MJXC

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大図形特講

問題

【1】 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \geqq \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \geqq \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \geqq 2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 8 \leqq 0$$

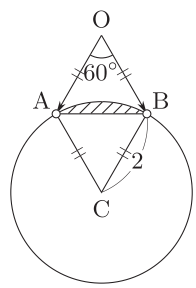
$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + 8 \leqq 0$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \leqq (\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2) - 8$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2 \leqq (4 + 2 \times 2 + 4) - 8 = 4$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| \leqq 2$$



よって，点 P は点 C を中心として，半径 2 である円の周および内部を動く．これより，点 P が描く図形は，右図の斜線部．ただし，円周上は含み，辺 AB 上は含まない．（答）

次に

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = (\overrightarrow{\mathrm{CA}} - \overrightarrow{\mathrm{CP}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CP}})$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} - (\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$$

$$= 2 - \overrightarrow{\mathrm{CO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CO}}) + 2$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PO}} + 2$$

ここで，$\mathrm{C}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(-1,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{O}(0,\ 2\sqrt{3})$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ として座標平面を考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (-x,\ -y),\ \overrightarrow{\mathrm{PO}} = (-x,\ 2\sqrt{3} - y)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PO}} = x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y\ (= k \text{ とおく})$$

$$\therefore \quad x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = k + 3 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$x^2 + y^2 \leqq 4 \text{ かつ } y > \sqrt{3}$$

をみたして動くから，①で表された円が図の斜線部と共有点をもつとき，実数 k すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PO}}$ の値が存在する．

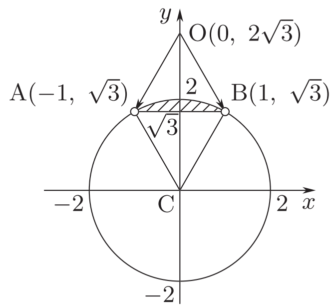
①は中心 $(0,\ \sqrt{3})$，半径 $\sqrt{k+3}$ の円を表すから

$(x,\ y)=(0,\ \sqrt{3})$ のとき

$$\sqrt{k+3}=0 \iff k=-3$$

$(x,\ y)=(\pm 1,\ \sqrt{3})$ のとき

$$\sqrt{k+3}=1 \iff k=-2$$



よって，図より

$$-3<k<-2$$

$$\iff -3<\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PO}}<-2$$

$$\iff \boldsymbol{-1<\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}<0}$$ （答）

【配点の目安】

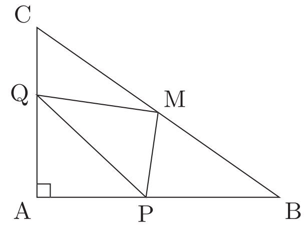
配点：25 点

- $\square_1$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| \leqq 2$ を得て …………………… 5 点
- $\square_2$ 求める領域を図示して …………………… 5 点
- $\square_3$ $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2$ を得て …………………… 4 点
- $\square_4$ 円 $x^2+(y-\sqrt{3})^2=k+3$ が求めた領域と共有点をもつときを考えるとわかって …………………… 4 点
- $\square_5$ 答に …………………… 7 点

【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\vec{b}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{q}-\vec{p}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{p}-\vec{b}$$



M は，BC の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-\overrightarrow{\mathrm{MB}}=-\vec{b}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{q}-(-\vec{b})=\vec{q}+\vec{b}$$

したがって，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{BP}^2+\mathrm{CQ}^2$ より

$$\left|\vec{q}-\vec{p}\right|^2=\left|\vec{p}-\vec{b}\right|^2+\left|\vec{q}+\vec{b}\right|^2$$

$$\therefore\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{b}-\vec{q}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2 \quad \cdots\cdots ①$$

ところで，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{AC}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ だから

$$(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{q}+\vec{b})=0$$

$$\therefore\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=-\vec{p}\cdot\vec{b}+\vec{q}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2 \quad \cdots\cdots ②$$

ゆえに，①, ②より

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$$

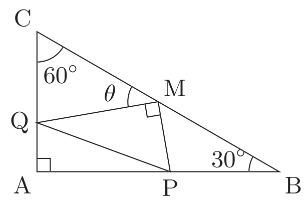
すなわち

$$\angle\mathrm{PMQ}=90^\circ$$

（証終）

(2) 題意の $\triangle\mathrm{ABC}$ は

$$\angle\mathrm{C}=60^\circ,\ \angle\mathrm{B}=30^\circ$$



の直角三角形である．したがって，$\angle\mathrm{CMQ}=\theta$ とおくと，点 P, Q は，それぞれ AB, AC 上の点だから

$$0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ \quad \cdots\cdots ③$$

$\triangle\mathrm{MCQ}$ で，正弦定理から

$$\frac{\mathrm{MQ}}{\sin\angle\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{MC}}{\sin\angle\mathrm{CQM}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{MQ}=\frac{2\sin 60^\circ}{\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

同様に，$\triangle\mathrm{MBP}$ で

$$\frac{\mathrm{MP}}{\sin\angle\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{MB}}{\sin\angle\mathrm{BPM}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{MP}=\frac{2\sin 30^\circ}{\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{1}{\sin(60^\circ+\theta)}$$

ゆえに，$\triangle$MPQ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{MP}\cdot\mathrm{MQ} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin(120^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\sin^2(60^\circ+\theta)} \end{aligned}$$

ここで，③より

$$60^\circ \leqq 60^\circ+\theta \leqq 120^\circ$$

だから

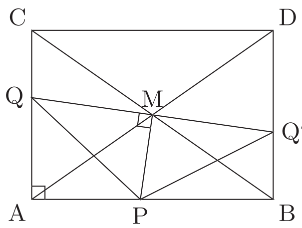
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin(60^\circ+\theta) \leqq 1$$

ゆえに，$\theta = 30^\circ$ のとき，S は最小となる．すなわち

$$S_m = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{（答）}$$

■ 別解

（1）長方形 ABDC をとる．Q の M に関する対称点を Q$'$ とすると



$$\mathrm{CQ} = \mathrm{BQ}'$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}'^2 &= \mathrm{BP}^2 + \mathrm{BQ}'^2 \\ &= \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CQ}^2 \\ &= \mathrm{PQ}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{PQ}' = \mathrm{PQ}$$

$\triangle$PQQ$'$ が二等辺三角形で M が QQ$'$ の中点であるから

$\mathrm{PM} \perp \mathrm{QQ}'$　　（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）9 点　　　（2）16 点

（1）$\square_1$ $\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CQ}^2$ より $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b} - \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{b} - \left|\overrightarrow{b}\right|^2$ を得て $\cdots\cdots$ 3 点

$\square_2$ $\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ より $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b} + \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{b} + \left|\overrightarrow{b}\right|^2$ を得て $\cdots\cdots$ 3 点

$\square_3$ 証明ができて $\cdots\cdots$ 3 点

（2）$\square_1$ MQ，MP を θ を用いて表して $\cdots\cdots$ 8（各 4）点

$\square_2$ $\triangle$MPQ の面積を θ を用いて表して $\cdots\cdots$ 4 点

$\square_3$ 答に $\cdots\cdots$ 4 点

$\boxed{\text{別解}}$

(1) ■$_1$ Q$'$ を設定して …… 2 点

■$_2$ PQ$'$=PQ がわかって …… 4 点

■$_3$ 結論を述べて …… 3 点

【3】 $\triangle$ABC に垂直な単位ベクトルを $\overrightarrow{p}=(p,\ q,\ r)$ $(p^2+q^2+r^2=1)$ とする．$\triangle\mathrm{ABC}\perp\overrightarrow{p}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{p}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{p}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{p}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{p}=0$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b,\ c,\ a)-(a,\ b,\ c)=(b-a,\ c-b,\ a-c)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,\ a,\ b)-(a,\ b,\ c)=(c-a,\ a-b,\ b-c)$$

より

$$\begin{cases}(b-a)p+(c-b)q+(a-c)r=0 & \cdots\cdots ① \\ (c-a)p+(a-b)q+(b-c)r=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

① $\times(b-c)-$ ② $\times(a-c)$ より

$$\{(b-a)(b-c)-(c-a)(a-c)\}p+\{(c-b)(b-c)-(a-b)(a-c)\}q=0$$

$$\iff (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(p-q)=0$$

ここで，a，b，c はどの 2 つも互いに異なる実数 $\cdots\cdots(*)$ であるから

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\fallingdotseq 0$$

したがって

$$p=q$$

①に代入して

$$(c-a)p+(a-c)r=0\iff(c-a)(p-r)=0 \qquad \therefore\quad p=r\ (\because(*)\text{ より})$$

以上より

$$p=q=r$$

$p^2+q^2+r^2=1$ より

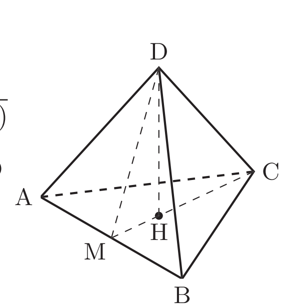
$$3p^2=1 \qquad \therefore\quad p=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって

$$\overrightarrow{p}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

次に，$\triangle$ABC の 1 辺の長さを $2L$ とすると

$$2L=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$



正四面体の性質から，底面を $\triangle$ABC とすると，点 D は $\triangle$ABC の重心を通り $\triangle$ABC に垂直な直線上にある．$\triangle$ABC の重心を H とすると，四面体の高さ $\overline{\mathrm{DH}}$ は

$$\overline{\mathrm{AM}}=L,\ \overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{MC}}=\sqrt{3}L,\ \overline{\mathrm{MH}}=\frac{\sqrt{3}}{3}L$$

より

$$\overline{\mathrm{DH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{MD}}^2 - \overline{\mathrm{MH}}^2} = \sqrt{3L^2 - \frac{1}{3}L^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}L$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{DH}}\,\overrightarrow{p} = \frac{2\sqrt{6}}{3}L\overrightarrow{p}$$

ここで，H は△ ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} = \dfrac{a+b+c}{3}(1,\ 1,\ 1)$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}L\overrightarrow{p} \\ &= \frac{a+b+c}{3}(1,\ 1,\ 1) \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}L \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{a+b+c \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}\right\}(1,\ 1,\ 1)} \quad \text{（答）}\end{aligned}$$

■ 別解

D(x, y, z) とおくと，連立方程式

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 4L^2 \\ (x-b)^2+(y-c)^2+(z-a)^2 = 4L^2 \\ (x-c)^2+(y-a)^2+(z-b)^2 = 4L^2\end{cases}$$

が成立する．

x，y，z の対称性より

$$x = y = z$$

したがって，この 3 解は t の 2 次方程式

$$(t-a)^2+(t-b)^2+(t-c)^2 = 4L^2$$

$$\iff 3t^2 - 2(a+b+c)t + a^2+b^2+c^2-4L^2 = 0$$

の解である．よって

$$\begin{aligned}t &= \frac{a+b+c \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2-4L^2)}}{3} \\ &= \frac{a+b+c \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}\end{aligned}$$

を用いて D (t, t, t) となる。

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ △ABC に垂直な単位ベクトルを求めて ……………………………… 7 点

□$_2$ 正四面体の高さを求めて …………………………………………… 8 点

□$_3$ 答に ……………………………………………………………………… 10 点

別解

■$_1$ 連立方程式

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=4L^2 \\ (x-b)^2+(y-c)^2+(z-a)^2=4L^2 \\ (x-c)^2+(y-a)^2+(z-b)^2=4L^2 \end{cases}$$

を得て …………………………………………………………… 7 点

■$_2$ $x=y=z$ を述べて …………………………………………………… 3 点

■$_3$ x，y，z の値が t の 2 次方程式

$$3t^2-2(a+b+c)t+a^2+b^2+c^2-4L^2=0$$

の解とわかって ……………………………………………………… 10 点

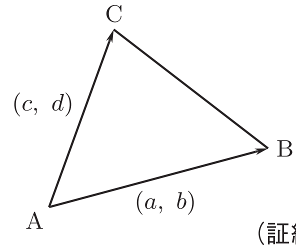
■$_4$ 答に ………………………………………………………………… 5 点

【4】(1) 3 頂点を A, B, C とし, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,\ d)$
(a, b, c, d は整数) とすると

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

$|ad-bc|$ は整数で, 0 ではないから, $|ad-bc|\geqq 1$
となり

$$\triangle\mathrm{ABC}\geqq\frac{1}{2}$$



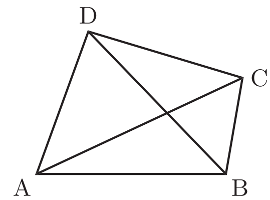
(証終)

(2) 四角形を ABCD とし

$$\triangle\mathrm{ABC}\geqq\frac{1}{2},\ \triangle\mathrm{ACD}\geqq\frac{1}{2}$$

で $\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=1$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}$$



同様にして, $\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}$ で, $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}$ となる.

$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{ABD}$ をいずれも AB が底辺で C と直線 AB の距離, D と直線 AB の距離が高さと見れば, C, D は直線 AB から等距離にあり DC // AB となる.

同様に, AD // BC で ABCD は平行四辺形である. (証終)

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|ad-bc|$ を述べて ・・・・・・・・・・ 4 点
$\square_2$ $|ad-bc|\geqq 1$ を述べて ・・・・・・・・・・ 4 点
$\square_3$ 結論を述べて ・・・・・・・・・・ 2 点

(2) $\square_1$ $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}$ がわかって ・・・・・・・・・・ 5 点
$\square_2$ $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}$ を述べて ・・・・・・・・・・ 5 点
$\square_3$ DC//AB を述べて ・・・・・・・・・・ 2 点
$\square_4$ 結論を述べて ・・・・・・・・・・ 3 点

MJXC

直前東大図形特講

Z-KAI

会員番号		氏　名	