MMA

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前難関大理系数学

【2 回目】

問題

【1】(1) H は直線 OA 上にあるから，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2k,\ k,\ 2k)$$

と表される．

CH $\perp$ OA より

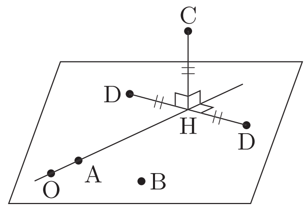
$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \iff (2k-5,\ k-7,\ 2k-5) \cdot (2,\ 1,\ 2) = 0$$
$$\iff 2(2k-5) + (k-7) + 2(2k-5) = 0$$
$$\iff k = 3$$

したがって

H(6, 3, 6) （答）

である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，s，t を実数として



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= (2s+6t,\ s+2t,\ 2s+2t)$$

と表される．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，DH $\perp$ OH より

$$\overrightarrow{\mathrm{HD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{HD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$
$$\iff (2s+6t-6,\ s+2t-3,\ 2s+2t-6) \cdot (2,\ 1,\ 2) = 0$$
$$\iff 4(s+3t-3) + (s+2t-3) + 4(s+t-3) = 0$$
$$\iff s + 2t = 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

DH = CH すなわち $\mathrm{DH}^2 = \mathrm{CH}^2$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2 = (6-5)^2 + (3-7)^2 + (6-5)^2 = 18$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{HD}}\right|^2 = 4(s+3t-3)^2 + (s+2t-3)^2 + 4(s+t-3)^2$$
$$= 4t^2 + 0 + 4t^2 \ (\because ①)$$
$$= 8t^2$$

したがって

$$8t^2 = 18 \qquad \therefore \quad t = \pm\frac{3}{2}$$

よって

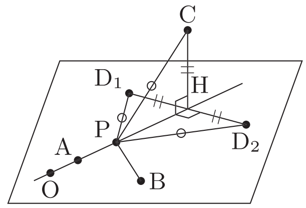
$$(s,\ t) = \left(0,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(6,\ -\frac{3}{2}\right)$$

となり

D(9, 3, 3) または **D(3, 3, 9)** （答）

である．

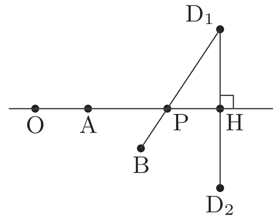
(3) $$\begin{aligned}\mathrm{CP} &= \sqrt{\mathrm{CH}^2+\mathrm{HP}^2}\\ &= \sqrt{\mathrm{DH}^2+\mathrm{HP}^2}\\ &= \mathrm{DP}\end{aligned}$$



であるから

$$\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=\mathrm{BP}+\mathrm{DP} \quad \cdots\cdots ②$$

(2) で求めた D のうち，直線 OA に関して B と逆側にある点を D_1，同じ側にある点を D_2 とすると，平面 OAB 上で 3 点 B，P，D_1 がこの順で一直線上に並ぶとき，$\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ は最小となる．



m を実数，n を $0<n<1$ の実数として

$$\mathrm{P}(2m,\ m,\ 2m),\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=n\overrightarrow{\mathrm{BD_1}}$$

と表すことができる．

(i) $\mathrm{D}_1(9,\ 3,\ 3)$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}=n\overrightarrow{\mathrm{BD_1}} &\Longleftrightarrow (2m-6,\ m-2,\ 2m-2)=n(9-6,\ 3-2,\ 3-2)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}2m-3n-6=0\\ m-n-2=0\\ 2m-n-2=0\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}m=0\\ n=-2\end{cases}\end{aligned}$$

このとき，$n<0$ となり条件をみたさない．

(ii) $\mathrm{D}_1(3,\ 3,\ 9)$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}=n\overrightarrow{\mathrm{BD_1}} &\Longleftrightarrow (2m-6,\ m-2,\ 2m-2)=n(3-6,\ 3-2,\ 9-2)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}2m+3n-6=0\\ m-n-2=0\\ 2m-7n-2=0\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{12}{5}\\ n=\dfrac{2}{5}\end{cases}\end{aligned}$$

これは条件をみたす．

したがって，求める P の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{24}{5},\ \frac{12}{5},\ \frac{24}{5}}\right) \quad \text{(答)}$$

である．

【配点の目安】

配点：25 点

（1）4 点　　（2）7 点　　（3）14 点

（1）□$_1$ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおいて ···················· 1 点

□$_2$ 答に ···················· 3 点

（2）□$_1$ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおいて ···················· 1 点

□$_2$ s，t の値の組を求めて ···················· 3 点

□$_3$ 答に ···················· 3 点

（3）□$_1$ BP + CP = BP + DP を述べて ···················· 4 点

□$_2$ 直線 OA に関して B と逆側にある点が (3, 3, 9)，
同じ側にある点が (9, 3, 3) であることを調べて ···················· 6 点

□$_3$ 答に ···················· 4 点

【2】(1) 点 R の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，P が L_2 上にないとき，条件より

$$\begin{cases} \dfrac{Y-b}{X-a}\cdot\sqrt{3}=-1 \Longleftrightarrow (X-a)+\sqrt{3}(Y-b)=0 \\ \dfrac{Y+b}{2}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{X+a}{2} \Longleftrightarrow \sqrt{3}(X+a)-(Y+b)=0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} X+\sqrt{3}Y-a-\sqrt{3}b=0 \\ \sqrt{3}X-Y+\sqrt{3}a-b=0 \end{cases}$$

が成り立つから，これらを解いて

$$(X,\ Y)=\left(\frac{-a+\sqrt{3}b}{2},\ \frac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$$

これは，P が L_2 上にあるとき，すなわち，$b=\sqrt{3}a$ のときにも成り立つ.

よって

$$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{-a+\sqrt{3}b}{2},\ \frac{\sqrt{3}a+b}{2}}\right)\quad \text{（答）}$$

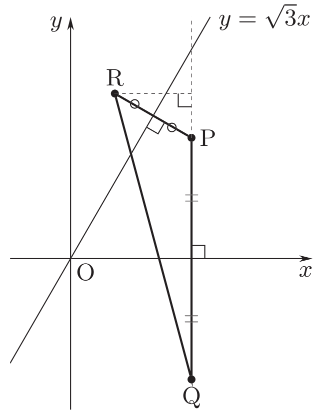
(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ のとき $\mathrm{Q}(a,\ -b)$ であるから，(1) と $\mathrm{QR}=2$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{QR}^2=4 &\Longleftrightarrow \left(\frac{-a+\sqrt{3}b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a+b}{2}+b\right)^2=4 \\ &\Longleftrightarrow \left(3a-\sqrt{3}b\right)^2+\left(\sqrt{3}a+3b\right)^2=16 \\ &\Longleftrightarrow 3(a^2+b^2)=4 \end{aligned}$$

よって，求める P の軌跡 C は

$$\text{円 } \boldsymbol{x^2+y^2=\frac{4}{3}}\quad \text{（答）}$$

(3) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を S とすると，(1) および (2) より



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot|2b|\cdot\left|\frac{-a+\sqrt{3}b}{2}-a\right| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\sqrt{3}ab-b^2\right| \end{aligned}$$

ここで，a，b が $a^2+b^2=\dfrac{4}{3}$ をみたすことから

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta,\ b=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$$

とパラメータ表示でき，このとき

$$\begin{aligned} \sqrt{3}ab-b^2 &= \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta-\frac{4}{3}\sin^2\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2\theta-\frac{2}{3}(1-\cos 2\theta) \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta\right)-\frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{25}{6}\pi$ であり，$-1 \leqq \sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$ より，

$$-2 \leqq \sqrt{3}ab - b^2 \leqq \frac{2}{3} \qquad \therefore \quad \max\left|\sqrt{3}ab - b^2\right| = 2$$

また，このとき $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ であるから

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi \qquad \therefore \quad \theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

したがって

$$\mathbf{P}\left(\pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}},\ \mp\mathbf{1}\right)$$ **（複号同順）（答）**

のとき，S の最大値は

$\sqrt{\mathbf{3}}$ **（答）**

【配点の目安】

配点：25 点

（1）5 点　　（2）5 点　　（3）15 点

（1）□$_1$ P が L_2 上にないときの R の座標を求めて……3 点

□$_2$ P が L_2 上にあるときをみたすことを述べて……2 点

（2）□$_1$ Q$(a,\ -b)$ に……1 点

□$_2$ a，b の関係式を求めて……2 点

□$_3$ 答に……2 点

（3）□$_1$ 面積を a，b で表して……2 点

□$_2$ $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$，$b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とパラメータ表示して……2 点

□$_3$ 面積の最大値を求めて……8 点

□$_4$ P の座標を求めて……3 点

【3】$0 < x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ において，底を e とした両辺の対数をとると

$$\log x^{\sqrt{a}} \leqq \log a^{\sqrt{x}} \Longleftrightarrow \sqrt{a}\log x \leqq \sqrt{x}\log a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}}$$

ここで，$f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$

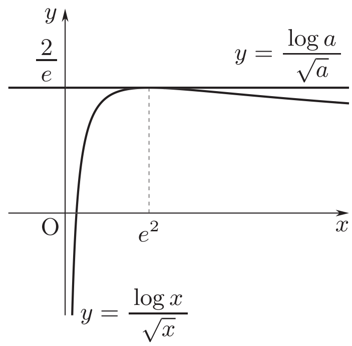
により，$f(x)$ の増減表は右のようになる．

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$

ここで

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

より，$y = f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる．



よって，$f(x)$ の最大値は $f(e^2) = \dfrac{2}{e}$ であり

$$\frac{2}{e} \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}}$$

これをみたす a は

$$a = \boldsymbol{e^2} \quad \text{（答）}$$

である．

【配点の目安】

配点：25 点

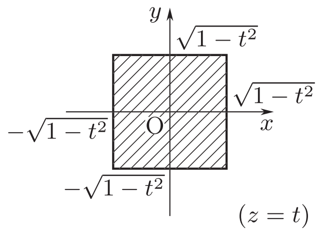
□$_1$ $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \dfrac{\log a}{\sqrt{a}}$ を示すことを述べて……8 点

□$_2$ $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ の増減を調べて……4 点

□$_3$ 答に……13 点

【4】 $$C_1 : y^2+z^2 \leqq 1,\ C_2 : z^2+x^2 \leqq 1$$

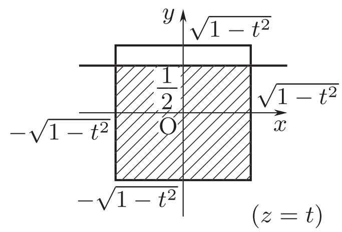
より, C_1 と C_2 の共通部分の平面 $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ における切断面を考える.



$$\begin{cases} y^2 \leqq 1-t^2 \\ x^2 \leqq 1-t^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2} \\ -\sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

このうち, $y \leqq \dfrac{1}{2}$ である部分が K であるから, K の平面 $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ における切断面は次のように場合分けされる.

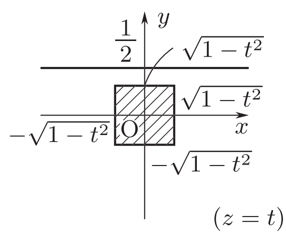


(i) $\dfrac{1}{2} \leqq \sqrt{1-t^2}$, すなわち, $|t| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

断面は長方形でその面積は

$$2\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)$$

である.



(ii) $\sqrt{1-t^2} \leqq \dfrac{1}{2}$, すなわち, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |t| \leqq 1$ のとき

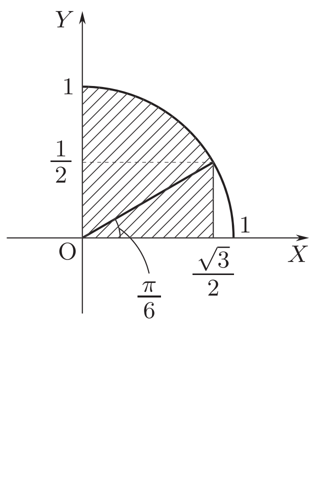
断面は正方形でその面積は

$$\left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

である.

したがって, K の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)dt + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2 dt \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt + 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-t^2)\,dt + 4\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1-t^2)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt + 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt + 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1-t^2)\,dt \\ &= \left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &\qquad + 2\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \\ &= \frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}-\frac{5}{8}\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\therefore \quad \boldsymbol{V = \frac{\pi}{3}+\frac{16}{3}-\frac{5}{4}\sqrt{3}} \quad (答)$$

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ C_1 と C_2 の共通部分の，
平面 $z = t$ における切断面の概形がわかって…………………………5 点

□$_2$ $|t| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のときの，
平面 $z = t$ における切断面の面積がわかって…………………………5 点

□$_3$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |t| \leqq 1$ のときの，
平面 $z = t$ における切断面の面積がわかって…………………………5 点

□$_4$ 体積を求める式を立式して…………………………………………3 点

□$_5$ 答に ………………………………………………………………7 点

MMA

直前難関大理系数学

【2 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	