MJB

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大文系数学発展演習

【3 回目】

問題

【1】(イ) より

$$f'(x)=3a(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\} \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる．

$$\begin{aligned} f'(x)&=3a\{x^2-2(\alpha+1)x+\alpha(\alpha+2)\} \\ &=3a[\{x-(\alpha+1)\}^2-(\alpha+1)^2+\alpha(\alpha+2)] \end{aligned}$$

であるから，(ウ) より

“$\alpha+1=2$ かつ $3a<0$” $\iff$ “$\alpha=1$ $\cdots\cdots$② かつ $a<0$ $\cdots\cdots$③”

②を①に代入すると

$$f'(x)=3a(x-1)(x-3)=3a(x^2-4x+3)$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x)&=\int 3a(x^2-4x+3)\,dx \\ &=3a\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)+d \\ &=a(x^3-6x^2+9x)+d \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

③より，$f(x)$ は $x=(\alpha+2=)\ 3$ で極大値，$x=(\alpha=)\ 1$ で極小値をとるから，(ア) より，$f(3)=3$ かつ $f(1)=-5$ である．

よって，$f(3)=d$，$f(1)=4a+d$ より

“$d=3$ かつ $4a+d=-5$” $\iff (a,\ d)=(-2,\ 3)$ （③をみたす）

これらを $(*)$ に代入すると

$$f(x)=-2x^3+12x^2-18x+3$$

であるから

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(-2,\ 12,\ -18,\ 3)} \quad （答）$$

■ 注意

変曲点で傾きが最大（あるいは最小）となり，この点で 3 次関数のグラフが対称であることを使うと，(イ) から $x=3$ で極大，$x=1$ で極小がわかる．

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ 条件 (イ) を式で表して $\cdots\cdots$ 6 点

$\square_2$ 条件 (ウ) を式で表して $\cdots\cdots$ 6 点

$\square_3$ 条件 (ア) を式で表して $\cdots\cdots$ 5 点

$\square_4$ a，b，c，d の値に各 2 点 $\cdots\cdots$ 8 点

【2】$abcdef = a+b+c+d+e+f \quad \cdots\cdots①$ の両辺を $abcdef$ で割ると

$$1 = \frac{1}{bcdef} + \frac{1}{acdef} + \frac{1}{abdef} + \frac{1}{abcef} + \frac{1}{abcdf} + \frac{1}{abcde}$$

$a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq e \geqq f \geqq 1 \cdots\cdots②$ より，上式の右辺の 6 項の中で $\dfrac{1}{bcdef}$ が最大であるから

$$1 \leqq \frac{6}{bcdef} \qquad \therefore \quad bcdef \leqq 6 \quad \cdots\cdots(*)$$

②より，$bcdef \geqq f^5$ であるから

$$f^5 \leqq 6 \qquad \therefore \quad 1 \leqq f \leqq \sqrt[5]{6}$$

f は正の整数であるから

$$f = 1$$

これを $(*)$ に代入すると

$$bcde \leqq 6$$

同様に，順次

$$e^4 \leqq 6,\ e=1,\ d^3 \leqq 6,\ d=1,\ c^2 \leqq 6,\ c=1,\ 2$$

が導かれる．よって，$d=e=f=1$ であるから，①より

$$abc = a+b+c+3 \quad \cdots\cdots①'$$

(i) $c=1$ のとき

$$①' \iff ab = a+b+4 \iff ab-a-b=4 \iff (a-1)(b-1)=5$$

a，b は整数，$a \geqq b \geqq c = 1$ より，$a-1$，$b-1$ は $a-1 \geqq b-1 \geqq 0$ をみたす整数であるから

$$(a-1,\ b-1) = (5,\ 1) \iff (a,\ b) = (6,\ 2)$$

(ii) $c=2$ のとき

$$①' \iff 2ab = a+b+5 \iff ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{5}{2}$$

$$\iff \left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} \iff (2a-1)(2b-1)=11$$

a，b は整数，$a \geqq b \geqq c = 2$ より，$2a-1$，$2b-1$ は $2a-1 \geqq 2b-1 \geqq 3$ をみたす整数であるが，11 は素数であるから，これをみたす a，b は存在しない．

以上の (i)，(ii) より

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f) = (6,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ $d=e=f=1$ を示して ……………………………… 5 点
$\square_2$ $c \leqq 2$ を示して ……………………………… 5 点
$\square_3$ $c=1$ のときの考察に ……………………………… 5 点
$\square_4$ $c=2$ のときの考察に ……………………………… 5 点
$\square_5$ 答に ……………………………… 5 点

【3】2 接点を A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$ $(a \fallingdotseq b)$ とおくと，$y' = 2x$ より，A，B における接線は，
それぞれ

$$y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$y = 2bx - b^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2 \iff 2(a-b)x = (a-b)(a+b) \iff x = \frac{a+b}{2}$$

なので，交点は $\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$ であり，これが P だから

$$ab = -\left(\frac{a+b}{2} - 1\right)^2 - 1 \quad \cdots\cdots ③$$
$$\frac{a+b}{2} \leqq 1 \quad \cdots\cdots ④$$

直線 l つまり，直線 AB の式は

$$y = \frac{a^2-b^2}{a-b}(x-a) + a^2 = (a+b)x - ab$$

$\dfrac{a+b}{2} = t$ とおくと，③，④より

$$y = 2tx + (t-1)^2 + 1 \quad \cdots\cdots ⑤$$
$$t \leqq 1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤より

$$t^2 - 2(1-x)t + 2 - y = 0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

求める通過範囲は，t が⑥の範囲で変化したときの直線⑤の通過範囲．つまり

（2 次方程式）⑦が⑥の範囲に（少なくとも 1 つ）解をもつ　$\cdots\cdots$ ⑧

ような点 $(x,\ y)$ の集合である．

⑦の左辺 $= f(t) = \{t-(1-x)\}^2 - \{y + (x-1)^2 - 2\}$ とおく．

(i) $1 - x \geqq 1$ つまり $x \leqq 0$ のとき

⑧ $\iff f(1) \leqq 0 \qquad \therefore \quad y \geqq 2x + 1$

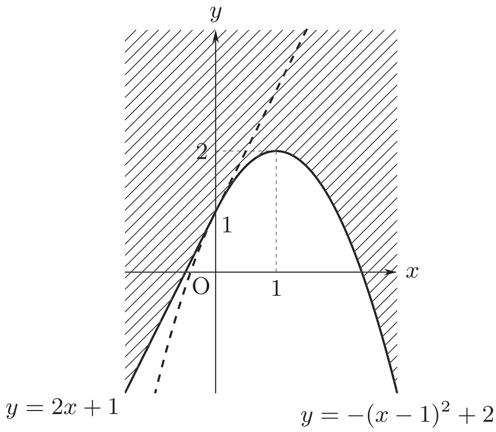
(ii) $1 - x < 1$ つまり $x > 0$ のとき

⑧ $\iff f(1-x) \leqq 0 \qquad \therefore \quad y \geqq -(x-1)^2 + 2$

以上より

$y \geqq 2x+1$ $(x \leqq 0)$ または $y \geqq -(x-1)^2+2$ $(x > 0)$　（答）

これを図示すると，**図の斜線部（ただし，境界線上も含む）．**（答）



【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ 2 接線の式を求めて ……………………………………………… 5 点

$\square_2$ 直線 l の式を求めて ……………………………………………… 5 点

$\square_3$ $t^2-2(1-x)t+2-y=0$ が $t \leqq 1$ の範囲に解をもつ ………………… 5 点

$\square_4$ l の通過範囲を x，y の不等式で表して ……………………………… 5 点

$\square_5$ 図示に ……………………………………………………………… 5 点

【4】(1) 平方数は自然数 n と整数 c（ただし，$0 \leqq c \leqq 9$）を用いて

$$(10n+c)^2 = 100n^2 + 20cn + c^2$$

と表されて

$$20cn \text{ の} \begin{cases} 10 \text{ の位は偶数} \\ 1 \text{ の位は } 0 \end{cases}, \quad 0 \leqq c^2 \leqq 81$$

である．よって，$a+b$ が偶数である条件は，c^2 の各位の数の和が偶数であることで，c の各値に対する c^2 の値は次の表のようになる．

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

したがって，$a+b$ が偶数となる c の値は

$$c = 0,\ 2,\ 8$$

であり，このとき b は c^2 の 1 の位の数で 0 または 4 である．（証終）

(2) 問題の平方数を n^2 として，これを 10000 で割った余りを m とする．m の各位の数が同じであるとき，n^2 を 100 で割った余りの各位の数の和は偶数であるから，(1) より

$$m = 0 \text{ または } m = 4444$$

ここで，$m = 4444$ であると仮定すると，自然数 k を用いて

$$n^2 = 10^4k + 4444 = 2^2(2500k + 1111)$$

と表されるが，n は偶数であるから

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 = 2500k + 1111$$

も平方数である．ところが，この平方数を 100 で割った余りは 11 であり，これは (1) の結果に矛盾する．

よって，n^2 を 10000 で割った余りは 0 であり，すなわち，この平方数は 10000 で割り切れる．（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) □$_1$ $(10n+c)^2 = 100n^2 + 20cn + c^2$ に……………………3 点
□$_2$ $c = 0,\ 2,\ 8$ にしぼり込んで……………………5 点
□$_3$ 結論に……………………2 点

(2) □$_1$ 「$m = 0$ または $m = 4444$」に……………………5 点
□$_2$ $\left(\frac{n}{2}\right)^2 = 2500k + 1111$ に……………………5 点
□$_3$ $2500k + 1111$ が平方数になりえないことを示して……………………5 点

MJB

直前東大文系数学発展演習

【3 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	