MMB

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前難関大文系数学

【1 回目】

問題

【1】(1) 1 から 31 に

2 の倍数は $31 \div 2 = \dfrac{31}{2} = 15 + \dfrac{1}{2}$　　$\therefore$　15 個

2^2 の倍数は $31 \div 2^2 = \dfrac{31}{4} = 7 + \dfrac{3}{4}$　　$\therefore$　7 個

2^3 の倍数は $31 \div 2^3 = \dfrac{31}{8} = 3 + \dfrac{7}{8}$　　$\therefore$　3 個

2^4 の倍数は $31 \div 2^4 = \dfrac{31}{16} = 1 + \dfrac{15}{16}$　　$\therefore$　1 個

$2^5 = 32 > 31$ より 2^5 以上の 2 の累乗の倍数はない．よって，$31!$ を素因数分解したときの 2 の個数は $15 + 7 + 3 + 1 = 26$ だから，求める k の値は，

$\boldsymbol{k = 26}$　（答）

(2) $31!$ が $10 = 2 \times 5$ で何回割り切れるか考えればよい．ここで $31!$ を素因数分解したときの（2 の個数）$>$（5 の個数）は明らかだから，$31!$ を素因数分解したときの 5 の個数を求めればよい．

1 から 31 に

5 の倍数は $31 \div 5 = \dfrac{31}{5} = 6 + \dfrac{1}{5}$　　$\therefore$　6 個

5^2 の倍数は $31 \div 5^2 = \dfrac{31}{25} = 1 + \dfrac{6}{25}$　　$\therefore$　1 個

$5^3 = 125 > 31$ より 5^3 以上の 5 の累乗の倍数はない．よって，求める 0 の個数は

$6 + 1 = \mathbf{7}$ (個)　（答）

(3) (1)，(2) のように $31!$ を素因数分解したとき，素数 3，7，11，13，17，19，23，29，31 がそれぞれいくつずつ現れるかを調べて素因数分解すると

$$31! = 2^{26} \times 3^{14} \times 5^7 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17^1 \times 19^1 \times 23^1 \times 29^1 \times 31^1$$

でこれを $10^7 = 2^7 \times 5^7$ で割った

$$2^{19} \times 3^{14} \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17^1 \times 19^1 \times 23^1 \times 29^1 \times 31^1$$

の一の位の数字を求めればよい．そして

$2^{19} = 2^9 \times 2^{10} = 512 \times 1024$　　$\therefore$　一の位の数字は 8

$3^{14} = (3^4)^3 \times 3^2 = 81^3 \times 9$　　$\therefore$　一の位の数字は 9

$7^4 = 7^2 \times 7^2 = 49 \times 49$　　$\therefore$　一の位の数字は 1

11^2　　$\therefore$　一の位の数字は 1

13^2　　$\therefore$　一の位の数字は 9

$17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$ の一の位の数字は 1

だから $8 \times 9 \times 1 \times 1 \times 9 \times 1$ の一の位の数字を求めればよく，これより，

8　（答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）8 点　　（2）7 点　　（3）10 点

（1）$\square_1$ 1，2，$\cdots$，31 に含まれる 2，2^2，2^3，2^4 の倍数の個数を
それぞれ求めて$\cdots\cdots$4（各 1）点

$\square_2$ 1，2，$\cdots$，31 に 2^5，2^6，$\cdots$ の倍数は含まれないことを述べて$\cdots\cdots$1 点

$\square_3$ 答に$\cdots\cdots$3 点

（2）$\square_1$ 連続して並ぶ 0 の個数が，31! を素因数分解したときの
5 の個数と等しいことを述べて$\cdots\cdots$2 点

$\square_2$ 答に$\cdots\cdots$5 点

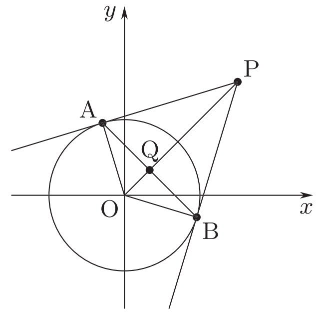
（3）$\square_1$ 31! を素因数分解して$\cdots\cdots$2 点

$\square_2$ $\dfrac{31!}{10^7}$ を素因数分解して$\cdots\cdots$2 点

$\square_3$ $\dfrac{31!}{10^7}$ の一の位の数字を求めて$\cdots\cdots$4 点

$\square_4$ 答に$\cdots\cdots$2 点

【2】(1) 右図で △AOQ と △POA は相似であり,



$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}}$$

なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$$

$$=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=a^2+b^2,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)$$

より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

$$\therefore\quad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{b}{a^2+b^2}}\right)$$ (答)

(2) 点 Q の座標を $(X,\ Y)$ とおくと,(1) より

$$X=\frac{a}{a^2+b^2},\ Y=\frac{b}{a^2+b^2}$$

よって

$$X^2+Y^2=\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\ (\neq 0)$$

なので

$$\begin{cases} X=a(X^2+Y^2) \\ Y=b(X^2+Y^2) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} a=\dfrac{X}{X^2+Y^2} & \cdots\cdots ① \\ b=\dfrac{Y}{X^2+Y^2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$a,\ b$ は $(a-3)^2+b^2=1$ をみたすから

$$a^2+b^2-6a+8=0 \quad \cdots\cdots ③$$

③に①,②を代入して

$$\frac{1}{X^2+Y^2}-6\cdot\frac{X}{X^2+Y^2}+8=0$$

$$\therefore\quad 8(X^2+Y^2)-6X+1=0$$

これより,

$$X^2+Y^2-\frac{3}{4}X+\frac{1}{8}=0$$

$$\therefore \quad \left(X-\frac{3}{8}\right)^2+Y^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

よって，Q の軌跡は，中心 $\left(\frac{3}{8},\ 0\right)$，半径 $\frac{1}{8}$ の円

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2} \quad \text{（答）}$$

である．

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）$\square_1$ 答に ……………………………… 10 点

（2）$\square_1$ X，Y を a，b で表して ……………… 2 点

$\square_2$ a，b を X，Y で表して ……………… 3 点

$\square_3$ X，Y の関係式に ……………… 7 点

$\square_4$ 答に ……………………………… 3 点

【3】 $g'(x)=\begin{cases} a & (x \leqq 0) \\ b & (x>0) \end{cases}$ であり， $f(0)=0$ より

$$\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = f(0)-f(-1) = -f(-1)$$

$$\int_{0}^{1} f'(x)\,dx = f(1)-f(0) = f(1)$$

なので，

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}\{f'(x)-a\}^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}\{f'(x)\}^2\,dx - 2a\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx + \int_{-1}^{0} a^2\,dx \\
&= a^2+2af(-1)+\int_{-1}^{0}\{f'(x)\}^2\,dx \\
&= \{a+f(-1)\}^2-\{f(-1)\}^2+\int_{-1}^{0}\{f'(x)\}^2\,dx
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx \\
&= \int_{0}^{1}\{f'(x)-b\}^2\,dx \\
&= \int_{0}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx - 2b\int_{0}^{1} f'(x)\,dx + \int_{0}^{1} b^2\,dx \\
&= b^2-2bf(1)+\int_{0}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx \\
&= \{b-f(1)\}^2-\{f(1)\}^2+\int_{0}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx
\end{aligned}$$

である．よって，与式は

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx + \int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx \\
&= \{a+f(-1)\}^2+\{b-f(1)\}^2-\{f(-1)\}^2-\{f(1)\}^2+\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx
\end{aligned}$$

と変形でき， $-\{f(-1)\}^2-\{f(1)\}^2+\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx$ は定数であるから，与式は

$$a=-f(-1),\ b=f(1)$$

のとき最小で，$g(-1)=-a,\ g(1)=b$ より

$$g(-1)=f(-1),\ g(1)=f(1)$$

（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ $\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = -f(-1),\ \int_{0}^{1} f'(x)\,dx = f(1)$ を示して ············ 6（各 3）点

□$_2$ $\displaystyle\int_{-1}^{0} \{f'(x) - g'(x)\}\,dx,\ \int_{0}^{1} \{f'(x) - g'(x)\}\,dx$ を

$f(-1)$，$f(1)$ を用いて表して ····································· 8（各 4）点

□$_3$ $a = -f(-1)$，$b = f(1)$ のとき最小となることを述べて ··················· 3 点

□$_4$ 結論を述べて ··· 8 点

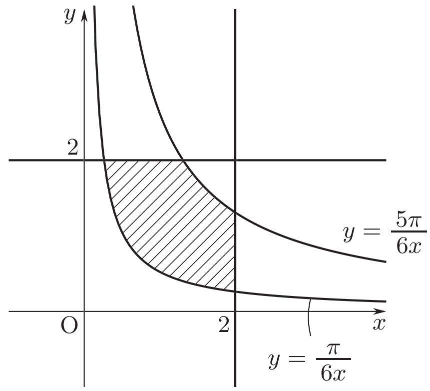
【4】(1) $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$ より

$$0 \leqq xy \leqq 4 < \frac{13}{6}\pi$$

であるから

$$\frac{1}{2} \leqq \sin(xy) \Longrightarrow \frac{\pi}{6} \leqq xy \leqq \frac{5\pi}{6}$$

よって，領域 D を図示すると，**右図の斜線部のようになる．ただし，境界をすべて含む．（答）**



(2) まず，$x + y = k$ とおき，この直線が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲を求める．

$y = \frac{\pi}{6x}$ のグラフは $x > 0$ の範囲ではつねに下に凸で，かつ直線 $y = x$ に関して対称である．

ゆえに，直線 $x + y = k$ が曲線 $y = \frac{\pi}{6x}$ と接するとき，接点は直線 $y = x$ 上にあるので，接点の座標は

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}},\ \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) \text{すなわち} \left(\frac{\sqrt{6\pi}}{6},\ \frac{\sqrt{6\pi}}{6}\right)$$

となり，このとき $k = \frac{\sqrt{6\pi}}{3}$ である．

また，$y = \frac{5\pi}{6x}$ のグラフも $x > 0$ の範囲でつねに下に凸であり，この曲線と直線 $y = 2$ との交点 $\left(\frac{5\pi}{12},\ 2\right)$ を直線 $x + y = k$ が通るとき，$k = \frac{5\pi}{12} + 2$ であり，このとき曲線 $y = \frac{5\pi}{6x}$ と直線 $x = 2$ との交点も通る．したがって，点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x + y$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{6\pi}}{3} \leqq x + y \leqq \frac{5\pi}{12} + 2$$

である．ここで，$3.1 < \pi < 3.2$ より

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6\pi}}{3}\right)^2 = \frac{\pi(3\pi - 8)}{12} > 0$$

$$\frac{5\pi}{12} + 2 - \pi = \frac{24 - 7\pi}{12} > 0$$

$$\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{12} + 2\right) = \frac{13\pi - 24}{12} > 0$$

であるから

$$\frac{\sqrt{6\pi}}{3} < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{5\pi}{12} + 2 < \frac{3\pi}{2}$$

が成り立つ．ゆえに，$\sin(x + y)$ は $x + y = \frac{\pi}{2}$ のときに最大，$\frac{5\pi}{12} + 2$ のときに最小になり

最大値 1，最小値 $\sin\left(\frac{5\pi}{12} + 2\right)$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）$\square_1$ $0 \leqq xy \leqq 4$ がわかって……………………………………3 点

$\square_2$ $\dfrac{\pi}{6} \leqq xy \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ がわかって……………………………………3 点

$\square_3$ 答に……………………………………………………4 点

（2）$\square_1$ $x+y$ の最小値が $\dfrac{\sqrt{6\pi}}{3}$ とわかって……………………………4 点

$\square_2$ $x+y$ の最大値が $\dfrac{5\pi}{12}+2$ とわかって……………………………4 点

$\square_3$ 答に……………………………………………………7 点

MMB

直前難関大文系数学

【1 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	