MFB

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前一橋大数学総合演習

【3 回目】

問題

【1】(1) 任意の正整数 p について $6 \mid f(p,\ q)$ が成立するから，特に $p=1$ のときも成立し，$6 \mid f(1,\ q)$ である．ここで

$$f(1,\ q)=1\cdot 2\cdot(1+q)=2(1+q)$$

であり，これが 6 の倍数であるから，$3 \mid 1+q$ が必要である．従って，k を整数として $q+1=3k \iff q=3k-1$ となる．以上より

任意の正整数 p について $6 \mid f(p,\ q) \Longrightarrow q=3k-1$

が成り立つから，必要条件は

q が $q=3k-1$ と表されること（ここで k は整数）　…………… ①

である．

次に，①が十分条件でもあることを示す．ある整数 k について $q=3k-1$ と表されるならば，

$$\begin{aligned} f(p,\ q) &= p(p+1)(p+3k-1) \\ &= p(p+1)\{(p-1)+3k\} \\ &= p(p+1)(p-1)+3k\cdot p(p+1) \end{aligned}$$

と変形される．ここで

$(p-1)p(p+1)$ は隣接 3 整数の積だから，$3!=6$ の倍数

であり，また

$p(p+1)$ は偶数だから，$3k\cdot p(p+1)$ も $2\cdot 3=6$ の倍数

となり，$f(p,\ q)$ は 6 の倍数である．

よって $q=3k-1$ と表されること（①）は，任意の正整数 p について $6 \mid f(p,\ q)$ が成り立つための十分条件でもあるから，

任意の正整数 p について $6 \mid f(p,\ q) \iff q=3k-1$（ただし k は整数）

求める q の個数は

$$0<q=3k-1<100$$

をみたす k の個数に等しく，

$$\frac{1}{3}<k<\frac{101}{3} \iff 1 \leqq k \leqq 33$$

であるから，**33 個**（答）

(2) $f(p,\ q)=p(p+1)(p+q)$ について，

$$2 \mid f(p,\ q),\ 7 \mid f(p,\ q)$$

であるから，$f(p,\ q)$ は 14 の倍数となり，ある整数 l について

$$f(p,\ q)=2\cdot 7\cdot l$$

$l \geqq 2$ のとき，$f(p,\ q)$ は 7 より大きく $f(p,\ q)$ より小さい約数をもつことになり，題意に反する．よって，$l=1$ で

$$f(p,\ q)=p(p+1)(p+q)=2\cdot 7$$

$p(p+1)$ は偶数であるから

$$p(p+1)=2,\ p+q=7 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{p=1,\ q=6} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 15 点　　(2) 10 点

(1) $\square_1$ $q=3k-1$ が必要条件であることを述べて …… 5 点

$\square_2$ $q=3k-1$ が十分条件であることを示して …… 5 点

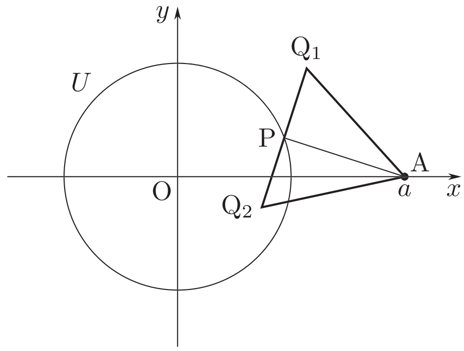
$\square_3$ 答に …… 5 点

(2) $\square_1$ $f(p,\ q)=14$ となる理由に …… 5 点

$\square_2$ 答に …… 5 点

【2】(1) P は単位円 U 上の点であるから，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおける．点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ で，$a > 1$ であるから，A は U の外部にある．図 1 参照.

図 1　点 $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$



$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (a - \cos\theta,\ -\sin\theta)$ で $a - \cos\theta > 0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と垂直なベクトル

$$\overrightarrow{v_1} = (\sin\theta,\ a - \cos\theta),\ \overrightarrow{v_2} = (-\sin\theta,\ -(a - \cos\theta))$$

のうちで

- y 成分が正である $\overrightarrow{v_1}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ_1}}$ と同じ向き,
- y 成分が負である $\overrightarrow{v_2}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ_2}}$ と同じ向き

のベクトルである.

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ_1}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin\theta,\ a-\cos\theta)$ となり，したがって点 $\mathrm{Q_1}$ の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ_1}} = (\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin\theta,\ a - \cos\theta)$$

点 $\mathrm{Q_1}(X_1,\ Y_1)$ とすれば,

$$(X_1,\ Y_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta + a)$$

$$\iff \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta\right) \\ Y_1 - \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta\right) \end{cases}$$

x 成分は cos に，y 成分は sin に合成して

$$X_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right),\ Y_1 - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

であるから，平方して加えれば

$$X_1{}^2 + \left(Y_1 - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

を得る．点 P は単位円 U を自由に動けるから，θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ 全体を動く．よって，除外点は存在しない.

以上より，求める $\mathrm{Q_1}$ の軌跡 L_1 は，中心 $\mathrm{K_1}\left(0,\ \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の円にな

り，方程式は

$$\boldsymbol{L_1 : x^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}} \quad \text{（答）}$$

(2) (1) と同様にして，点 $\mathrm{Q_2}$ の軌跡 L_2 を求める．$\mathrm{Q_2}(X_2,\ Y_2)$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ_2}}$ であるから，

$$(X_2,\ Y_2) = (\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin\theta,\ -(a-\cos\theta))$$

$$\iff \begin{cases} X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \\ Y_2 + \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\iff {X_2}^2 + \left(Y_2 + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

したがって，点 $\mathrm{Q_2}$ の軌跡 L_2 は，中心 $\mathrm{K_2}\left(0,\ -\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の円になる．図 2 参照.

図 2　2 円 L_1，L_2

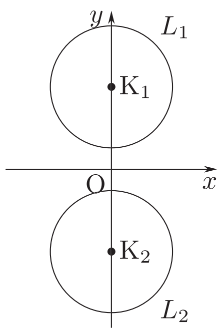
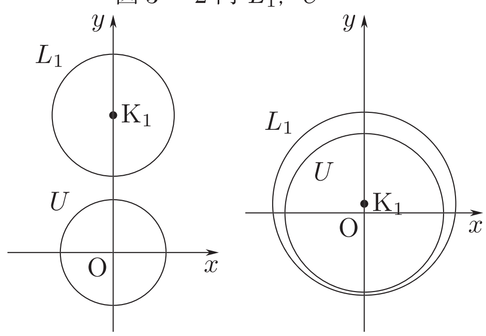


図 3　2 円 L_1，U



2 円 L_1，L_2 の中心間の距離 $d = \mathrm{K_1K_2}$ と半径の和 $r_1 + r_2$ は

$$\mathrm{K_1K_2} = \frac{2a}{\sqrt{3}},\ r_1 + r_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

であるから，題意の成立は

$$L_1 \cap L_2 = \phi \iff \frac{2a}{\sqrt{3}} > \frac{4}{\sqrt{3}} \iff \boldsymbol{a > 2} \quad \text{（答）}$$

(3) 円 L_1 の半径は $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であり，また円 U の半径は 1 であるから，

$$L_1 \cap U = \phi \iff \begin{cases} \text{(i) } U \text{ と } L_1 \text{が離れている．} \\ \text{(ii) } U \text{ が } L_1 \text{の内部に含まれる．} \end{cases}$$

のいずれかが成り立つ．図 3 参照.

(i) U と L_1 が離れているとき，半径の和は中心間の距離よりも小さいから

$$1 + \frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{a}{\sqrt{3}} \iff a > \sqrt{3} + 2$$

これは条件 $a > 1$ をみたす.

(ii) U が L_1 の内部に含まれるとき，半径の差が中心間の距離よりも大きいから

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 > \frac{a}{\sqrt{3}} \iff a < 2 - \sqrt{3}$$

これは $a > 1$ に反するから不適.

以上より，求める a の範囲は $\boldsymbol{a > \sqrt{3} + 2}$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 7 点　　(2) 10 点　　(3) 8 点

(1) $\square_1$ Q_1 の座標をパラメータ表示して……2 点

$\square_2$ 答に……5 点

(2) $\square_1$ Q_2 の座標をパラメータ表示して……2 点

$\square_2$ L_2 の方程式に……3 点

$\square_3$ 答に……5 点

(3) $\square_1$ U が L_1 の内部に含まれることがない理由に……3 点

$\square_2$ 答に……5 点

【3】点 P の x 座標を t とし，P における法線 l が点 Q で C と接するものとする．Q の x 座標を s とすると，l は Q での接線なので

$$y=(3s^2-a)(x-s)+s^3-as=(3s^2-a)x-2s^3$$

と表される．これが点 P での法線となる．点 P を通るということは，方程式

$$x^3-ax=(3s^2-a)x-2s^3 \iff x^3-3s^2x+2s^3=0$$

の 3 つの解が s，s，t ということなので，解と係数の関係から

$$2s+t=0 \iff t=-2s \quad \cdots\cdots ①$$

また，P での接線と直交するので

$$(3s^2-a)(3t^2-a)=-1$$

①より

$$(3s^2-a)(12s^2-a)=-1 \iff 36s^4-15as^2+a^2+1=0$$

$X=s^2$ とおくと，$36X^2-15aX+a^2+1=0 \quad \cdots\cdots ②$

負の s の値に対し，正の t の値がただ一つ定まる．負の s の値がただ一つ定まるためには，正の $X=s^2$ の値がただ一つ定まればよい．つまり，②が正の解をただ一つもてばよい．

2 次方程式 ② の 2 解の積は $\dfrac{a^2+1}{36}$ で，つねに正なので，②が実数解をもてば，ともに正か，ともに負である．したがって，②が正の解をただ一つもつのは，正の重解をもつときにかぎる．

これには，②の判別式 D が 0 で，解の和 $\dfrac{15a}{36}$ が正となることが，必要十分条件である．

よって

$$D=225a^2-144(a^2+1)=81a^2-144=0,\ \frac{15a}{36}>0 \qquad \therefore \quad a=\frac{4}{3}$$

このとき

$$② \iff 36X^2-20X+\frac{25}{9}=0 \iff X=s^2=\frac{5}{18}$$

$s<0$，①より

$$s=-\frac{\sqrt{10}}{6},\ t=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

以上より，l と C で囲まれる図形の面積を S とすると，l が C と Q で接し P を通ることから

$$\begin{aligned} S&=\left|\int_s^t (x-s)^2(x-t)\,dx\right| \\ &=\left|\int_s^t (x-s)^2(x-s+s-t)\,dx\right| \\ &=\left|\int_s^t (x-s)^3\,dx+(s-t)\int_s^t (x-s)^2\,dx\right| \end{aligned}$$

$$= \left| \left[\frac{(x-s)^4}{4} + (s-t)\frac{(x-s)^3}{3} \right]_s^t \right|$$

$$= \left| \frac{(t-s)^4}{4} + (s-t)\frac{(t-s)^3}{3} \right| = \frac{(t-s)^4}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6} \right)^4 = \mathbf{\frac{25}{48}} \quad \text{（答）}$$

■ 注意

解答では，最後，数 III の合成関数の積分を使っている．しかし

$$\int (x-a)^n \, dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \ (C：積分定数)$$

は文系の人でも使えるようにしておきたい．もちろん

$$(x-s)^2(x-t) = x^3 - (t+2s)x^2 + (2st+s^2)x - ts^2$$

と展開して計算しても同じ結果を得られる．

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ 直線 l の式に ・・・・・・ 3 点

□$_2$ $t = -2s$ に ・・・・・・ 3 点

□$_3$ $(3s^2 - a)(3t^2 - a) = -1$ に ・・・・・・ 3 点

□$_4$ $a = \dfrac{4}{3}$ に ・・・・・・ 3 点

□$_5$ $s = -\dfrac{\sqrt{10}}{6}$，$t = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ に ・・・・・・ 3 点

□$_6$ 答に ・・・・・・ 10 点

【4】(1) ℓ_1，ℓ_2 上の任意の点の座標は，s，t を実数として，それぞれ

$$(s,\ -1-s,\ 0),\ (1+t,\ 1+t,\ -2t)$$

とおけるから

$$(s,\ -1-s,\ 0)=(0,\ -1,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0),\ (1+t,\ 1+t,\ -2t)=(1,\ 1,\ 0)+t(1,\ 1,\ -2)$$

より，ℓ_1，ℓ_2 の方向ベクトル $\overrightarrow{\ell_1}$，$\overrightarrow{\ell_2}$ はそれぞれ

$$\overrightarrow{\ell_1}=(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{\ell_2}=(1,\ 1,\ -2)$$

である。$\mathrm{E}(s,\ -1-s,\ 0)$，$\mathrm{F}(1+t,\ 1+t,\ -2t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(1+t-s,\ 2+t+s,\ -2t)$$

ここで，$\triangle\mathrm{AFB}$，$\triangle\mathrm{CED}$ は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AB}\perp\mathrm{EF}\text{ かつ }\mathrm{CD}\perp\mathrm{EF}\qquad\therefore\quad \overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=0,\ \overrightarrow{\ell_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=0$$

より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=1\cdot(1+t-s)+(-1)\cdot(2+t+s)+0\cdot(-2t)=-1-2s=0\\ \overrightarrow{\ell_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=1\cdot(1+t-s)+1\cdot(2+t+s)+(-2)\cdot(-2t)=3+6t=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}s=-\dfrac{1}{2}\\ t=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

よって

$$\mathbf{E}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right),\ \mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{1}\right)\quad\text{（答）}$$

(2)

$$\mathrm{EF}^2=1^2+1^2+1^2=3$$

$\mathrm{AB}=2a$ とすると

$$\mathrm{BE}=a,\ \mathrm{BF}=\sqrt{3}a$$

より

$$\mathrm{BE}^2+\mathrm{EF}^2=\mathrm{BF}^2\qquad\therefore\quad a^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{3}a)^2$$

$$\therefore\quad a^2=\frac{3}{2}\qquad\therefore\quad a=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad(\because\quad a>0)$$

よって

$$\mathrm{AB}=\boldsymbol{\sqrt{6}}\quad\text{（答）}$$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\ /\!/\ \overrightarrow{\ell_1}=(1,\ -1,\ 0)$$

であり，(A の x 座標) $>$ (B の x 座標) であるから，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\ell_1}$ は同じ向きである。

よって

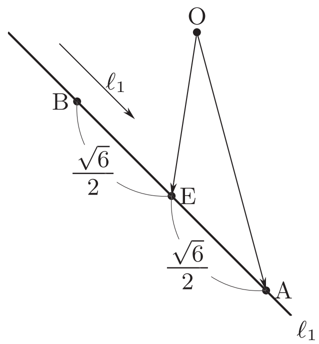
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\mathrm{AE}\cdot\frac{\overrightarrow{\ell_1}}{\left|\overrightarrow{\ell_1}\right|}$$

$$= \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,\ -1,\ 0)$$

$$= \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

よって，A の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0\right)}$$ （答）



【配点の目安】

配点：25 点

（1）15 点　　（2）5 点　　（3）5 点

（1）$\square_1$ E，F の座標を文字式で表して……………………5 点

$\square_2$ E，F の座標に（各 5 点）……………………10 点

（2）$\square_1$ 答に……………………5 点

（3）$\square_1$ 答に……………………5 点

MFB

直前一橋大数学総合演習

【3 回目】

会員番号		氏　名	