MJXA

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前東大整数特講

問題

【1】(1) まず p と q の比を求めるために，次の計算を行う；

$$\frac{p}{q}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}=a_1+\frac{a_3}{a_2a_3+1}$$

$$=\frac{a_1(a_2a_3+1)+a_3}{a_2a_3+1}=\frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

よって，k を正整数として $\begin{cases}kp=a_1a_2a_3+a_1+a_3\\ kq=a_2a_3+1\end{cases}$ を得る．次に $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を a_1 から a_4 で表す．与えられた連分数の主分母は ① の index を 1 だけ進めたものであるから，次を得る

$$\frac{\alpha}{\beta}=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{a_2a_3a_4+a_2+a_4}{a_3a_4+1}}$$

$$=\frac{a_1(a_2a_3a_4+a_2+a_4)+a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

従って l を正整数として

$$\begin{cases}l\alpha=a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1\\ l\beta=a_2a_3a_4+a_2+a_4\end{cases}$$

求める $\alpha q-\beta p$ を kl 倍して

$$\begin{aligned}l\alpha\cdot kq-l\beta\cdot kp&=(a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1)(a_2a_3+1)\\&\quad-(a_2a_3a_4+a_2+a_4)(a_1a_2a_3+a_1+a_3)\\&=1\end{aligned}$$

よって $kl(\alpha q-\beta p)=1$ となるが，$\alpha q-\beta p$ は整数であるから $k=l=1$ $(\because\ k>0,\ l>0)$ でなければならず，求める値は

$\boldsymbol{\alpha q-\beta p=1}$ （答）

(2) (1) の α, β を $\alpha=157$, $\beta=68$ とする．分数 $\dfrac{157}{68}$ を与えられた連分数の形に表す.

- $157=68\cdot2+21$ より $\dfrac{157}{68}=2+\dfrac{21}{68}$
- $68=21\cdot3+5$ より $\dfrac{21}{68}=\cfrac{1}{\cfrac{68}{21}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}$
- $21=5\cdot4+1$ より $\dfrac{5}{21}=\cfrac{1}{\cfrac{21}{5}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}$

であるから,

$$\frac{157}{68}=2+\frac{21}{68}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}$$

となる．これを与えられた $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の連分数表示と比べて

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 5$$

となり，

$$p = a_1a_2a_3 + a_1 + a_3 = 30,\ q = a_2a_3 + 1 = 13$$

である．(1) で示したように $\alpha q - \beta p = 1$ であるから，

$$157 \cdot 13 - 68 \cdot 30 = 1 \quad \cdots\cdots③$$

が成り立つ．これは，不定方程式 $157x - 68y = 1$ が特殊解 $(x,\ y) = (13,\ 30)$ をもつことを意味する．

③ の両辺を 3 倍して $157 \cdot 39 - 68 \cdot 90 = 3$ であるから，解くべき不定方程式 $157x - 68y = 3$ の 1 つの特殊解は $(x,\ y) = (39,\ 90)$ である．

解くべき方程式の両辺から ③ の 3 倍を辺々引いて

$$157(x - 39) - 68(y - 90) = 0 \Longleftrightarrow 157(x - 39) = 68(y - 90)$$

であり，157 と 68 の最大公約数は 1 であるから，$x - 39$ は 68 の倍数，$y - 90$ は 157 の倍数となり，m を整数として求める一般解は

$$\boldsymbol{(x,\ y) = (39 + 68m,\ 90 + 157m)}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 13 点　　(2) 12 点

(1) □$_1$ $kp = a_1a_2a_3 + a_1 + a_3$，$kq = a_2a_3 + 1$ $(k > 0)$ を得て ……3 点

□$_2$ $l\alpha = a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_3a_4 + 1$,

$l\beta = a_2a_3a_4 + a_2 + a_4$ $(l > 0)$ を得て ……3 点

□$_3$ $kl(\alpha q - \beta p) = 1$ を得て ……3 点

□$_4$ 答を得て ……4 点

(2) □$_1$ $\dfrac{157}{68} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}$ がわかって ……4 点

□$_2$ $157x - 68y = 1$ の特殊解 $(x,\ y) = (13,\ 30)$ を得て ……4 点

□$_3$ 答を得て ……4 点

【2】ある正整数 N を素因数分解して $N = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ となったとする．ここで，p_1，p_2，$\cdots$，p_k はそれぞれ異なる素数であり，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は正整数とする．このとき，N は $p_1^{a_1}$ では割り切れるが，$p_1^{a_1+1}$ では割り切れない．つまりこの問題は，ある正整数の階乗がどのように素因数分解されるか? を考える問題である．

（1）$f(5,\ 100!)$ の値が n であるとは，

$$100!\text{が }5^n\text{では割り切れるが},\ 5^{n+1}\text{では割り切れないこと},$$

つまり

$$5^n \mid 100!\text{であり，かつ }5^{n+1} \nmid 100!$$

が成り立つことである．5 は素数であるから，求める n は $100!$ を素因数分解したときの，素因数 5 がもつ指数に外ならない．そこで，1 から 100 までの正整数に 5 を素因数にもつ数がどれだけ現れ，かつそれぞれ素因数 5 をいくつもつか，を考える．

- 少なくとも 5 で 1 回割り切れるものは，$100 = 5 \cdot 20$ であるから，20 個ある．
- 少なくとも 5 で 2 回割り切れるものは，少なくとも 1 回割り切れるものの内で 5 個に 1 個あるから，$20 = 5 \cdot 4$ より 4 個ある．
- 少なくとも 5 で 3 回割り切れるものは，少なくとも 2 回割り切れるものの内で 5 個に 1 個あるが，$4 = 5 \cdot 0 + 4$ より 1 から 100 の中には存在しない．

以上より，$100!$ は素因数分解されたとき，5 の指数として $20 + 4 = 24$ をもつ．つまり

$$100! = 5^{24} \cdot K, \quad (5,\ K) = 1$$

となる．従って

$$5^{24} \mid 100! \wedge 5^{25} \nmid 100!$$

であるから，$\boldsymbol{f(5,\ 100!) = 24}$ **（答）**

（2）$12 = 2^2 \cdot 3$ であるから，（1）と同様に，$100!$ を素因数分解したとき 2 と 3 の指数は何か? を考える．

- 2 の指数について，次の一連の割り算を行う；

$$100 = 2 \cdot 50, \quad 50 = 2 \cdot 25, \quad 25 = 2 \cdot 12 + 1, \quad 12 = 2 \cdot 6,$$
$$6 = 2 \cdot 3, \quad 3 = 2 \cdot 1 + 1, \quad 1 = 2 \cdot 0 + 1$$

  従って，2 の指数は $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ である．

- 3 の指数についても同様にして

$$100 = 3 \cdot 33 + 1, \quad 33 = 3 \cdot 11, \quad 11 = 3 \cdot 3 + 2, \quad 3 = 3 \cdot 1$$

  よって 3 の指数は $33 + 11 + 3 + 1 = 48$ である．

以上より，$100!$ の素因数分解

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot L, \quad (2,\ L) = (3,\ L) = 1$$

を得る．これを

$$100! = (2^2)^{48} \cdot 3^{48} \cdot 2L = (3 \cdot 4)^{48} \cdot 2L = 12^{48} \cdot 2L$$

と変形することにより，100! は 12^{48} では割り切れるが，12^{49} では割り切れないことが解る．よって，$\boldsymbol{f(12,\ 100!) = 48}$ （答）

(3) $p^m \leqq b < p^{m+1}$ であるから，$\left[\dfrac{b}{p^m}\right] = 1$，$\left[\dfrac{b}{p^{m+1}}\right] = 0$ となる．従って，素数 p について

$$\boldsymbol{f(p,\ b!) = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{b}{p^i}\right] = \left[\frac{b}{p}\right] + \left[\frac{b}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{b}{p^m}\right]} \quad \text{（答）}$$

■ 参考

x が実数のとき $[x]$ で x を越えない最大の整数を表せば，(1) は

$$\left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{5^2}\right] + \left[\frac{100}{5^3}\right] + \cdots = 20 + 4 + 0 + \cdots = 24$$

また (2) は

$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \cdots = \sum_k \left[\frac{100}{2^k}\right] = 97,$$

$$\left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \cdots = \sum_k \left[\frac{100}{3^k}\right] = 48$$

であり，

$$f(12,\ 100!) = \min\left\{\left[\frac{97}{2}\right],\ 48\right\} = 48$$

である．

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 8 点　　(2) 8 点　　(3) 9 点

(1) $\square_1$ 5，5^2 で割り切れるものの個数を求めて……4（各 2）点

$\square_2$ 答に……4 点

(2) $\square_1$ 100! を素因数分解したときに現れる 2 の個数がわかって……2 点

$\square_2$ 100! を素因数分解したときに現れる 3 の個数がわかって……2 点

$\square_3$ 答に……4 点

(3) $\square_1$ $\left[\dfrac{b}{p^m}\right] = 1$，$\left[\dfrac{b}{p^{m+1}}\right] = 0$ がわかって……6（各 3）点

$\square_2$ 答に……3 点

【3】(1) まず，$3 \nmid a$ ならば $a = 3k \pm 1$ と置ける．ここで k は整数である．

$$a^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$$

であるから，a^2 を 3 で割った余りは 1 である．

(もちろん，mod3 で考えて $a \equiv \pm 1$ より $a^2 \equiv (\pm 1)^2 = 1$ と同値である．)

示すべき命題は

$$3 \mid a^2 - 2b^2 \Longrightarrow (3 \mid a) \land (3 \mid b)$$

であるから，その対偶命題は

$$(3 \nmid a) \lor (3 \nmid b) \Longrightarrow 3 \nmid (a^2 - 2b^2)$$

である．これを示す．法を 3 として固定する．

(i) $3 \nmid a$ とすれば上で示したことより $a^2 \equiv 1$．また b がどんな整数でも $b^2 \equiv 0, 1$.

よって $a^2 - 2b^2 \equiv \pm 1$ となるから $3 \nmid a^2 - 2b^2$

(ii) $3 \mid a$ でありかつ $3 \nmid b$ とすれば，$a^2 - 2b^2 \equiv 0 - 2 \equiv 1$ であるから，$3 \nmid a^2 - 2b^2$.

以上 (i) と (ii) より成立．（証終）

(2) 法 3 を固定する．

$a^2 - 2b^2 = 3(-c^2 + 2d^2)$ と変形できて，c と d は整数であるから，$a^2 - 2b^2 \equiv 0$.

よって (1) より $a \equiv 0$, $b \equiv 0$ となり，α, β を整数として $a = 3\alpha$, $b = 3\beta$ と置ける．このとき，与えられた条件式に代入すれば

$$9\alpha^2 - 18\beta^2 = 3(-c^2 + 2d^2) \Longleftrightarrow c^2 - 2d^2 = 3(-\alpha^2 + 2\beta^2)$$

よって $c^2 - 2d^2 \equiv 0$ より，再び (1) によって $c \equiv 0$, $d \equiv 0$ となる．

先ほどと同様に γ, δ を整数として，$c = 3\gamma$, $d = 3\delta$ と置けるから，代入して

$$9\gamma^2 - 18\delta^2 = 3(-\alpha^2 + 2\beta^2) \Longleftrightarrow \alpha^2 - 2\beta^2 + 3\gamma^2 - 6\delta^2 = 0$$

これは，与えられた条件と同じ形の方程式であるから，上と同様の議論ができる．つまり，α_1, β_1, γ_1, δ_1 をすべて整数として $\alpha = 3\alpha_1$, $\beta = 3\beta_1$, $\gamma = 3\gamma_1$, $\delta = 3\delta_1$ と置くことができて，

$$\alpha_1^2 - 2\beta_1^2 + 3\gamma_1^2 - 6\delta_1^2 = 0$$

従って

$$a = 3^2\alpha_1,\ b = 3^2\beta_1,\ c = 3^2\gamma_1,\ d = 3^2\delta_1$$

が言える．この議論を繰り返せば，a, b, c, d は 3 で何回でも割り切れる，つまり，任意の正整数 N について

$$3^N \mid a, \quad 3^N \mid b, \quad 3^N \mid c, \quad 3^N \mid d$$

が成り立つが，このような整数は 0 しか存在しない．

以上より，求める整数は

$\boldsymbol{a = b = c = d = 0}$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）7 点　　　（2）18 点

（1）□$_1$ a が 3 の倍数でなければ，a^2 を 3 で割った余りが 1 であることを示して ……………… 2 点

□$_2$ 証明ができて ……………… 5 点

（2）□$_1$ a^2-2b^2 が 3 の倍数であることを示して ……………… 3 点

□$_2$ c^2-2d^2 が 3 の倍数であることを示して ……………… 3 点

□$_3$ a，b，c，d は 3 で何回でも割り切れることがわかって ……………… 7 点

□$_4$ 答に ……………… 5 点

【4】(1) まず，ab が p の倍数であることから，a または b は p の倍数である．今，a が p の倍数であると仮定すると，b は 2 つの p の倍数の差として

$$b=(a+b)-a$$

と表せるので，b も p の倍数である．これは，b が p の倍数であると仮定した場合も同じである．

したがって，$a+b$ と ab がともに p の倍数であれば，a と b はともに p の倍数である．（証終）

(2) $a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$$

より，$2ab$ は p の倍数である．そして，p が 3 以上の素数であることから，ab は p の倍数であるといえる．

したがって，(1) の結果より，a と b はともに p の倍数である．（証終）

(3) a^3+b^3 が p の倍数であるとき

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

より，$a+b$ または a^2-ab+b^2 は p の倍数である．

$a+b$ が p の倍数であるとき，a^2+b^2 が p の倍数であることと合わせると，(2) の結果より，a と b はともに p の倍数である．

また，a^2-ab+b^2 が p の倍数であるとき，やはり a^2+b^2 が p の倍数であることと合わせると

$$ab=a^2+b^2-(a^2-ab+b^2)$$

より，ab は p の倍数である．このとき

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

より，$(a+b)^2$ は p の倍数であり，さらに p が素数であることから，$a+b$ が p の倍数であるといえる．ゆえに，(1) の結果より，a と b はともに p の倍数である．

以上より，a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であれば，a と b はともに p の倍数である．（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 7 点　(2) 8 点　(3) 10 点

(1) $\square_1$ 「a が p の倍数 $\Longrightarrow$ b が p の倍数」を述べて……3 点

$\square_2$ 「b が p の倍数 $\Longrightarrow$ a が p の倍数」を述べて……2 点

$\square_3$ 結論を述べて……2 点

(2) $\square_1$ $2ab$ が p の倍数であることを述べて……3 点

$\square_2$ ab が p の倍数であることを述べて……3 点

$\square_3$ 結論を述べて……………………………………………………2 点

(3) $\square_1$ 「$a+b$ が p の倍数 $\Longrightarrow a$ と b はともに p の倍数」を述べて………4 点

$\square_2$ 「a^2-ab+b^2 が p の倍数 $\Longrightarrow a$ と b はともに p の倍数」を述べて‥4 点

$\square_3$ 結論を述べて……………………………………………………2 点

MJXA

直前東大整数特講

Z-KAI

会員番号		氏　名	