MMA

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前難関大理系数学

【1 回目】

問題

【1】(1) 円 C と接線の方程式は，それぞれ

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=mx & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

とおける．② が ① の接線となる条件は，y を消去した 2 次方程式

$$(x-2)^2+(mx-2)^2=2$$

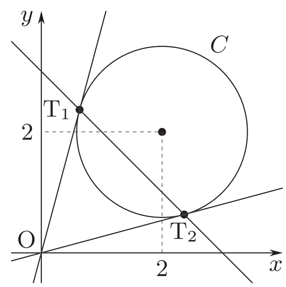
$$\iff (1+m^2)x^2-4(1+m)x+6=0 \quad \cdots ③$$

が重解をもつことであるから，判別式を考えて

$$\{2(1+m)\}^2-6(1+m^2)=0$$

これを解いて

$$m^2-4m+1=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{m=2\pm\sqrt{3}} \quad \text{（答）}$$



(2) ① 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-2)(x-2)+(y_1-2)(y-2)=2$$

これが原点を通るとすると

$$-2(x_1-2)-2(y_1-2)=2 \qquad \therefore \quad x_1+y_1=3$$

また，原点を通る他方の接線の接点を $(x_2,\ y_2)$ として同様に考えると

$$x_2+y_2=3$$

を得る．これら 2 式より，2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ はいずれも直線

$$\boldsymbol{x+y=3} \quad \text{（答）} \quad \cdots\cdots ④$$

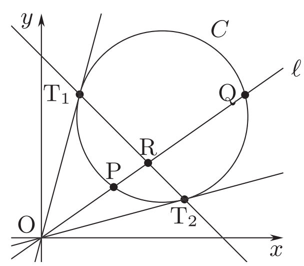
上にあるから，これが求める直線である．

(3) ℓ の方程式を②（$2-\sqrt{3}<m<2+\sqrt{3}$）とし，P，Q，R の x 座標をそれぞれ α，β，γ とすると

$$\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha),\ \mathrm{Q}(\beta,\ m\beta),\ \mathrm{R}(\gamma,\ m\gamma)$$

②，④より

$$\gamma=\frac{3}{1+m}$$



$$\therefore \quad \mathrm{OR}=\sqrt{1+m^2}\,|\gamma|=\frac{3\sqrt{1+m^2}}{1+m} \quad \cdots\cdots ⑤$$

さて，α，β は③の 2 解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{4(1+m)}{1+m^2},\ \alpha\beta=\frac{6}{1+m^2}$$

また，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$ より，$\alpha>0$，$\beta>0$ であることに注意すると

$$\mathrm{OP}=\sqrt{1+m^2}\,\alpha,\ \mathrm{OQ}=\sqrt{1+m^2}\,\beta$$

と表せるから

$$\frac{1}{\mathrm{OP}}+\frac{1}{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}=\frac{\sqrt{1+m^2}(\alpha+\beta)}{\left(1+m^2\right)\alpha\beta}=\frac{2(1+m)}{3\sqrt{1+m^2}}$$

よって，これと⑤より

$$\frac{2}{\mathrm{OR}}-\left(\frac{1}{\mathrm{OP}}+\frac{1}{\mathrm{OQ}}\right)=\mathbf{0}\quad\text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）5 点　　（2）10 点　　（3）10 点

（1）$\square_1$ 答に ……………………………………………… 5 点

（2）$\square_1$ 答に ……………………………………………… 10 点

（3）$\square_1$ OR を m を用いて表して …………………………… 4 点

$\square_2$ $\frac{1}{\mathrm{OP}}+\frac{1}{\mathrm{OQ}}$ を m を用いて表して ………………… 4 点

$\square_3$ $\frac{2}{\mathrm{OR}}-\left(\frac{1}{\mathrm{OP}}+\frac{1}{\mathrm{OQ}}\right)=0$ を示して ……………… 2 点

【2】(1) $f(x)=x^{n+1}e^{-x}$ $(x>0)$ とおく．

$$f'(x)=(n+1)x^ne^{-x}-x^{n+1}e^{-x}=x^ne^{-x}\{(n+1)-x\}$$

よって，増減表は下のようになるから

x	0		$n+1$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

最大値は

$$f(n+1)=\boldsymbol{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}$$ （答）

(2) (1) の最大値を M とおくと，$f(0)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より $x>0$ において

$$0<\frac{x^{n+1}}{e^x}\leqq M \qquad \therefore\quad 0<\frac{x^n}{e^x}\leqq\frac{M}{x}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{M}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\boldsymbol{0}$$ （答）

(3) $e^x\fallingdotseq 0$ であるから

$$x^n=ae^x\iff\frac{x^n}{e^x}=a$$

そこで，$g(x)=x^ne^{-x}$ とおき，$y=g(x)$ と $y=a$ のグラフを描く．

$$\begin{aligned}g'(x)&=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}\\&=x^{n-1}e^{-x}(n-x)\end{aligned}$$

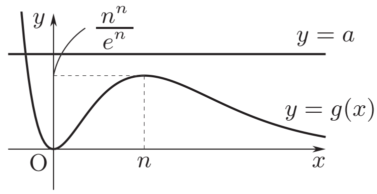
いま，x の指数 $n-1$ の偶奇に関して場合分けをし，グラフの概形を考える．

(i) n が偶数のとき

x		0		n	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	0	↗		↘

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0\ (\because (2))$$

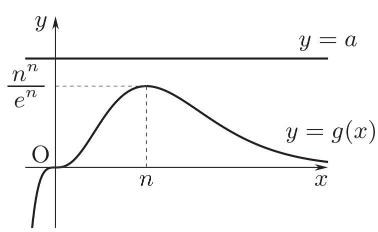


(ii) n が奇数（$n\geqq 3$）のとき

x		0		n	
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	0	↗		↘

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$



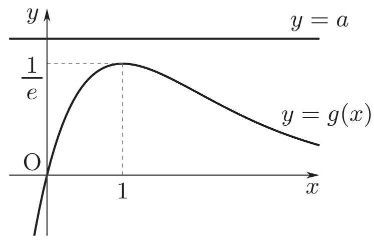
(iii) $n=1$ のとき

$g'(x)=e^{-x}(1-x)$ だから

x		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$



(iii) は (ii) に含めることができるので，解の個数は，

(I) n が偶数のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<0} & \text{ならば } \mathbf{0} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a=0} & \text{ならば } \mathbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{0<a<\dfrac{n^n}{e^n}} & \text{ならば } \mathbf{3} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a=\dfrac{n^n}{e^n}} & \text{ならば } \mathbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{\dfrac{n^n}{e^n}<a} & \text{ならば } \mathbf{1} \text{ 個} \end{cases} \quad \text{（答）}$$

(II) n が奇数のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{a\leqq 0} & \text{ならば } \mathbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{0<a<\dfrac{n^n}{e^n}} & \text{ならば } \mathbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a=\dfrac{n^n}{e^n}} & \text{ならば } \mathbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{\dfrac{n^n}{e^n}<a} & \text{ならば } \mathbf{0} \text{ 個} \end{cases} \quad \text{（答）}$$

となる．

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　　(2) 5 点　　(3) 15 点

(1) $\square_1$ $f(x)=\dfrac{x^{n+1}}{e^x}$ の増減を調べて …………………………… 3 点

$\square_2$ 答に …………………………………………………… 2 点

(2) $\square_1$ $0<\dfrac{x^n}{e^x}\leqq\dfrac{M}{x}$ (M は (1) で求めた最大値) を述べて ……………… 3 点

$\square_2$ はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を求めて ……………………… 2 点

(3) $\square_1$ $y=\dfrac{x^n}{e^x}$ と $y=a$ の共有点の個数を考える方針に ………………… 5 点

$\square_2$ n：偶数のときの答を求めて …………………………………… 5 点

$\square_3$ n：奇数のときの答を求めて …………………………………… 5 点

【3】(1) 同じ記号が3つ以上連続して並ばない n 個の記号の列に，記号を1つ付け加えて，同じ記号が3つ以上並ばない $n+1$ 個の記号の列を作る．

このとき，列の型をaの型とbの型に分類すると，右のようになる．

	n 個目		$n+1$ 個目	
a	$\cdots\cdots++$	→	$\cdots\cdots++-$	b
a	$\cdots\cdots--$	→	$\cdots\cdots--+$	b
b	$\cdots\cdots+-$	↗	$\cdots\cdots+-+$	b
		↘	$\cdots\cdots+--$	a
b	$\cdots\cdots-+$	↗	$\cdots\cdots-++$	a
		↘	$\cdots\cdots-+-$	b

長さが $n+1$ でaの型の個数は，長さが n でbの型の個数に一致し，
長さが $n+1$ でbの型は，長さが n でaの型，bの型それぞれから作られる．

したがって

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{n+1} = b_n} & \cdots\cdots① \\ \boldsymbol{b_{n+1} = a_n + b_n} & \cdots\cdots② \end{cases} \quad \text{（答）}$$

(2) $① + ② \times r$ より

$$a_{n+1} + rb_{n+1} = ra_n + (1+r)b_n$$

題意より，この式の右辺が

$$r(a_n + rb_n) = ra_n + r^2 b_n$$

に等しく，かつ $b_n \neq 0$ であるから

$$1 + r = r^2 \cdots\cdots③$$

これを解いて

$$r = \boldsymbol{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}} \quad \text{（答）}$$

(3) $\{a_n + rb_n\}$ が公比 r の等比数列であるから

$$a_n + rb_n = (a_2 + rb_2)\, r^{n-2}$$

ここで，$a_2 = b_2 = 2$ であるから

$$a_n + rb_n = 2(1+r)r^{n-2} = 2r^n \ (\because ③)$$

よって，(2) の結果より

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} b_n = 2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \cdots\cdots④ \\ a_n + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} b_n = 2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

④ − ⑤ より

$$\sqrt{5} b_n = 2\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

したがって

$$b_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

であるから，これと ② より

$$a_n + b_n = b_{n+1} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　（2）5 点　（3）10 点

（1）$\square_1$ 答に …… 10 点

（2）$\square_1$ $ra_n + (1+r)b_n = ra_n + r^2 b_n$ を述べて …… 3 点

$\square_2$ 答に …… 2 点

（3）$\square_1$ $a_n + rb_n = 2r^n$ に …… 3 点

$\square_2$ b_n を求めて …… 3 点

$\square_3$ 答に …… 4 点

【4】(1) 与式の積分において，$x-t=u$ とおくと

$$F(x)=-\frac{x}{2}+\int_x^0(x-u)f(u)\,(-du)$$
$$=-\frac{x}{2}+\int_0^x(x-u)f(u)\,du$$
$$=-\frac{x}{2}+x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

両辺を x で微分して

$$F'(x)=-\frac{1}{2}+\left(\int_0^x f(u)\,du+xf(x)\right)-xf(x)$$
$$=-\frac{1}{2}+\int_0^x f(u)\,du \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

再び微分して

$$F''(x)=f(x)$$

よって，条件より

$$f(x)=\boldsymbol{\sin x} \quad （答）$$

① に代入して

$$F(x)=-\frac{x}{2}+x\int_0^x \sin u\,du-\int_0^x u\sin u\,du$$
$$=-\frac{x}{2}+x\Big[-\cos u\Big]_0^x-\Big[-u\cos u+\sin u\Big]_0^x$$
$$=\boldsymbol{\frac{x}{2}-\sin x} \quad （答）$$

(2) $F'(x)=\dfrac{1}{2}-\cos x$ より，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ において $F'(x)=0$ をみたすのは

$$\cos x=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad x=\pm\frac{\pi}{3}$$

よって，増減表は右のようになり，最大値は

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$F(x)$		↗		↘		↗	

$$\begin{cases} F\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6} \\ F(\pi)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

の 2 つを比較して

$$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}>0$$
$$\therefore \quad F(\pi)>F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

また，最小値は

$$\begin{cases} F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{4}>0 \\ F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}<0 \end{cases}$$

より

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) < F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

よって

$$\begin{cases} \textbf{最大値}\quad \boldsymbol{F(\pi) = \frac{\pi}{2}} \\ \textbf{最小値}\quad \boldsymbol{F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}} \end{cases}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）13 点　　（2）12 点

（1）$\square_1$ $F(x) = -\dfrac{x}{2} + x\displaystyle\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du$ を得て …… 3 点

$\square_2$ $F''(x) = f(x)$ を得て …… 3 点

$\square_3$ $f(x) = \sin x$ に …… 2 点

$\square_4$ $F(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$ に …… 5 点

（2）$\square_1$ $F(x)$ の増減を調べて …… 4 点

$\square_2$ 最大値を得て …… 4 点

$\square_3$ 最小値を得て …… 4 点

MMA

直前難関大理系数学

【1 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製