MJXD

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

# 直前東大数学Ⅲ特講

## 問題

【1】$\arg z = \alpha$ とおくと

$$|z|\cos\alpha = a\cos\theta,\ |z|\sin\alpha = \sin\theta$$

である．したがって

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{a}\tan\theta$$

これより

$$\tan y = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha} = \frac{\tan\theta - \dfrac{1}{a}\tan\theta}{1 + \dfrac{1}{a}\tan^2\theta}$$

$$= \frac{a-1}{\dfrac{a}{\tan\theta} + \tan\theta} \leqq \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

$$\left(\because \quad \frac{a}{\tan\theta} > 0,\ \tan\theta > 0 \text{ より相加・相乗平均の関係から}\right)$$

等号成立は

$$\frac{a}{\tan\theta} = \tan\theta \qquad \therefore \quad \tan\theta = \sqrt{a}$$

のとき．

よって

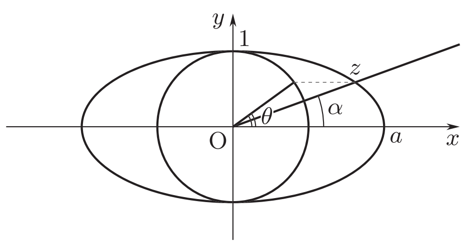
$$\boldsymbol{\tan\theta_0 = \sqrt{a},\ \tan M = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}} \quad \text{（答）}$$

■ 参考

$z = x + iy$ とおくと $x = a\cos\theta,\ y = \sin\theta$ なので $x,\ y$ は

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

の上にあり，それぞれの角 $\theta$ と $\alpha$ は下図のようになっている．




---

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ $\cos\alpha = \dfrac{a\cos\theta}{|z|},\ \sin\alpha = \dfrac{\sin\theta}{|z|}$ がわかって ……………………………5 点

$\square_2$ $\tan(\arg z)$ を $a$，$\theta$ で表して $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 点

$\square_3$ 相加・相乗平均の関係より $\tan y \leqq \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}$ を述べて $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 点

$\square_4$ 等号成立条件を述べて $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 点

$\square_5$ $\tan\theta_0 = \sqrt{a}$，$\tan M = \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}$ 　がわかって $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10（各 5）点

【2】1 回目はどの箱に入ってもよい．2 回目から $N$ 回目はまだ入っていない箱に入れていく．$N+1$ 回目にすでに入っている $N$ 個の箱のどれかに入れる．よって

$$P(2N,\ N+1)=\frac{2N}{2N}\cdot\frac{2N-1}{2N}\cdot\cdots\cdot\frac{2N-(N-1)}{2N}\cdot\frac{N}{2N}$$

より

$$\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\log\frac{2N-k}{2N}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\log\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{N}\right)$$

よって

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)\\
&=\int_0^1\log\left(1-\frac{x}{2}\right)dx\\
&=\int_0^1(-2)\left(1-\frac{x}{2}\right)'\log\left(1-\frac{x}{2}\right)dx\\
&=\left[(-2)\left(1-\frac{x}{2}\right)\log\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]_0^1-\int_0^1(-2)\left(1-\frac{x}{2}\right)\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}dx\\
&=-\log\frac{1}{2}-\int_0^1 1\,dx\\
&=\mathbf{\log 2-1}\quad\text{（答）}
\end{aligned}$$

---

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ $P(2N,\ N+1)=\dfrac{2N}{2N}\cdot\dfrac{2N-1}{2N}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2N-(N-1)}{2N}\cdot\dfrac{N}{2N}$ を求めて……5 点

$\square_2$ $\dfrac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)$ を和の形で表して……5 点

$\square_3$ $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)=\int_0^1\log\left(1-\frac{x}{2}\right)dx$ がわかって……5 点

$\square_4$ 答に……10 点

【3】(1) 条件より $x \geqq 5$ において $f(x) > 1$ なので，この範囲で

$$\int_5^x f(t)\,dt \geqq \int_5^x dt \qquad \therefore \quad F(x) - F(5) \geqq x - 5$$

すなわち

$$F(x) \geqq x - 5 + F(5) \quad \cdots\cdots ①$$

そして，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \{x - 5 + F(5)\} = +\infty$ だから

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

同様に，$x \leqq -5$ において $f(x) > 1$ なので，この範囲で

$$\int_x^{-5} f(t)\,dt \geqq \int_x^{-5} dt \qquad \therefore \quad F(-5) - F(x) \geqq -5 - x$$

すなわち

$$F(x) \leqq x + 5 + F(-5) \quad \cdots\cdots ②$$

そして，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \{x + 5 + F(-5)\} = -\infty$ だから

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$$

（証終）

(2) $F(5) > 0$ ならば，①より $x \geqq 5$ のとき

$$F(x) > x - 5 \geqq 0$$

となり，この範囲で $F(x) = 0$ の解は存在しない．また，$F(-5) < 0$ ならば，②より $x \leqq -5$ のとき

$$F(x) < x + 5 \leqq 0$$

となり，この範囲で $F(x) = 0$ の解は存在しない．よって，$F(x) = 0$ の解が $x \leqq -5$，$-5 < x < 5$，$5 \leqq x$ に少なくとも 1 つずつ存在するならば

$$F(-5) \geqq 0 \text{ かつ } F(5) \leqq 0$$

でなければならない．

逆にこのとき，(1) の結果と $F(x)$ の連続性から以下のことがわかる．

$$\begin{cases} F(-5) \geqq 0 \text{ より}, x \leqq -5 \text{ の範囲に解が存在する.} \\ F(5) \leqq 0 \text{ より}, 5 \leqq x \text{ の範囲に解が存在する.} \end{cases}$$

次に，$-5 < x < 5$ の範囲の解の存在を示す．

(i) $F(-5) > 0$ かつ $F(5) < 0$ のときは明らかに，$-5 < x < 5$ の範囲に解が存在する．

(ii) $F(-5) > 0$ かつ $F(5) = 0$ のとき，$f(x)$ の連続性から

$$\lim_{x \to 5-0} f(x) = f(5) > 1$$

が成り立つ．これより，$x_1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で

$$f(x) > 1$$

をみたす 5 に十分近い数 $x_1(<5)$ をとることができる．すると，$F(x)$ は上の範囲で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{F(5)-F(x_1)}{5-x_1}=F'(c)=f(c),\ x_1<c<5$$

をみたす $c$ が存在し，かつこの $c$ は $f(c)>1$ をみたすので

$$\frac{F(5)-F(x_1)}{5-x_1}>1 \qquad \therefore\quad F(5)-F(x_1)>5-x_1$$

そして，$F(5)=0$ だから

$$F(x_1)<x_1-5<0$$

これと $F(-5)>0$ から，$-5<x<x_1(<5)$ の範囲に解が存在する．

(iii) $F(-5)=0$ かつ $F(5)<0$ のとき，(ii) と同様に $f(x)$ の連続性から，$-5\leqq x\leqq x_2$ の範囲で

$$f(x)>1$$

をみたす $-5$ に十分近い数 $x_2(>-5)$ がとれて，平均値の定理より

$$\frac{F(x_2)-F(-5)}{x_2-(-5)}=F'(d)=f(d),\ -5<d<x_2$$

をみたす $d$ が存在する．この $d$ は $f(d)>1$ をみたすので

$$\frac{F(x_2)-F(-5)}{x_2-(-5)}>1 \qquad \therefore\quad F(x_2)-F(-5)>x_2+5$$

そして，$F(-5)=0$ だから

$$F(x_2)>x_2+5>0$$

これと $F(5)<0$ から，$(-5<)x_2<x<5$ の範囲に解が存在する．

(iv) $F(-5)=0$ かつ $F(5)=0$ のときは，(ii)，(iii) と同様の考察により，$(-5<)x_2<x<x_1(<5)$ の範囲に解が存在する．

以上いずれの場合も $-5<x<5$ の範囲の解の存在が示されたので，題意は成立する．　　　　（証終）

■ 参考

(2) の $-5<x<5$ における解の存在は，背理法を用いても証明できる．この場合，$-5<x<5$ の範囲で

つねに $F(x)>0$ または，つねに $F(x)<0$

のいずれかが成立すると仮定して矛盾を導けばよく，やはり

$$F'(5)=f(5)>1,\ F'(-5)=f(-5)>1$$

が決め手になる（本質的に［解答］と同じだ）.

---

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 8 点　　　(2) 17 点

(1) $\square_1$ $F(x)-F(5) \geqq x-5$ を示して ……………………………… 1 点

$\square_2$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ に ……………………………… 3 点

$\square_3$ $F(-5)-F(x) \geqq -5-x$ を示して ……………………………… 1 点

$\square_4$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)=-\infty$ に ……………………………… 3 点

(2) $\square_1$ 必要条件であることを示して ……………………………… 6 点

$\square_2$ $F(-5) \geqq 0$ かつ $F(5) \leqq 0$ のとき

$x \leqq -5$, $5 \leqq x$ に少なくとも 1 つずつの解をもつことを述べて ……… 2 点

$\square_3$ $F(-5)>0$ かつ $F(5)<0$ のときに，$-5<x<5$ に

少なくとも 1 つの解をもつことを述べて ……………………………… 2 点

$\square_4$ $F(-5)>0$ かつ $F(5)=0$ のときに，$-5<x<5$ に

少なくとも 1 つの解をもつことを述べて ……………………………… 2 点

$\square_5$ $F(-5)=0$ かつ $F(5)<0$ のときに，$-5<x<5$ に

少なくとも 1 つの解をもつことを述べて ……………………………… 2 点

$\square_6$ 題意を示して ……………………………… 3 点

【4】条件において，$n=1$ のとき，${a_1}^2=3$ であるから，$a_1>0$ より

$$a_1=\sqrt{3}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} {a_n}^2 &= \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} {a_k}^2 \\ &= (n^2+2n) - \{(n-1)^2+2(n-1)\} = 2n+1 \end{aligned}$$

よって，$a_n>0$ より

$$a_n=\sqrt{2n+1} \text{ (これは } n=1 \text{ のときもみたす)}$$

$S_n=a_1+\cdots+a_n$ とおくと

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k+1}$$

このとき，$y=\sqrt{2x+1}$ は単調増加なので，$k \leqq x \leqq k+1$ において

$$\sqrt{2k+1} < \int_k^{k+1}\sqrt{2x+1}\,dx < \sqrt{2k+3}$$

第 1 式において $k=1$ から $k=n$ までの和をとって

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k+1} < \int_1^{n+1}\sqrt{2x+1}\,dx$$

$$\therefore \quad S_n < \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{3}(2n+3)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ①$$

また，第 2 式で $k=0$ から $k=n-1$ までの和をとって

$$\int_0^{n}\sqrt{2x+1}\,dx < \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{2k+3} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k+1}$$

$$\therefore \quad S_n > \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{n} = \frac{1}{3}(2n+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

したがって，①，② より

$$\frac{1}{3}(2n+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3} < S_n < \frac{1}{3}(2n+3)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{3}$$

両辺を $n^{\frac{3}{2}}$ で割ると

$$\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}n^{-\frac{3}{2}} < n^{-\frac{3}{2}}S_n < \frac{1}{3}\left(2+\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{3}n^{-\frac{3}{2}}$$

よって，$n\to\infty$ のとき，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}S_n = \frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで

$$T_n=\frac{a_1+\cdots\cdots+a_n}{n^r}=\frac{S_n}{n^r}=n^{-r+\frac{3}{2}}\cdot n^{-\frac{3}{2}}S_n$$

であるから，③ を考えると，$n \to \infty$ のときに

$$\begin{cases} -r+\dfrac{3}{2}>0 \text{ のとき，} n^{-r+\frac{3}{2}} \to \infty \text{ により} \quad T_n \to \infty \\ -r+\dfrac{3}{2}=0 \text{ のとき，} n^{-r+\frac{3}{2}} \to 1 \text{ により} \quad T_n \to \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \text{（収束）} \\ -r+\dfrac{3}{2}<0 \text{ のとき，} n^{-r+\frac{3}{2}} \to 0 \text{ により} \quad T_n \to 0 \text{（収束）} \end{cases}$$

以上より，求める収束条件は

$$\boldsymbol{r \geqq \frac{3}{2}} \quad \text{（答）}$$

このとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{r=\dfrac{3}{2}} \text{のとき} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots a_n}{n^r}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} \\ \boldsymbol{r>\dfrac{3}{2}} \text{のとき} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots a_n}{n^r}=0} \end{cases} \quad \text{（答）}$$

---

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ $a_1=\sqrt{3}$ を求めて ………… 2 点

□$_2$ $a_n=\sqrt{2n+1}$ を求めて ………… 3 点

□$_3$ $\dfrac{1}{3}(2n+1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{3}<S_n<\dfrac{1}{3}(2n+3)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{3}$ を得て ………… 7 点

□$_4$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}}S_n=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ を得て ………… 3 点

□$_5$ $r \geqq \dfrac{3}{2}$ を得て ………… 4 点

□$_6$ $\begin{cases} r=\dfrac{3}{2}\text{のとき} \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots a_n}{n^r}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ r>\dfrac{3}{2}\text{のとき} \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots a_n}{n^r}=0 \end{cases}$ を得て ………… 6（各 3）点

MJXD

直前東大数学Ⅲ特講

Z-KAI

| 会員番号 | | 氏　名 | |
|---|---|---|---|