直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前一橋大数学総合演習

【1 回目】

問題

【1】$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数であるから，

(ｉ) $f(-1)=a-b+c$ は整数

(ii) $f(0)=c$ は整数,

(iii) $f(1)=a+b+c$ は整数

である．

(ｉ) と (ii) により，$a-b$ は整数，(ii) と (iii) により，$a+b$ は整数である．

題意の成立には，

$$\text{任意の整数 } n \text{ について } f(n)-c=an^2+bn \text{ が整数である}$$

ことを示せば十分である．以下，これを示す．

p と q を整数として $a+b=p$，$a-b=q$ とすると，

$$2a=p+q,\ 2b=p-q \Longleftrightarrow a=\frac{p+q}{2}, b=\frac{p-q}{2}$$

が成り立つ．p と q の偶奇の一致・不一致に着目して，場合を分ける．

(Ｉ) p と q の偶奇が一致するとき，和 $p+q$，差 $p-q$ はいずれも偶数になり，

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{p-q}{2}$$

が整数になる．このとき明らかに，任意の整数 n について an^2+bn は整数である．

(II) p と q の偶奇が異なるとき，和 $p+q$，差 $p-q$ はいずれも奇数．このとき，k と l を整数として

$$2a=p+q=2k-1,\ 2b=p-q=2l-1 \Longleftrightarrow a=k-\frac{1}{2},\ b=l-\frac{1}{2}$$

と表されるから

$$\begin{aligned} an^2+bn &= \left(k-\frac{1}{2}\right)n^2+\left(l-\frac{1}{2}\right)n \\ &= kn^2+ln-\frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

n と $n+1$ は隣接する 2 つの整数であるから，その積は偶数になり，よって $\frac{1}{2}n(n+1)$ は整数．従って an^2+bn は整数．

以上，(Ｉ) と (II) のいずれの場合にも，任意の整数 n について an^2+bn が整数になるから，c が整数であることと合わせて命題

$$\text{任意の整数 } n \text{ について } f(n)=an^2+bn+c \text{ は整数である}$$

が成り立つ．（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ c が整数であることを述べて ……………………………… 5 点

$\square_2$ $a-b$, $a+b$ がともに整数であることを示して ……………………… 5 点

$\square_3$ $a+b$, $a-b$ の偶奇が一致する場合 (I) の考察に ………………… 5 点

$\square_4$ $a+b$, $a-b$ の偶奇が異なる場合 (II) の考察に ………………… 10 点

【2】底面の正方形の中心 (対角線の交点) を K とし，K を原点，KB を x 軸正の部分，KC を y 軸正の部分，KO を z 軸正の部分に重ねて，座標空間で考える．図 1 を参照されたい．

図 1　見取り図

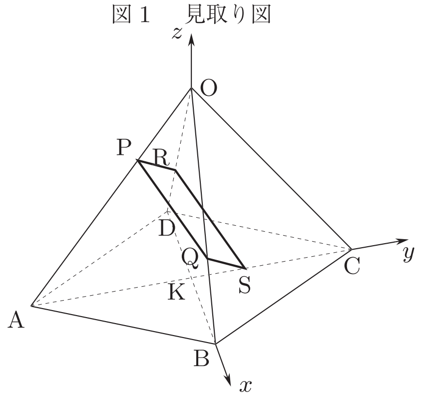
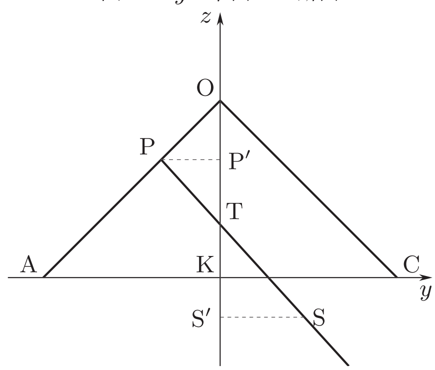


図 2　yz 平面での断面



(1) 平面 OAC に関する面対称性によって，平行 4 辺形 PQSR は PQ = PR のひし形になる．よって，その対角線 PS，QR は互いに他を垂直に 2 等分する．

yz 平面による切り口，つまり △OAC を考える．図 2 を参照のこと．2 点 P と S から z 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ P′，S′ とし，また OK と PS の交点を T とする．

yz 平面で $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)$ であり，PT // OC であるから，

$$\text{直線 PT}: z-\frac{2}{3\sqrt{2}}=-\left(y+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\iff z=-y+\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$\mathrm{P'T}=\mathrm{TS'}$ より，

$$\mathrm{TS'}=\mathrm{P'T}=\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

よって S′ は K に一致するから，点 S は底面 ABCD 上にある．　(証終)

従って

$$\mathrm{OQ}=\sqrt{2}\mathrm{OT}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\quad(\text{答})$$

(2) xyz 空間で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めると，

$$\mathrm{P}\left(0,\ \frac{-1}{3\sqrt{2}},\ \frac{2}{3\sqrt{2}}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right),\ \mathrm{R}\left(-\frac{2}{3\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{2}{3\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)-\left(0,\ \frac{-1}{3\sqrt{2}},\ \frac{2}{3\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{2}}(2,\ 1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-2,\ 1,\ -1)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{18}(-4+1+1)=-\frac{1}{9}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の大きさについて

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2=\frac{1}{18}(4+1+1)=\frac{1}{3}$$

従って

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|}=\frac{-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}}\quad（答）$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）15 点　　　（2）10 点

（1）$\square_1$ 点 S が 4 角すいの底面上にあることを示して …………………… 10 点

$\square_2$ OQ$=\dfrac{2}{3}$ に …………………………………………………… 5 点

（2）$\square_1$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\dfrac{1}{9}$ に ……………………………………………… 5 点

$\square_2$ $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ に ………………………………………………… 5 点

【3】A 子さんのコインの枚数を y 枚として，横軸に試行の回数，縦軸に y をとり，状態の推移をグラフに表す．このようなグラフをダイアグラムと呼ぶ．

以下で，ダイアグラムにおける点 P から点 Q への経路の個数を $\#(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q})$ で，またこの経路に対応する事象が起きる確率を $p(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q})$ で表す．

(1) A 子さんのコインの枚数が 5 回目に初めて 0 枚となるような状態の推移は，図 1 のような経路である．

$\#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}) = 3$，$\#(\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{B}) = 1$ であるから，

$$p(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ p(\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{B}) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

であるから，求める確率 p_1 は

$$p_1 = p(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}) \cdot p(\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{B}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{3}{32}} \quad (\text{答})$$

図 1

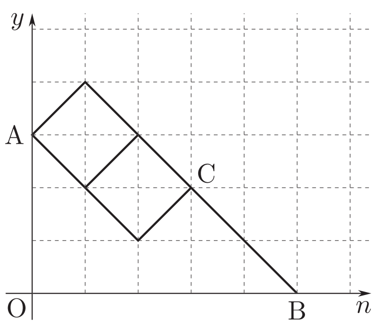
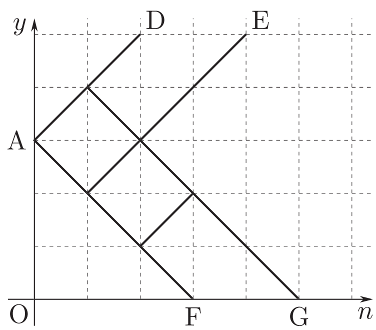


図 2



(2) (1) と同様にしてダイアグラムを描く．5 回以内でゲームが終了するのは，図 2 における経路であり，これ以外には存在しない．更に，4 個の事象 A ⇒ D，A ⇒ E，A ⇒ F，A ⇒ G はすべて排反である．

それぞれの確率を求めると

$$\#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{D}) = 1 \qquad \therefore \quad p(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{D}) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{E}) = 2 \qquad \therefore \quad p(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{E}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

$$\#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{F}) = 1 \qquad \therefore \quad p(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{F}) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{G}) = 3 \qquad \therefore \quad p(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{G}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{32}$$

よって求める確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} = \boldsymbol{\frac{19}{32}} \quad (\text{答})$$

(3) (1)，(2) と同様にしてダイアグラムを描くと，題意をみたす事象に対応する経路は図 3 のようになる．

図 3

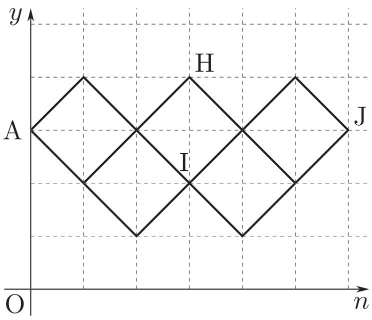
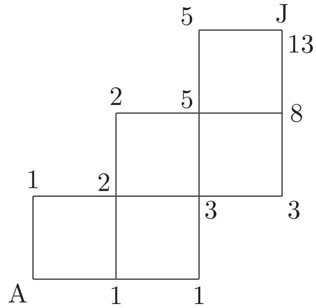


図 4



この経路が作る図形は，直線 HI に関して対称であることに着目する．A から J に至るどの経路も確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$ であり，また，

$$\#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{H}) = 2,\ \#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{I}) = 3$$

であるから，対称性を考えて，経路の総数は

$$\#(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{J}) = 2^2 + 3^2 = 13$$

となる．よって求める確率 p_3 は

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 13 = \boldsymbol{\frac{13}{64}} \quad \text{（答）}$$

■ 参考

この程度のスケールの問題であれば，図 4 のように，経路の個数を直接求めることもできる．

2 項定理と同じ漸化式，

$$f(m,\ n) = f(m-1,\ n) + f(m,\ n-1)$$

が成り立つことに注意．

【配点の目安】

配点：25 点

（1）7 点　（2）11 点　（3）7 点

（1）$\square_1$ どういう場合か（例：ダイヤグラム上の経路）を把握できて ………… 3 点
$\square_2$ 答に ………………………………………………………… 4 点

（2）$\square_1$ どういう場合か（例：ダイヤグラム上の経路）を把握できて ………… 5 点
$\square_2$ 答に ………………………………………………………… 6 点

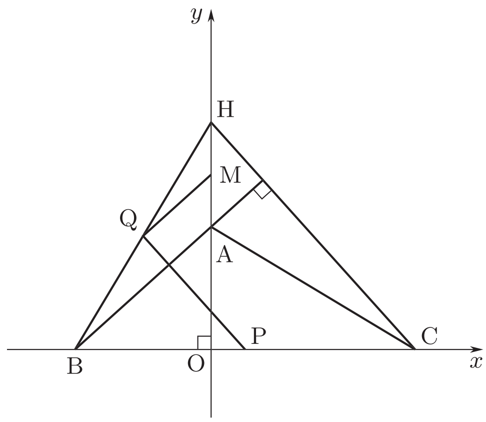
（3）$\square_1$ どういう場合か（例：ダイヤグラム上の経路）を把握できて ………… 3 点
$\square_2$ 答に ………………………………………………………… 4 点

【4】(1) △BCH の垂心が A であるから，点 A を通り，BC に垂直な直線（y 軸）と，点 C を通り AB に垂直な直線

$$y = \frac{b}{a}(x-c)$$

との交点が H である．よって，その座標は

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{0},\ -\frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{a}}\right) \quad \text{（答）}$$



(2) M は線分 HA の中点, P は線分 BC の中点, Q は線分 BH の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(0,\ \frac{a^2-bc}{2a}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{b+c}{2},\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{b}{2},\ -\frac{bc}{2a}\right)$$

である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(\frac{b}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(-\frac{c}{2},\ -\frac{bc}{2a}\right)$$

となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\frac{bc}{4} + \frac{bc}{4} = 0$$

ゆえに

$$\angle \mathrm{PQM} = 90^\circ$$ （証終）

(3) (2) の結果より，点 P, Q, M を通る円は，PM を直径とする円であるから，その中心 N の座標は，線分 PM の中点の座標として

$$\mathbf{N}\left(\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\mathbf{4}},\ \frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{bc}}{\mathbf{4}\boldsymbol{a}}\right) \quad \text{（答）}$$

(4) 点 P，Q，M を通る円，すなわち PM を直径とする円の方程式は

$$\left(x-\frac{b+c}{2}\right)(x-0)+(y-0)\left(y-\frac{a^2-bc}{2a}\right)=0$$

であり，この左辺に $x=y=0$ を代入すると

$$\left(0-\frac{b+c}{2}\right)(0-0)+(0-0)\left(0-\frac{a^2-bc}{2a}\right)=0$$

となるので，この円は原点を通る． （証終）

また，R は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\mathrm{R}\left(\frac{b}{2},\ \frac{a}{2}\right)$$

であり，$x=\dfrac{b}{2}$，$y=\dfrac{a}{2}$ を円の方程式の左辺に代入すると

$$\left(\frac{b}{2}-\frac{b+c}{2}\right)\cdot\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2-bc}{2a}\right)=-\frac{bc}{4}+\frac{bc}{4}=0$$

となるので，この円は点 R を通る. （証終）

■ 別解

平面幾何の知識のみで証明する方法を紹介しておく.

(2) 中点連結定理より

$$\mathrm{QP} \,/\!/\, \mathrm{HC},\ \mathrm{QM} \,/\!/\, \mathrm{BA}$$

であり，かつ BA ⊥ CH であるから

$$\mathrm{QM} \perp \mathrm{QP} \text{ すなわち} \angle\mathrm{PQM}=90^\circ$$ （証終）

(4) HO ⊥ BC より

$$\angle\mathrm{MOP}=90^\circ=\angle\mathrm{MQP}$$

が成り立つから，点 P, Q, M を通る円は原点を通る. （証終）

また，中点連結定理より

$$\mathrm{RP} \,/\!/\, \mathrm{AC},\ \mathrm{MR} \,/\!/\, \mathrm{HB}$$

であり，かつ HB ⊥ AC であるから，RP ⊥ MR となる．よって

$$\angle\mathrm{MRP}=90^\circ=\angle\mathrm{MQP}$$

が成り立つから，点 P, Q, M を通る円は点 R を通る. （証終）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　(2) 5 点　(3) 5 点　(4) 10 点

(1) □$_1$ 答に ･･････････････････････････････ 5 点

(2) □$_1$ 正しく証明できて ･･････････････････････ 5 点

(3) □$_1$ 答に ･･････････････････････････････ 5 点

(4) □$_1$ 点 P，Q，M を通る円が点 R を通ることの証明に ･･････････ 5 点

□$_2$ 点 P，Q，M を通る円が原点を通ることの証明に ･･････････ 5 点

別解

(2) ■$_1$ 正しく証明できて ･･････････････････････ 5 点

(4) ■$_1$ 点 P，Q，M を通る円が原点を通ることの証明に ･･････････ 5 点

■$_2$ 点 P，Q，M を通る円が点 R を通ることの証明に ･･････････ 5 点

MFB

直前一橋大数学総合演習

【1 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	