MMB

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前難関大文系数学

【2 回目】

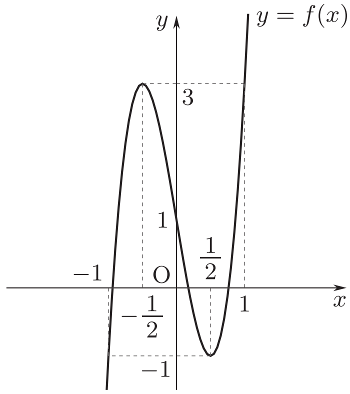
問題

【1】(1) $f(x)=8x^3-6x+1$ だから

$$f'(x)=24x^2-6$$
$$=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右図のようになるので，正の解を 2 個，負の解を 1 個もつ．



さらに，$f(-1)=-1$，$f(1)=3$ であるから，この 3 つの解が $-1<x<1$ の範囲にあることが分かる．

したがって，題意が示された．

(証終)

(2) (1) のグラフより，$-1<a<-\dfrac{1}{2}$，$0<b<\dfrac{1}{2}<c<1$ である．ここで

$$f(2b^2-1)=8(2b^2-1)^3-6(2b^2-1)+1$$
$$=(8b^3-6b)^2-1^2=(8b^3-6b+1)(8b^3-6b-1)$$
$$=f(b)(8b^3-6b-1)=0\ (\because f(b)=0)$$

となるので，$2b^2-1$ も $f(x)=0$ の解となり，$0<b<\dfrac{1}{2}$ より，

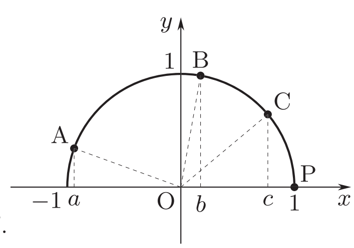
$$-1<2b^2-1<-\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad 2b^2-1=a$$

同様に $2c^2-1$，$2a^2-1$ も $f(x)=0$ の解となり，$\dfrac{1}{2}<c<1$，$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ からともに $-\dfrac{1}{2}$ と 1 の間にあるが，$y=8x^3-6x$ が奇関数であることから，(1) のグラフは点 $(0,\ 1)$ に関して点対称なので，$|a|>|c|$．

よって，$2c^2-1<2a^2-1$ となるので，$2c^2-1=b$，$2a^2-1=c$ (証終)

(3) $\angle\mathrm{POA}=\alpha$，$\angle\mathrm{POB}=\beta$，$\angle\mathrm{POC}=\gamma$ とおくと，題意より

$$a=\cos\alpha,\ b=\cos\beta,\ c=\cos\gamma$$
$$0^\circ<\gamma<\beta<90^\circ<\alpha<180^\circ$$



(2) の第 1 式 $a=2b^2-1$ から

$$\cos\alpha=2\cos^2\beta-1=\cos2\beta$$

$90^\circ<\alpha<180^\circ$，$0^\circ<2\beta<180^\circ$ より，$\alpha=2\beta$．

また，第 2 式 $b=2c^2-1$ から，$\cos\beta=\cos2\gamma$．

$0^\circ<\gamma<\beta<90^\circ$ より，$\beta=2\gamma$．

さらに，第 3 式 $c=2a^2-1$ から，$\cos\gamma=\cos2\alpha$．

$0° < \gamma < 90°$，$180° < 2\alpha < 360°$ であるから，$\gamma = 360° - 2\alpha$.

以上より

$$\gamma = 360° - 2\alpha = 360° - 4\beta = 360° - 8\gamma \qquad \therefore \quad \gamma = 40°$$

$$\therefore \quad \alpha = 160°,\ \beta = 80°$$

したがって

$$\angle\mathrm{POA} = \mathbf{160°},\ \angle\mathrm{POB} = \mathbf{80°},\ \angle\mathrm{POC} = \mathbf{40°}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）4 点　　（2）12 点　　（3）9 点

（1）$\square_1$ $f(x)$ の増減を調べて……1 点

$\square_2$ 題意を示して……3 点

（2）$\square_1$ $2a^2-1$，$2b^2-1$，$2c^2-1$ が $f(x)=0$ の解であることを示して……6（各 2）点

$\square_2$ 題意を示して……6（各 2）点

（3）$\square_1$ $\angle\mathrm{POA} = 2\angle\mathrm{POB}$，$\angle\mathrm{POB} = 2\angle\mathrm{POC}$，$\angle\mathrm{POC} = 360° - 2\angle\mathrm{POA}$ を示して……3（各 1）点

$\square_2$ 答に……6（各 2）点

【2】$a^2-a=a(a-1)$ において a，$a-1$ が互いに素（最大公約数が 1 ）で，a が奇数のとき，$a-1$ は偶数であるから，$a(a-1)$ が $10000=2^4\cdot5^4$ の倍数となるのは，$a-1$ が 2^4 の倍数のときである．また，a，$a-1$ のいずれかが 5^4 の倍数であるが，$a-1$ が 5^4 の倍数とすると，$a-1$ が $2^4\cdot5^4$ の倍数となり，これは $3\leqq a\leqq 9999$ に反する．したがって，a が 5^4 の倍数であり，整数 m，n を用いて

$$a=5^4m,\ a-1=2^4n \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる．

①より a を消去すると

$$5^4m-2^4n=1 \Longleftrightarrow 5^4(m-1)=2^4(n-39)$$

となり，5^4 と 2^4 は互いに素であるから，$m-1$ は 2^4 の倍数である．よって，整数 k を用いて

$$m-1=2^4k,\ n-39=5^4k$$
$$\Longleftrightarrow m=2^4k+1,\ n=5^4k+39$$

とおけて，①を満たす奇数 a は整数 k を用いて

$$a=5^4\cdot2^4k+5^4(=2^4\cdot5^4k+39\cdot2^4+1)$$
$$=10000k+625$$

これが 3 以上 9999 以下である条件は $k=0$ に限るので，求める a は

$\boldsymbol{a=625}$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

- □$_1$ $a-1$ が 2^4 の倍数であることを示して …… 5 点
- □$_2$ a が 5^4 の倍数であることを示して …… 5 点
- □$_3$ $5^4(m-1)=2^4(n-39)$ の形で表して …… 5 点
- □$_4$ $a=10000k+625$ (k：整数) を導出して …… 5 点
- □$_5$ 答に …… 5 点

【3】(1) P は OD 上の点なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (3k,\ -2k,\ 7k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とおける.

また, P は A, B, C と同一平面上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (s, t は実数) と表される. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ -2,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ -4,\ 4)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1,\ 2,\ 0) + s(1,\ -2,\ -1) + t(-1,\ -4,\ 4)$$

$$= (1+s-t,\ 2-2s-4t,\ -s+4t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①, ②より

$$\begin{cases} 3k = 1+s-t \\ -2k = 2-2s-4t \\ 7k = -s+4t \end{cases}$$

$$\therefore \quad s = \frac{1}{4},\ t = \frac{1}{2},\ k = \frac{1}{4}$$

①に代入して

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\right) \quad \text{(答)}$$

(2) (1) と同様に H は A, B, C と同一平面上にあるから, $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = l\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (l, m は実数) と表せ

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = l(1,\ -2,\ -1) + m(-1,\ -4,\ 4) = (l-m,\ -2l-4m,\ -l+4m)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1+l-m,\ 2-2l-4m,\ -l+4m) \quad \cdots\cdots ③$$

と表され, これが $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直であることから, それらの内積は 0 なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1+l-m-2(2-2l-4m)-(-l+4m) = 6l+3m-3$$

$$\therefore \quad 3(2l+m-1) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -(1+l-m)-4(2-2l-4m)+4(-l+4m) = 3l+33m-9$$

$$\therefore \quad 3(l+11m-3) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

④, ⑤を解いて

$$l = \frac{8}{21},\ m = \frac{5}{21}$$

③に代入して

$$\mathbf{H}\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\right) \quad \text{(答)}$$

(3)

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+4+1)(1+16+16)-(-1+8-4)^2} = \frac{\mathbf{3\sqrt{21}}}{\mathbf{2}} \quad \text{(答)}$$

(4) (1) で $s=\dfrac{1}{4}$, $t=\dfrac{1}{2}$ と求めたので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2+1}$$

と表せる．したがって，BC を $2:1$ に内分する点を E とすると，P は AE を $3:1$ に内分した点であるから

$$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{PBC}=(3+1):1=4:1$$

また，(1) より，$k=\dfrac{1}{4}$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ だから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|=1:3.$

よって，四面体 DPBC は四面体 OABC と比べると，底面積が $\dfrac{1}{4}$ 倍，高さが 3 倍だから

$$V_2=\frac{3}{4}V_1 \qquad \therefore\quad V_1:V_2=\mathbf{4:3}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　(2) 5 点　(3) 5 点　(4) 10 点

(1) □$_1$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，媒介変数を用いて 2 通りに表して……2 点

□$_2$ 答に……3 点

(2) □$_1$ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，媒介変数を用いて表して……1 点

□$_2$ 媒介変数の関係式を 2 通り得て……1 点

□$_3$ 答に……3 点

(3) □$_1$ 答に……5 点

(4) □$_1$ $\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{PBC}=4:1$ に……3 点

□$_2$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{PD}}\right|=1:3$ に……3 点

□$_3$ 答に……4 点

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{d}$ とする.

BC : CD = 1 : k より，点 D は線分 BC を $(1+k):k$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{d}=\frac{-k\overrightarrow{b}+(1+k)\overrightarrow{c}}{(1+k)-k}$$

$$=\boldsymbol{(1+k)\overrightarrow{c}-k\overrightarrow{b}}\quad \text{（答）}$$

(2) AB : AC = 3 : 2 より正の数 l を用いて

$$\mathrm{AB}=3l,\ \mathrm{AC}=2l$$

とかける．このとき

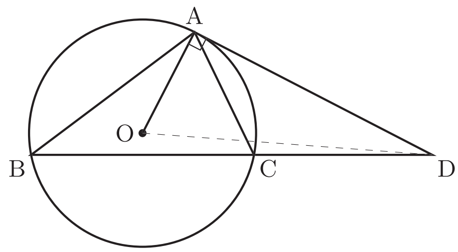
$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=3l\\ \left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\right|=2l\end{cases}\iff\begin{cases}\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=9l^2\cdots\cdots①\\ \left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=4l^2\cdots\cdots②\end{cases}$$

であり，$\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{c}\right|=1$ および ① × 4 − ② × 9 より l^2 を消去すると

$$-10-8\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+18\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\boldsymbol{\frac{9}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\frac{5}{4}}\quad \text{（答）}$$

(3) AD は点 A において円 S に接するので



$$\mathrm{OA}\perp\mathrm{AD}$$

すなわち

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{d}\right|\cos\angle\mathrm{AOD}$$

$$=\left|\overrightarrow{a}\right|^2=1$$

ここで，(1) より

$$(1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}$$

$$\therefore\quad (1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$$

また，(2) より，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{9}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\dfrac{5}{4}$ を代入して

$$(1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$$

$$\therefore\quad \left(1-\frac{5}{4}k\right)(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-1)=0$$

ここで，$\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{c}\right|=1$ より

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=1\iff\cos\angle\mathrm{AOC}=1\iff \text{点 A と点 C が一致}$$

であるから

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\neq 1$$

$$\therefore\quad k=\boldsymbol{\frac{4}{5}}\quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）3 点　　（2）7 点　　（3）15 点

（1）答に ………………………………………………………… 3 点

（2）$\square_1$ $\mathrm{AB} = 3l$, $\mathrm{AC} = 2l$ とおいて ………………………… 2 点

$\square_2$ 答に ………………………………………………………… 5 点

（3）$\square_1$ $(1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1$ がわかって ………………… 5 点

$\square_2$ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \fallingdotseq 1$ がわかって ………………………………… 3 点

$\square_3$ 答に ………………………………………………………… 7 点

MMB

直前難関大文系数学

【2 回目】

Z-KAI

会員番号	

氏　名	