MMA

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前難関大理系数学

【3 回目】

問題

【1】ただ一つの共通な正の実数解を α とする．

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 & \cdots\cdots ① \\ \alpha^3 + b\alpha + a = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times \alpha -$② より

$$a(\alpha^2 - 1) = 0$$

したがって，$a = 0$ または $\alpha^2 - 1 = 0$ が必要である．

$a = 0$ のとき，2 つの方程式は

$$x^2 + b = 0,\ x^3 + bx = 0$$

となり，それぞれの左辺は x^2+b を共通因数にもつ．しかも，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる解をもつので，この異なる解が 3 次方程式 $x^3+bx+a=0$ の解にもなり，この 2 つの方程式がただ一つの共通な実数解をもつという条件に反する．

$$\therefore \quad a \fallingdotseq 0$$

この結果，$\alpha^2 - 1 = 0$ でなければならない．$\alpha > 0$ より，$\alpha = 1$ である．①から

$$1 + a + b = 0$$

このとき

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = x^2 + ax - a - 1 = (x-1)(x+1+a) = 0 & \cdots\cdots ③ \\ x^3 + bx + a = x^3 - ax - x + a = (x-1)(x^2+x-a) = 0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①が重解とならないためには，③から

$$a \fallingdotseq -2$$

また，④が 3 重解をもつとすると，$x^2 + x - a = 0$ が $x = 1$ を 2 重解にもつが，$1 + 1 - a = 0$ かつ $1^2 - 4\cdot(-a) = 0$ を同時にみたす a は存在しないので，④が 3 重解をもつことはない．次に，③の他の解 $x = -a-1$ が④の解になるのは

$$(-a-1)^2 + (-a-1) - a = a^2 = 0$$

であるが，$a \fallingdotseq 0$ なのでこれはない．よって，求める条件は

$$\boldsymbol{1 + a + b = 0,\ (a,\ b) \fallingdotseq (0,\ -1),\ (-2,\ 1)} \quad （答）$$

である．

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ $a = 0$ または $\alpha^2 = 1$ であることがわかって …………… 5 点

□$_2$ $a \fallingdotseq 0$ であることがわかって …………… 5 点

□$_3$ $a \fallingdotseq -2$ であることがわかって …………… 5 点

□$_4$ 答に …………… 10 点

【2】1回の操作で赤球を取り出す確率は，1個目が $\dfrac{3}{4}$，2個目が $\dfrac{2}{4}$ である．また，白球を取り出す確率は，1個目の赤球を取り出すまでは $\dfrac{1}{4}$，1個目の赤球を取り出した後2個目の赤球を取り出すまでは $\dfrac{2}{4}$，2個目の赤球を取り出した後は $\dfrac{3}{4}$ である．

(1) 赤球2個が残っているのは，n 回のうち1回赤球を取り出す場合である．k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に1個目の赤球を取り出す確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^{n-k} = \frac{3}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

であるから，求める確率 p_n は

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{3}{2^{n+1}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \boldsymbol{3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}} \quad \text{(答)}$$

(2) 赤球1個が残っているのは，n 回のうち2回赤球を取り出す場合である．k 回目 $(2 \leqq k \leqq n)$ に2個目の赤球を取り出すのは，$k-1$ 回目に赤球2個が残っていて，k 回目に赤球を取り出す場合であるから，その確率は

$$p_{k-1} \cdot \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} = 3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

よって，求める確率 q_n は

$$q_n = \sum_{k=2}^{n} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} - \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{3}{2} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって

$$q_n = \boldsymbol{3\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）$\square_1$ 赤球を k 回目に取り出すときの確率を求めて ……………………… 5 点

$\square_2$ 答に ……………………………………………………… 5 点

（2）$\square_1$ 2 個目の赤球を k 回目に取り出すときの確率を求めて ……………… 5 点

$\square_2$ 答に ……………………………………………………… 10 点

【3】(1) 区間 $[\pi n,\ \pi(n+1)]$ において

$$\frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \leqq \frac{1}{x^2} \leqq \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

さらに，$1-\cos x \geqq 0$ より

$$\frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2} \leqq \frac{1-\cos x}{x^2} \leqq \frac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}$$

が成り立つから，πn から $\pi(n+1)$ まで積分して

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2}\,dx \leqq S_n \leqq \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}\,dx$$

ここで

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} (1-\cos x)\,dx = \Big[x-\sin x\Big]_{\pi n}^{\pi(n+1)} = \pi(n+1)-\pi n = \pi$$

であるから

$$\frac{\pi}{\pi^2(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \frac{\pi}{\pi^2 n^2} \qquad \therefore \quad \frac{1}{\pi(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \frac{1}{\pi n^2}$$

が成り立つ． (証終)

(2) (1) より

$$\pi n^2 \leqq \frac{1}{S_n} \leqq \pi(n+1)^2$$

n を 1，2，3，$\cdots$，n として和をとると

$$\pi\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \pi\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$$

より

$$\frac{\pi}{6}n(n+1)(2n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \frac{\pi}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)-\pi$$

$$\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \leqq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)-\frac{\pi}{n^3}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{3},\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)-\frac{\pi}{n^3}\right\}=\frac{\pi}{3}$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ $\pi n \leqq x \leqq \pi(n+1)$ において，

$\dfrac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2} \leqq \dfrac{1-\cos x}{x^2} \leqq \dfrac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}$ であることを述べて……………5 点

$\square_2$ 題意を示して……………5 点

（2）$\square_1$ $\dfrac{\pi}{6}n(n+1)(2n+1) \leqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{S_k} \leqq \dfrac{\pi}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)-\pi$

を示して……………8 点

$\square_2$ はさみうちの原理より答を求めて……………7 点

【4】(1) 与えられた無限級数は，初項 x^2，公比 $\dfrac{1}{1+x^2-x^4}$ の無限等比級数であるから，これが収束するための条件は

$$x^2=0 \text{ または } -1<\frac{1}{1+x^2-x^4}<1$$

であり

$$\begin{aligned}
&-1<\frac{1}{1+x^2-x^4}<1\\
\iff &1+x^2-x^4<-1 \text{ または } 1+x^2-x^4>1\\
\iff &x^4-x^2-2>0 \text{ または } x^4-x^2<0\\
\iff &(x^2+1)(x^2-2)>0 \text{ または } x^2(x+1)(x-1)<0\\
\iff &x<-\sqrt{2}\text{ または } x>\sqrt{2}\text{ または } -1<x<0 \text{ または } 0<x<1
\end{aligned}$$

であるから，$x^2=0 \iff x=0$ と合わせると，求める x の値の範囲は

$\boldsymbol{x<-\sqrt{2}}$ **または** $\boldsymbol{x>\sqrt{2}}$ **または** $\boldsymbol{-1<x<1}$ （答）

(2) (1) の結果より，$x=0$ のとき $f(x)=0$ であり，$x \neq 0$ のとき

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2-x^4}}=\frac{1+x^2-x^4}{1-x^2}$$

より

$$h(x)=\frac{1+|x|-x^2}{1-|x|}-|x|=\frac{1}{1-|x|}$$

であるから

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-|x|}=\mathbf{1} \quad \text{（答）}$$

(3) (2) の結果より，$x \neq 0$ のとき

$$\frac{h(x)-a}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-|x|}-1\right)=\frac{|x|}{x(1-|x|)}$$

であるから，右側極限は

$$\lim_{x\to +0}\frac{h(x)-a}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x(1-|x|)}=1$$

また，左側極限は

$$\lim_{x\to -0}\frac{h(x)-a}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x(1-|x|)}=-1$$

よって，これらが一致しないため，$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-a}{x}}$ **は存在しない．** （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 8 点　　(2) 7 点　　(3) 10 点

(1) $\square_1$ 収束するための条件が $x^2 = 0$ または $-1 < \dfrac{1}{1+x^2-x^4} < 1$ であることがわかって …… 4 点

$\square_2$ 答に …… 4 点

(2) $\square_1$ $f(x) = \dfrac{1+x^2-x^4}{1-x^2}$ を得て …… 2 点

$\square_2$ $h(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$ を得て …… 2 点

$\square_3$ 答に …… 3 点

(3) $\square_1$ $\dfrac{h(x)-a}{x} = \dfrac{|x|}{x(1-|x|)}$ を得て …… 2 点

$\square_2$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{h(x)-a}{x} = 1$ を得て …… 3 点

$\square_3$ $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{h(x)-a}{x} = -1$ を得て …… 3 点

$\square_4$ 結論を述べて …… 2 点

MMA

直前難関大理系数学

【3 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	