MJXB

直前講習

解答

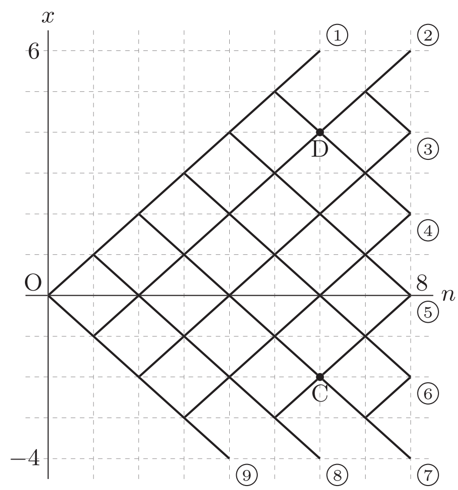
Ｚ会東大進学教室

直前東大確率特講

問題

【1】(1) 横軸に試行の回数 n を，縦軸に点 P の座標 x をとり，次の図 1 のような状態の推移を表すダイアグラムを描く．

図 1　状態の推移



点 A または B に到達するか，または 8 回の試行を終えて，ゲームが終了することを表す点を，図 1 のように①から⑨で表す．

7 回以前に終了するのは①，⑧，⑨のいずれかである．

- ①は表が 6 回続けて出る場合だから，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^6$
- ⑨は裏が 4 回続けて出る場合だから，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
- ⑧は表が 1 回，裏が 3 回出た後に，裏が 2 回続けて出る場合だから，その確率は

$$4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

となり，求める確率は

$$\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^4}+\frac{4}{2^6}=\frac{1+4+4}{2^6}=\mathbf{\frac{9}{64}}\quad(\text{答})$$

(2) 余事象を考えると,「A または B に到達してゲームが終了する」という事象である．これは，①，②，⑦，⑧，⑨で表される．(1) より①，⑧，⑨で終了する確率は $\frac{9}{64}$ であるから，これ以外の確率を求める．

- ⑦の確率は，状態の推移を表す経路が点 C を通ることに注意して

$$({}_6\mathrm{C}_2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{14}{2^8}$$

- ②についても，同様に点 D を通ることから

$$6\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{2^8}$$

となる．よって，A または B に到達してゲームが終了する確率は

$$\frac{9}{64} + \frac{6}{2^8} + \frac{14}{2^8} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

となり，求める確率は

$$1 - \frac{7}{32} = \mathbf{\frac{25}{32}} \quad (答)$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）12 点　　（2）13 点

（1）$\square_1$ 7 回以前に終了するのが①，⑧，⑨のいずれかであるとわかって……2 点

$\square_2$ 答を得て……10 点

（2）$\square_1$ 余事象が①，②，⑦，⑧，⑨の場合であるとわかって……3 点

$\square_2$ ②，⑦の確率をそれぞれ求めて……7 点

$\square_3$ 答を得て……3 点

【2】(1) x 軸方向に $+1$ 進むことを W で，y 軸方向に $+1$ 進むことを N で表せば，求める経路の総数は W6 個，N4 個からなる列の個数に等しい．この個数は

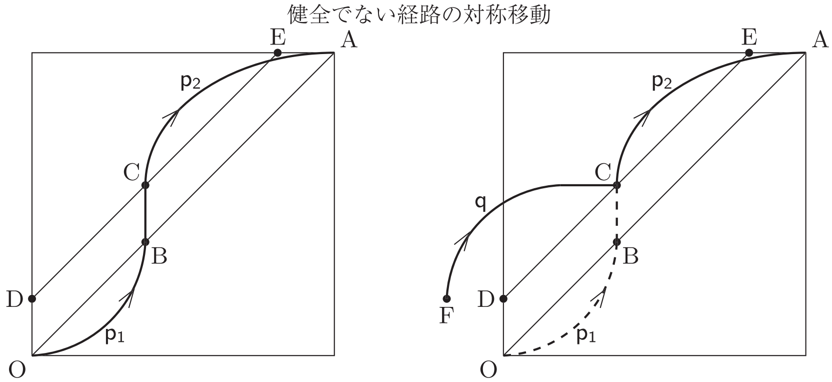
$$\frac{10!}{6!4!}=\mathbf{210}\quad\text{（答）}$$

(2) 健全な経路とは，正方形の対角線 OA よりも上には行かない経路の個数である．

まず，O から A に到る格子経路の総数は，W を n 個，N を n 個含む長さ $2n$ の語の総数に等しく，その個数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 個である．これから，健全でない格子経路の個数を引き去ることにより C_n が得られる．

健全でない経路は，つねに $y>x$ にある点を通過する．そこで，ある健全でない経路 p が最初に対角線 OA よりも上の領域に入った点を $\mathrm{C}(k,\ k+1)$ とする．ここで，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ である．

健全でない経路の対称移動



p の，原点 O から点 C にいたる部分経路 p_1 を，$\mathrm{D}(0,\ 1)$，$\mathrm{E}(n-1,\ n)$ を結ぶ直線 $y=x+1$ に関して対称に移動すると，点 $\mathrm{F}(-1,\ 1)$ から C に到る格子経路 q が得られる．

健全でない経路 p の C から A に到る部分経路を p_2 として，経路 q と p_2 を連結することによって，点 F から点 A に到る経路になる．この操作によって，健全でない任意の経路それぞれについて点 F から点 A に到る経路がただ 1 つ得られる．

逆に，点 F から点 A への経路が 1 つ定まれば，その経路はかならず線分 DE と共有点をもつ．F からその共有点までの部分経路を直線 DE に関して折り返せば，O から A に到る健全でない経路がただ 1 つ得られる．

以上より，O から A に到る健全でない経路は，F から A に到る経路と 1 対 1 に対応するから，その個数は等しい．よって求める C_n は

$$\begin{aligned}C_n&={}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{n+1+n-1}\mathrm{C}_{n+1}={}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}=\frac{(2n)!(n+1-n)}{(n+1)!n!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

(3) 1 から始まる $2k-1$ までの k 個の奇数の積を $\overline{O}(k)$ で表す．

$$\overline{O}(k)=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$$

${}_{2n}\mathrm{C}_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ であり，この分子 $(2n)!$ について

$$(2n)! = 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n = \overline{O}(n) \cdot 2^n \cdot n!$$

が成り立つから

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{\overline{O}(n) \cdot 2^n \cdot n!}{n!n!} = \frac{2^n \cdot \overline{O}(n)}{n!}$$

従って

$$C_n = \frac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2^n \cdot \overline{O}(n)}{n!} = \frac{2^n \cdot \overline{O}(n)}{(n+1)!}$$

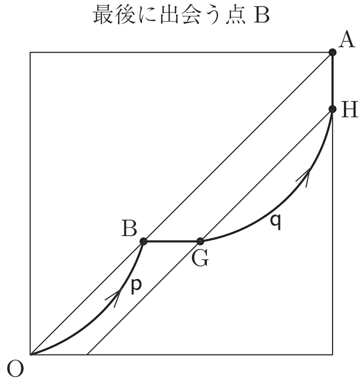
であり，右辺の分子は

$$2^n \cdot \overline{O}(n) = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot (4n-2)$$

であるから，確かに成立する． （証終）

(4) O を原点，また $\mathrm{A}(n+1,\ n+1)$ として，縦横 $n+1$ 区画からなる正方形を考える．

最後に出会う点 B



すべての健全な経路は，対角線 OA と A 以外に共有点をもつ (その共有点は O のみであってもよい)．そこで，健全な経路が対角線 OA と (A を除いて) 最後に出会う点を B とする．ここで，B は O と一致してもよいが，A に一致することはない．つまり

$$\mathrm{B}(k,\ k)\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

このとき，O から B に到る健全な経路 p は縦横 k 区画の正方形における健全な経路となり，その個数は C_k 個ある．

次に，B から A に到る健全な経路を考える．B の定義により，対角線の一部 BA と，端点 B，A 以外で出会うことはない．よって B から A にいたる健全な部分経路は，$\mathrm{G}(k+1,\ k)$ と $\mathrm{H}(n+1,\ n)$ を対角線の両端とする正方形の健全な経路，つまり線分 GH よりも上を通ることはない経路，q を含む．

このような経路 q の個数は，縦横 $n-k$ 区画からなる健全な経路の個数 C_{n-k} 個ある．

以上より，対角線上の点 $\mathrm{B}(k,\ k)$（ただし $k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）で対角線 OA と (A を除いて) 最後に出会う経路の個数は $C_k \cdot C_{n-k}$ 個ある．

$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ とすれば，健全な経路の集合はどの 2 つも互いに素であるから，健全な経路の総数は k の 0 から n にわたる和に等しく，確かに次が成り立つ．

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k} \qquad \text{（証終）}$$

■ 参考

（1）一般に，与えられた問題を文字列に還元することによって解決が容易になることが多い．そのために，少しだけ語彙を増やしておこう．次のように言えば，曖昧さなく記述できる；

> 求める経路は，Alphabet 集合 $\Sigma = \{\mathrm{W},\ \mathrm{N}\}$ 上の長さ 10 の語で，W を 6 個，N を 4 個含むようなものの集合と 1 対 1 に対応する．

特に $\Sigma = \{0,\ 1\}$ のときは，Σ 上の語を 2 進列（binary sequence）と言う．

【配点の目安】

配点：25 点

（1）4 点　（2）7 点　（3）7 点　（4）7 点

（1）$\square_1$ 答を得て …………………………………… 4 点

（2）$\square_1$ O から A に到る健全でない経路は，F から A に到る経路と 1 対 1 に対応することを示して …………………… 5 点

$\square_2$ 答を得て …………………………………… 2 点

（3）$\square_1$ $(2n)! = \overline{O}(n) \cdot 2^n \cdot n!$ がわかって …………………… 4 点

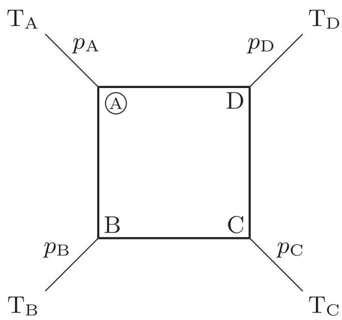
$\square_2$ 題意を示して …………………………………… 3 点

（4）$\square_1$ 対角線上の点 B$(k,\ k)$ で対角線 OA と (A を除いて) 最後に出会う経路の個数を求めて …………………… 5 点

$\square_2$ 題意を示して …………………………………… 2 点

【3】頂点 A，B，C，D に仕掛けられたネズミ捕り (trap) をそれぞれ $\mathrm{T_A}$，$\mathrm{T_B}$，$\mathrm{T_C}$，$\mathrm{T_D}$ とし，それぞれにネズミがかかる確率を p_{A}，p_{B}，p_{C}，p_{D} と定める．

図 1　ネズミ捕り



まず，全確率の法則より

$$p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}} + p_{\mathrm{C}} + p_{\mathrm{D}} = 1$$

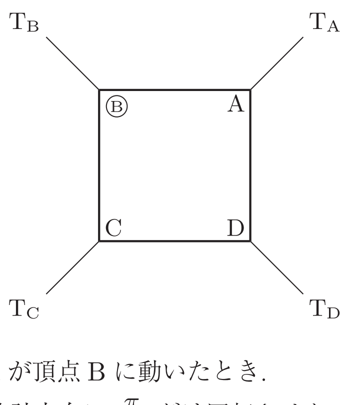
また，対角線 AC に関する対称性により

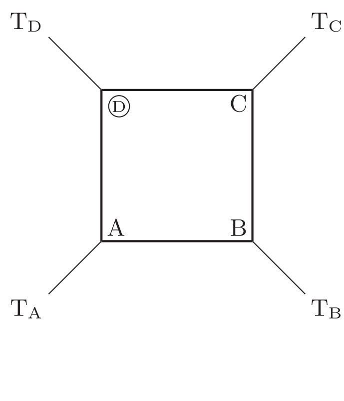
$$p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{D}}$$

が成り立つ．ネズミが (I) 頂点 B に動いたとき，および (II) 頂点 D に動いた場合に，それぞれの trap にかかる確率を考える．

以下，各頂点で，ネズミは trap の方を向いていると考える．従って，例えば頂点 A にいるとき，右側の trap とは $\mathrm{T_D}$ のことであり，左側の trap とは $\mathrm{T_B}$ のことである．更に，正面の trap，背面の trap とはそれぞれ $\mathrm{T_A}$，$\mathrm{T_C}$ のこととする．

図 2　$\pm\frac{\pi}{2}$ 回転





(I) ネズミが頂点 B に動いたとき．

図 1 を時計方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたのが，図 2 の左側の図である．このとき，

- $\mathrm{T_A}$ にかかる確率は，頂点 A にいて右側の trap $\mathrm{T_D}$ にかかる確率 p_{D} に等しい．
- $\mathrm{T_B}$ にかかる確率は，頂点 A にいて正面の trap $\mathrm{T_A}$ にかかる確率 p_{A} に等しい．
- $\mathrm{T_C}$ にかかる確率は，頂点 A にいて左側の trap $\mathrm{T_B}$ にかかる確率 p_{B} に等しい．
- $\mathrm{T_D}$ にかかる確率は，頂点 A にいて背面の trap $\mathrm{T_C}$ にかかる確率 p_{C} に等しい．

(II) ネズミが頂点 D に動いたとき．

図 1 を反時計方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたのが，図 2 の右側の図である．このとき，

- T_A にかかる確率は，頂点 A にいて左側の trap T_B にかかる確率 p_B に等しい．
- T_B にかかる確率は，頂点 A にいて背面の trap T_C にかかる確率 p_C に等しい．
- T_C にかかる確率は，頂点 A にいて右側の trap T_D にかかる確率 p_D に等しい．
- T_D にかかる確率は，頂点 A にいて正面の trap T_A にかかる確率 p_A に等しい．

以上から，それぞれの trap にかかる確率について次が成り立つ．

(i) T_A にかかるのは頂点 A にいてかかる確率が $\dfrac{1}{2}$，頂点 B に動いてかかる確率が p_D，頂点 D に動いてかかる確率が p_B であるから，

$$p_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p_B + \frac{1}{4}p_D$$

(ii) T_B にかかるのは，B に動いてかかる確率が p_A，D に動いてかかる確率が p_C であるから，

$$p_B = \frac{1}{4}p_A + \frac{1}{4}p_C$$

(iii) T_C にかかるのは，B に動いてかかる確率が p_B，D に動いてかかる確率が p_D であるから，

$$p_C = \frac{1}{4}p_B + \frac{1}{4}p_D$$

(iv) T_D にかかるのは，B に動いてかかる確率が p_C，D に動いてかかる確率が p_A であるから，

$$p_D = \frac{1}{4}p_A + \frac{1}{4}p_C$$

以上より，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} p_A + p_B + p_C + p_D = 1,\ p_B = p_D \qquad \therefore\quad p_A + 2p_B + p_C = 1 \quad \cdots\cdots ① \\ p_A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}p_B + \dfrac{1}{4}p_D \qquad \therefore\quad p_A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}p_B \quad \cdots\cdots ② \\ p_B = \dfrac{1}{4}p_A + \dfrac{1}{4}p_C \quad \cdots\cdots ③ \\ p_C = \dfrac{1}{4}p_B + \dfrac{1}{4}p_D = \dfrac{1}{2}p_B \quad \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

これを解く．③と④より

$$p_B = \frac{1}{4}p_A + \frac{1}{8}p_B \qquad \therefore\quad p_A = \frac{7}{2}p_B$$

②に代入して $\dfrac{7}{2}p_B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}p_B$ より，$p_B = p_D = \dfrac{1}{6}$ となり

$$p_A = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

①より

$$p_C = 1 - 2\cdot\frac{1}{6} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$$

以上より，次の Table を得る．

Trap	$\mathbf{T_A}$	$\mathbf{T_B}$	$\mathbf{T_C}$	$\mathbf{T_D}$
Prob.	$\mathbf{\dfrac{7}{12}}$	$\mathbf{\dfrac{1}{6}}$	$\mathbf{\dfrac{1}{12}}$	$\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

（答）

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ $p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}+p_{\mathrm{C}}+p_{\mathrm{D}}=1$，$p_{\mathrm{B}}=p_{\mathrm{D}}$ がわかって …………………… 4（各 2）点

$\square_2$ $p_{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}p_{\mathrm{B}}+\dfrac{1}{4}p_{\mathrm{D}}$，$p_{\mathrm{B}}(=p_{\mathrm{D}})=\dfrac{1}{4}p_{\mathrm{A}}+\dfrac{1}{4}p_{\mathrm{C}}$，

$p_{\mathrm{C}}=\dfrac{1}{4}p_{\mathrm{B}}+\dfrac{1}{4}p_{\mathrm{D}}$ がわかって …………………………………… 9（各 3）点

$\square_3$ 答を得て ………………………………………………………… 12（各 3）点

【4】(1) 甲が2回目にカードを引かないことにしたとき，甲が勝つ条件は

$c \leqq a$ かつ ($a < c+d \leqq N$でない)

が成立することである．ここで，$c \leqq a$ をみたす c の個数は a 通りであり，このとき

$a < c+d \leqq N \iff a-c < d \leqq N-c$

をみたす d の個数は $N-a$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{a}{N}\left(1-\frac{N-a}{N}\right) = \boldsymbol{\frac{a^2}{N^2}} \quad \text{（答）}$$

(2) 甲が2回目にカードを引くことにしたとき，甲の勝つ条件は

$1 \leqq b \leqq N-a$ $(a < N)$

(ただし, $a = N$ のときの確率は0)

であって，かつ，この範囲の各 b に対して

$c \leqq a+b$ かつ ($a+b < c+d \leqq N$ でない)

が成立することである．

(1) と同様にして

$a+b < c+d \leqq N \iff a+b-c < d \leqq N-c$

をみたす d の個数は $N-(a+b)$ 通りであるから，求める確率は

$$\sum_{b=1}^{N-a} \frac{1}{N} \cdot \frac{a+b}{N} \cdot \left\{1-\frac{N-(a+b)}{N}\right\}$$

$$= \frac{1}{N^3}\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2$$

$$= \frac{1}{N^3}\sum_{k=a+1}^{N}k^2 \quad (a+b=k \text{ とおいた})$$

$$= \frac{1}{N^3}\left(\sum_{k=1}^{N}k^2 - \sum_{k=1}^{a}k^2\right)$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}$$

これは，$a = N$ のときも成り立つから

$$\boldsymbol{\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25点

(1) 10点　　(2) 15点

(1) $\square_1$ 条件をみたす c の個数がわかって ……………………………… 4点

$\square_2$ 条件をみたす d の個数がわかって ……………………………… 4点

□$_3$ 答に …………………………………………………………… 2 点

(2) □$_1$ a, b を固定したときの甲の勝つ確率

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{a+b}{N}\cdot\left\{1-\frac{N-(a+b)}{N}\right\}\ \left(=\frac{(a+b)^2}{N^3}\right)$$

がわかって …………………………………………………………… 8 点

□$_2$ 答に …………………………………………………………… 7 点

MJXB

直前東大確率特講

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製