MMB

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前難関大文系数学

【3 回目】

問題

【1】(1) まず，真数，底の条件により

$$x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1$$

また

$$\log_y x^3=\frac{\log_x x^3}{\log_x y}=\frac{3}{\log_x y}$$

であるから，与式は

$$\begin{aligned}\log_x y-\frac{3}{\log_x y}-2<0 &\iff \frac{(\log_x y)^2-2\log_x y-3}{\log_x y}<0\\ &\iff \frac{(\log_x y+1)(\log_x y-3)}{\log_x y}<0\\ &\iff \log_x y(\log_x y+1)(\log_x y-3)<0\\ &\iff \log_x y<-1,\ 0<\log_x y<3\end{aligned}$$

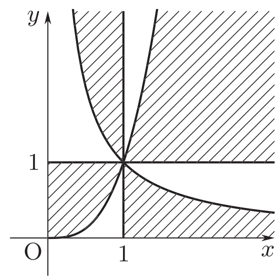
よって，$x>1$ のとき

$$y<\frac{1}{x},\ 1<y<x^3$$

$0<x<1$ のとき

$$y>\frac{1}{x},\ 1>y>x^3$$

これをみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲は図の斜線部である．ただし，境界は含まない．（答）



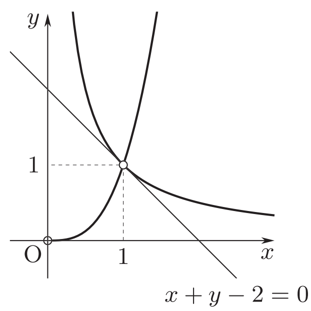
(2) 連立方程式を

$$\begin{cases}\log_x y-\log_y x^3-2=0 & \cdots\cdots ①\\ x+y-k=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

とおく．①をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲は図の太線部，②をみたす点 $(x,\ y)$ は傾き -1，y 切片 k の直線上にある．これらが共有点をもたないような k の値の範囲が求めるものである．

$y=\dfrac{1}{x}$ の点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きがちょうど -1 であるから，図より，求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k\leqq 0,\ k=2}\quad（答）$$



【配点の目安】

配点：25 点

(1) 15 点　　(2) 10 点

(1) □$_1$ 真数条件，底の条件を述べて ……………… 2 点

□$_2$ $\log_x y$ のとり得る値の範囲を求めて ……………… 2 点

□$_3$ x, y のとり得る値の範囲を求めて……4 点

□$_4$ 図示して……5 点

□$_5$ 境界について述べて……2 点

(2) □$_1$ $k \leqq 0$ がわかって……6 点

□$_2$ $k = 2$ がわかって……4 点

【2】(1) $50 = 2^5 + 2^4 + 2$ だから

$$\boldsymbol{a_1 = a_3 = a_4 = a_7 = a_8 = 0,\ a_2 = a_5 = a_6 = 1} \quad (\text{答})$$

(2)
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \Longleftrightarrow \text{どれか 1 つが 1 で他は 0}$$

だから，このときの P_n の要素の総和は

$$(P_n\text{ の要素の総和}) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \boldsymbol{2^n - 1} \quad (\text{答})$$

(3) 題意より，$(i,\ j)$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ に対して，$a_i = a_j = 1$ で他はすべて 0 となる．

ここで j を固定して，上の条件を満たす P_n の要素の和を求めてみる．

i は $1 \leqq i \leqq j-1$ の範囲を動くから，その和は

$$\begin{aligned}
&(2^{j-1} + 1) + (2^{j-1} + 2) + (2^{j-1} + 2^2) + \cdots + (2^{j-1} + 2^{j-2}) \\
=& (j-1)2^{j-1} + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{j-2}) \\
=& (j-1)2^{j-1} + 2^{j-1} - 1 = j \cdot 2^{j-1} - 1
\end{aligned}$$

よって，j は $2 \leqq j \leqq n$ まで値をとるから，求める和は

$$\sum_{j=2}^{n} (j \cdot 2^{j-1} - 1) = \sum_{j=2}^{n} j \cdot 2^{j-1} - (n-1)$$

と表される．ここで，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \cdot 2^{j-1} = S$ とおくと

$$\begin{array}{rrl}
 & S = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + \quad\quad n \cdot 2^{n-1} \\
-) & 2S = & \quad\quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \\
\hline
 & -S = & 1 + \quad 2 + \quad 2^2 + \cdots + \quad\quad 2^{n-1} - n \cdot 2^n
\end{array}$$

より

$$-S = 2^n - 1 - n \cdot 2^n \qquad \therefore \quad S = (n-1)2^n + 1$$

よって

$$\sum_{j=2}^{n} j \cdot 2^{j-1} = S - 1 = (n-1)2^n$$

となる．したがって，求める和は

$$(n-1)2^n - (n-1) = \boldsymbol{(n-1)(2^n - 1)} \quad (\text{答})$$

である．

■ 注意

次のように考えると，計算が楽になる．

題意を満たす数の和は

$$\sum_{j=2}^{n} (1 + 2^{j-1}) + \sum_{j=3}^{n} (2 + 2^{j-1}) + \cdots + \sum_{j=n-1}^{n} (2^{n-3} + 2^{j-1}) + (2^{n-2} + 2^{n-1})$$

と表される．この和において，1 が現れるのは初項の和のみで，その個数は $n-1$ 個．さらに，2 が現れるのは初項と第 2 項の和であり，その個数は $1 + (n-2) = n-1$ 個．2^2 の個数についても同様で，$1 + 1 + (n-3) = n-1$ 個．以下同様に考えると，各 2^{k-1} がちょうど $n-1$ 個ずつ現れる．

したがって，求める P_n の要素の和は

$$(n-1)(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})=(n-1)\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=(n-1)(2^n-1)$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）5 点　　（2）8 点　　（3）12 点

（1）$\square_1$ 答に …………………………………………………… 5 点

（2）$\square_1$ 「$a_1+a_2+\cdots+a_n=1 \Longleftrightarrow$ どれか 1 つが 1 で他は 0」
がわかって …………………………………………………… 3 点

$\square_2$ 答に …………………………………………………… 5 点

（3）$\square_1$ 「$(i,\ j)$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ に対して，$a_i=a_j=1$ で他はすべて 0」
がわかって …………………………………………………… 3 点

$\square_2$ j を固定したときの和 $j\cdot 2^{j-1}-1$ がわかって …………………… 3 点

$\square_3$ $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j\cdot 2^{j-1}=(n-2)2^n$ がわかって ………………………… 3 点

$\square_4$ 答に …………………………………………………… 3 点

【3】(1)

$$f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{3}bx-\frac{1}{3}(a^2+3a+2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+\frac{1}{3}b$$

3 次関数 $y=f(x)$ は極大値と極小値をもつから，2 次方程式 $f'(x)=0$ は異なる 2 実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつ．よって，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると $D>0$ なので

$$a^2-3\cdot\frac{1}{3}b>0 \qquad \therefore \quad b<a^2$$

このとき，$f(\alpha)$ が極大値，$f(\beta)$ が極小値である．

また，$f(x)$ を $f'(x)$ で割った商と余りを求めて整理すると

$$f(x)=f'(x)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{a}{9}\right)+\frac{2}{9}(b-a^2)x-\frac{1}{3}(a^2+3a+2)-\frac{1}{27}ab \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表せ，$f'(x)=0$ の 2 実数解は解の公式より

$$\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-b}}{3},\ \beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-b}}{3}$$

よって，極値の差 $f(\alpha)-f(\beta)$ は②より

$$\begin{aligned} f(\alpha)-f(\beta)&=\frac{2}{9}(b-a^2)(\alpha-\beta)=\frac{2}{9}(b-a^2)\left(-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-b}\right)\\ &=\frac{4}{27}(a^2-b)^{\frac{3}{2}}\ (\because f'(\alpha)=f'(\beta)=0)\end{aligned}$$

これが $\frac{4}{27}$ に等しいから

$$\frac{4}{27}(a^2-b)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{27} \qquad \therefore \quad a^2-b=1$$

したがって

$\boldsymbol{b=a^2-1}$ （答）

(2) (1) の結果を①に代入して

$$f(x)=y=x^3+ax^2+\frac{1}{3}(a^2-1)x-\frac{1}{3}(a^2+3a+2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$y=f(x)$ の両辺を 3 倍して a で整理すると

$$a^2(x-1)+3a(x^2-1)+(3x^3-x-2-3y)=0$$

上式が任意の a で成立する条件は

$$x-1=0 \text{ かつ } x^2-1=0 \text{ かつ } 3x^3-x-2-3y=0$$

$$\iff x=1,\ y=0$$

したがって，$y=f(x)$ は a の値によらず定点

(1, 0) （答）

を通る．

(3) (2) の結果より，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつことがわかる．よって

$$f(x)=(x-1)\left\{x^2+(a+1)x+\left(\frac{a^2}{3}+a+\frac{2}{3}\right)\right\}$$

ここで

$$g(x)=x^2+(a+1)x+\frac{a^2}{3}+a+\frac{2}{3}$$

とおくと，3 次関数 $y=f(x)$ が x 軸と接する，すなわち $f(x)=0$ が重解をもつのは

(i) $g(x)=0$ が重解をもつ　　(ii) $g(x)=0$ が $x=1$ を解にもつ

の 2 つの場合がある．

(i) の場合，$g(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=(a+1)^2-4\left(\frac{a^2}{3}+a+\frac{2}{3}\right)=0$$

$$a^2+6a+5=(a+1)(a+5)=0 \qquad \therefore \quad a=-1,\ -5$$

(ii) の場合

$$g(1)=1+(a+1)+\left(\frac{a^2}{3}+a+\frac{2}{3}\right)=0$$

$$a^2+6a+8=(a+2)(a+4)=0 \qquad \therefore \quad a=-2,\ -4$$

(i), (ii) より

$\boldsymbol{a=-5,\ -4,\ -2,\ -1}$ （答）

(4) 最小の値は $a=-5$ なので③に代入して

$$f(x)=x^3-5x^2+8x-4$$

求める面積を S とすると

$$S=\int_1^2(x^3-5x^2+8x-4)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+4x^2-4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}(16-1)-\frac{5}{3}(8-1)+4(4-1)-4(2-1)=\frac{15}{4}-\frac{35}{3}+12-4$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 7 点　　(2) 5 点　　(3) 8 点　　(4) 5 点

(1) $\square_1$ $f'(x)$ を求めて ………… 2 点

$\square_2$ $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{4}{27}(a^2-b)^{\frac{3}{2}}$ を得て ………… 3 点

$\square_3$ 答に ………… 2 点

(2) $\square_1$ a について整理して ………… 2 点

$\square_2$ 答に ··· 3 点

(3) $\square_1$ 答に ··· 8（各 2）点

(4) $\square_1$ $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ を得て ······································ 2 点

$\square_2$ 答に ··· 3 点

【4】

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left| p \cdot \frac{a}{q} - q \cdot \frac{1}{p} \right| = \frac{1}{2}\left| \frac{ap^2 - q^2}{pq} \right|$$

$\angle \mathrm{AOP} = \alpha$，$\angle \mathrm{AOQ} = \beta$ $\left(ただし，条件 (1) より\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{1}{p^2},\ \tan\beta = \frac{a}{q^2}$$

であるから，条件 (ii) より

$$\frac{1}{p^2} < \frac{a}{q^2} \qquad q^2 < ap^2 \qquad \therefore \quad ap^2 - q^2 > 0$$

これと条件 (i)，(iii) を合わせると

$$\frac{ap^2 - q^2}{2pq} = 3 \qquad \therefore \quad ap^2 - q^2 = 6pq \quad \cdots\cdots ①$$

$\angle \mathrm{POQ} = \beta - \alpha$ であるから

$$\tan\angle\mathrm{POQ} = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{a}{q^2} - \dfrac{1}{p^2}}{1 + \dfrac{a}{q^2} \cdot \dfrac{1}{p^2}} = \frac{ap^2 - q^2}{p^2q^2 + a} = \frac{6pq}{p^2q^2 + a} \quad (\because\ ①)$$

$$= \frac{6}{pq + \dfrac{a}{pq}} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，相加・相乗平均の関係より

$$pq + \frac{a}{pq} \geqq 2\sqrt{pq \cdot \frac{a}{pq}} = 2\sqrt{a} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立ち，等号は

$$pq = \frac{a}{pq}\ すなわち\ pq = \sqrt{a}$$

のときに成立する．これと①から p を消去して整理すると

$$q^4 + 6\sqrt{a}q^2 - a^2 = 0 \qquad \therefore \quad q^2 = -3\sqrt{a} \pm \sqrt{a^2 + 9a}$$

となるから，$q^2 > 0$，$q > 0$，$p > 0$ に注意すると

$$q = \sqrt{-3\sqrt{a} + \sqrt{a^2 + 9a}},\ p = \sqrt{\frac{3\sqrt{a} + \sqrt{a^2 + 9a}}{a}}$$

となる．これらは①をみたし，③の等号を成り立たせる．このとき，②の分母は最小になるから，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ は最大となり，最大値は

$$\frac{6}{2\sqrt{a}}\ すなわち\ \frac{3}{\sqrt{a}}$$

である．したがって，この値が $\dfrac{3}{4}$ に等しいとき

$$\frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{4} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = 16} \quad （答）$$

【配点の目安】

配点：25 点

- □$_1$ $\dfrac{1}{p^2} < \dfrac{a}{q^2}$ を述べて ································ 3 点
- □$_2$ $ap^2 - q^2 = 6pq$ を得て ································ 7 点
- □$_3$ $pq + \dfrac{a}{pq} \geqq 2\sqrt{a}$ を述べて ································ 5 点
- □$_4$ 等号成立条件を述べて ································ 5 点
- □$_5$ 答に ································ 5 点

MMB

直前難関大文系数学

【3 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	