a}\leqq q\leqq\dfrac{1}{a}+1$ に……4 点

$\square_2$ $\dfrac{3}{4}a\leqq\dfrac{1}{a}+1$ かつ $\dfrac{3}{4}a+1\geqq\dfrac{1}{a}$ に……5 点

$\square_3$ $\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq 2$ に……5 点

MJB

直前東大文系数学発展演習

【2 回目】

会員番号		氏　名	