MV

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前東医歯大数学

【1 回目】

問題

【1】実数 p，q，r，x，y，z に対して，コーシー・シュワルツの不等式

$$(px+qy+rz)^2 \leqq (p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2)$$

（等号成立の条件は $p:q:r=x:y:z$ のとき）　$\cdots\cdots(*)$

が成り立つから，$(*)$ において $x^2+y^2+z^2=1$ とすると

$$(px+qy+rz)^2 \leqq p^2+q^2+r^2$$

すなわち，$p>0$，$q>0$，$r>0$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のもとで

$$px+qy+rz \leqq \sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

が成り立つ．ここで，等号は

$$p:q:r=x:y:z$$

のとき成り立ち，与えられた条件とあわせると

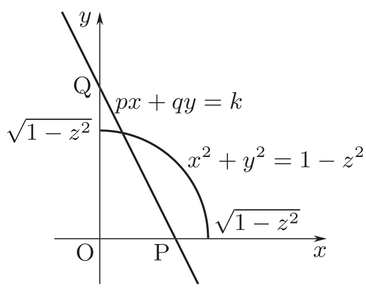
$$x=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\ (>0)$$

$$y=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\ (>0)$$

$$z=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\ (>0)$$

のとき成り立つ．したがって，$px+qy+rz$ の最大値は

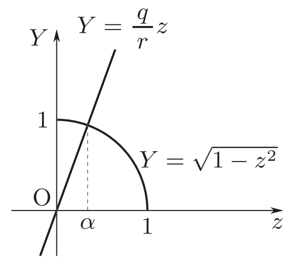
$$\boldsymbol{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$ **（答）**



一方，最小値については，z を固定すると xy 座標平面上の点 $(x,\ y)$ は，4 分円 $x^2+y^2=1-z^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の周上（両端を含む）に存在する．さらに，この周上の点を通る直線 $px+qy=k\ (>0)$ と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{OP}=\frac{k}{p},\ \mathrm{OQ}=\frac{k}{q}$$

であり，$p \geqq q>0$ であるから $\mathrm{OP} \leqq \mathrm{OQ}$ である．したがって，k が最小となるのは直線 $px+qy=k$ が 点 $(0,\ \sqrt{1-z^2})$ を通るときである．このとき



$$\begin{aligned} px+qy+rz &\geqq p\cdot 0+q\cdot\sqrt{1-z^2}+rz \\ &= q\sqrt{1-z^2}+rz \end{aligned}$$

であり

$$f(z)=q\sqrt{1-z^2}+rz\ (0 \leqq z \leqq 1)$$

とおくと，$0 < z < 1$ において

$$f'(z) = q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2z}{\sqrt{1-z^2}} + r = \frac{r\sqrt{1-z^2} - qz}{\sqrt{1-z^2}}$$

である．ここで，$Y = \dfrac{q}{r}z$ のグラフと $Y = \sqrt{1-z^2}$，$(0 \leqq z \leqq 1)$ のグラフから，$f(z) = 0$ をみたす解 α がただ 1 つ存在し，2 つのグラフの大小関係から，増減表は次のようになる．

z	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$	q	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	r

$q \geqq r$ であるから，$f(z)$ は $z = 1$ のとき最小値 r をとる．したがって

$$\begin{aligned} px + qy + rz &\geqq q\sqrt{1-z^2} + rz \ (\text{等号は } x = 0,\ y = \sqrt{1-z^2} \text{ のとき}) \\ &\geqq r \ (\text{等号は } z = 1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となるから，以上より $px + qy + rz$ は $x = 0$，$y = 0$，$z = 1$ のとき，最小値は

$\boldsymbol{r}$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ コーシー・シュワルツの不等式を述べて ……………… 5 点
□$_2$ 等号成立条件を述べて ……………… 5 点
□$_3$ 答に ……………… 5 点
□$_4$ z を固定したときの最小値を z を用いて表して ……………… 5 点
□$_5$ 答に ……………… 5 点

【2】(1) 与えられた条件を

$$100x+10y+z=x^3+y^3+z^3$$

$$\iff x^3+y^3=100x+10y+z-z^3 \quad \cdots\cdots ①$$

と変形すると，①の右辺の一の位の数は $z-z^3$ を 10 でわった余りに等しい．そこで，$z-z^3$ を 10 でわった余りをすべて書き出すと次の表のようになる．

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
z^3の一の位	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$z-z^3$	0	0	-6	-24	-60	-120	-210	-336	-504	-720
$z-z^3$ を 10 でわった余り	0	0	4	6	0	0	0	4	6	0

①より x^3+y^3 の一の位の数は 0 または 4 または 6 であることが示された．**（証終）**

(2) x^3+y^3 の一の位の数が 4 であるとき，(1) の表より $z=2,\ 7$ のときに限られる．

一方，x^3+y^3 の一の位の数が 4 となる $\{x,\ y\}$ の組は (1) の表より

$$\{0,\ 4\},\ \{1,\ 7\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 3\},\ \{5,\ 9\},\ \{8,\ 8\}$$

であるから，それぞれ x^3+y^3 の値を求めると

$\{x,\ y\}$	$\{0,\ 4\}$	$\{1,\ 7\}$	$\{2,\ 6\}$	$\{3,\ 3\}$	$\{5,\ 9\}$	$\{8,\ 8\}$
x^3+y^3	64	344	224	54	854	1024

ここで条件式を

$$100x+10y+z=x^3+y^3+z^3$$

$$\iff x^3+y^3+z^3-z=100x+10y \quad \cdots\cdots ②$$

と変形しておく．

(i) $z=2$ のとき

$$x^3+y^3+z^3-z=x^3+y^3+2^3-2=x^3+y^3+6$$

であり

$\{x,\ y\}$	$\{0,\ 4\}$	$\{1,\ 7\}$	$\{2,\ 6\}$	$\{3,\ 3\}$	$\{5,\ 9\}$	$\{8,\ 8\}$
x^3+y^3+6	70	350	230	60	860	1030

となり，②をみたす $x,\ y,\ z$ の値は存在しない．

(ii) $z=7$ のとき

$$x^3+y^3+z^3-z=x^3+y^3+7^3-7=x^3+y^3+336$$

であり

$\{x,\ y\}$	$\{0,\ 4\}$	$\{1,\ 7\}$	$\{2,\ 6\}$	$\{3,\ 3\}$	$\{5,\ 9\}$	$\{8,\ 8\}$
x^3+y^3+336	400	680	560	390	1190	1360

となり，②をみたすのは $(x,\ y,\ z)=(4,\ 0,\ 7)$ のときである．

以上より，条件をみたすのは

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(4,\ 0,\ 7)}$$ （答）

である．

(3) x^3+y^3 の一の位の数が 6 であるとき，(1) の表より $z=3,\ 8$ のときに限られる．

一方，x^3+y^3 の一の位の数が 6 となる $\{x,\ y\}$ の組は (1) の表より

$$\{0,\ 6\},\ \{1,\ 5\},\ \{2,\ 2\},\ \{3,\ 9\},\ \{4,\ 8\}$$

であるから，それぞれ x^3+y^3 の値を求めると

$\{x,\ y\}$	$\{0,\ 6\}$	$\{1,\ 5\}$	$\{2,\ 2\}$	$\{3,\ 9\}$	$\{4,\ 8\}$
x^3+y^3	216	126	16	756	576

(i) $z=3$ のとき

$$x^3+y^3+z^3-z=x^3+y^3+3^3-3=x^3+y^3+24$$

であり

$\{x,\ y\}$	$\{0,\ 6\}$	$\{1,\ 5\}$	$\{2,\ 2\}$	$\{3,\ 9\}$	$\{4,\ 8\}$
x^3+y^3+24	240	150	40	780	600

となり，②をみたすのは $(x,\ y,\ z)=(1,\ 5,\ 3)$ のときである．

(ii) $z=8$ のとき

$$x^3+y^3+z^3-z=x^3+y^3+8^3-8=x^3+y^3+504$$

であり

$\{x,\ y\}$	$\{0,\ 6\}$	$\{1,\ 5\}$	$\{2,\ 2\}$	$\{3,\ 9\}$	$\{4,\ 8\}$
x^3+y^3+504	720	630	520	1260	1080

となり，②をみたす $x,\ y,\ z$ の値は存在しない．

以上より，条件をみたすのは

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 5,\ 3)} \quad \text{（答）}$$

である．

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　　(2) 10 点　　(3) 10 点

(1) $\square_1$ x^3+y^3 の一の位の数と $z-z^3$ を 10 でわった余りに着目して ……… 2 点

$\square_2$ $z=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$ について調べて ……… 3 点

(2) $\square_1$ $z=2$ で存在しないことを述べて ……… 5 点

$\square_2$ $z=7$ のときの解を求めて ……… 5 点

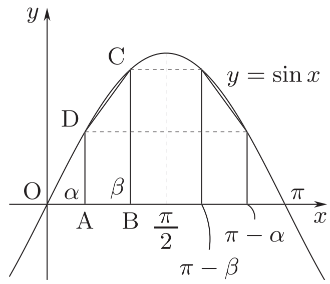
(3) $\square_1$ $z=3$ のときの解を求めて ……… 5 点

$\square_2$ $z=8$ で存在しないことを述べて ……… 5 点

【3】(1) 曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ は上に凸な曲線であるから，$0 \leqq \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき図のように

線分 DA，線分 AB，線分 BC，曲線 CD で囲まれた部分の面積を S

台形 ABCD の面積を T



とすると

$S > T$

である．したがって

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x\,dx > \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\sin\alpha+\sin\beta)$$

$$= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\{\sin\alpha+\sin(\pi-\beta)\} \quad \cdots\cdots ①$$

同様にして

$$\int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x\,dx > \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\{\sin(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\beta)\}$$

$$= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\{\sin\alpha+\sin(\pi-\beta)\} \quad \cdots\cdots ②$$

①と②の辺々を加えると

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x\,dx + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x\,dx > (\beta-\alpha)\{\sin\alpha+\sin(\pi-\beta)\} \quad \cdots\cdots ③$$

よって，題意は示された． (証終)

(2) ③において，$\alpha=\dfrac{n}{8}\pi$，$\beta=\dfrac{n+1}{8}\pi\ (n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ とおくと

$$\int_{\frac{n}{8}\pi}^{\frac{n+1}{8}\pi} \sin x\,dx + \int_{\frac{7-n}{8}\pi}^{\frac{8-n}{8}\pi} \sin x\,dx > \frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{n}{8}\pi+\sin\frac{7-n}{8}\pi\right) \quad \cdots ④$$

④において，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ とした式を辺々加えると

$$\sum_{k=0}^{7}\int_{\frac{k}{8}\pi}^{\frac{k+1}{8}\pi} \sin x\,dx > \frac{\pi}{8}\sum_{k=0}^{7}\sin\frac{k}{8}\pi \quad \cdots\cdots ⑤$$

このとき

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=0}^{7}\int_{\frac{k}{8}\pi}^{\frac{k+1}{8}\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\pi}{8}\sum_{k=0}^{7}\sin\frac{k}{8}\pi = \frac{\pi}{8}\sum_{k=1}^{7}\sin\frac{k}{8}\pi$$

であるから，⑤より

$$\frac{\pi}{8}\sum_{k=1}^{7}\sin\frac{k}{8}\pi < 2$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{7}\sin\frac{k}{8}\pi < \frac{16}{\pi}$$

よって，題意は示された．　　　　　　　　　　　　　　　　（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）11 点　　　（2）14 点

（1）$\square_1$ 面積を比較する方針に …… 3 点

$\square_2$ $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sin x\,dx > \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\{\sin\alpha+\sin(\pi-\beta)\}$ を示して …… 3 点

$\square_3$ $\displaystyle\int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x\,dx > \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\{\sin\alpha+\sin(\pi-\beta)\}$ を示して …… 3 点

$\square_4$ 題意を示して …… 2 点

（2）$\square_1$ $\displaystyle\int_{\frac{n}{8}\pi}^{\frac{n+1}{8}\pi} \sin x\,dx + \int_{\frac{7-n}{8}\pi}^{\frac{8-n}{8}\pi} \sin x\,dx > \frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{n}{8}\pi+\sin\frac{7-n}{8}\pi\right)$

を示して …… 4 点

$\square_2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\int_{\frac{k}{8}\pi}^{\frac{k+1}{8}\pi} \sin x\,dx > \frac{\pi}{8}\sum_{k=0}^{7}\sin\frac{k}{8}\pi$ を示して …… 4 点

$\square_3$ $\displaystyle\frac{\pi}{8}\sum_{k=1}^{7}\sin\frac{k}{8}\pi < 2$ を得て …… 4 点

$\square_4$ 題意を示して …… 2 点

【4】(1) 定義より

$$
\begin{aligned}
I_k + I_{k+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^k x + \tan^{k+2} x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\cdot \tan^k\ x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\cdot \tan^k x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' \cdot \tan^k x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{k+1}\tan^{k+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{k+1}} \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) (1) より

$$I_k + I_{k+2} = \frac{1}{k+1}$$

$k = n,\ n+1,\ \cdots,\ 2n$ として，辺々加えると

$$\sum_{k=n}^{2n} I_k + \sum_{k=n}^{2n} I_{k+2} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1}$$

$$\Longleftrightarrow S_n + (S_n + I_{2n+1} + I_{2n+2} - I_n - I_{n+1}) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore\quad 2S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} - I_{2n+1} - I_{2n+2} + I_n + I_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで

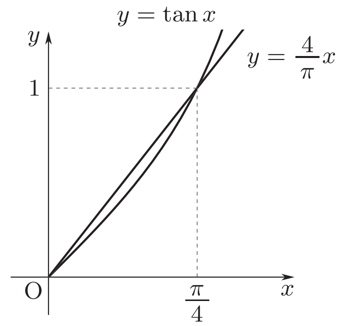
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx
\end{aligned}
$$

$$= \Big[\log(1+x) \Big]_0^1$$
$$= \log 2$$

また，$y = \tan x$ は $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ で下に凸のグラフであるから，図より



$$0 \leqq \tan x \leqq \frac{4}{\pi}x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\therefore \quad 0 \leqq \tan^k x \leqq \left(\frac{4}{\pi}x\right)^k$$

この辺々を 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで積分して

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^k x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}x\right)^k dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}x\right)^k dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^k \cdot \frac{1}{k+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{k+1}$$
$$= \frac{\frac{\pi}{4}}{k+1}$$

より

$$0 < I_k < \frac{\frac{\pi}{4}}{k+1}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{k\to\infty} I_k = 0$$

を得るから，① より

$$\lim_{n\to\infty} 2S_n = \log 2$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2} \quad （答）$$

■ **注意**

$\lim\limits_{k\to\infty} I_k = 0$ は，以下のようにも示せる．

$I_k \geqq 0,\ I_{k+2} \geqq 0$ であるので，(1) で示した $I_k + I_{k+2} = \dfrac{1}{k+1}$ より

$$0 \leqq I_k \leqq \frac{1}{k+1} \qquad \therefore \quad \lim_{k\to\infty} I_k = 0$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　　(2) 15 点

(1) 答に …………………………………………………………… 10 点

(2) $\square_1$ ① 式と同等の内容に ……………………………………………… 5 点

$\square_2$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k+1}=\log 2$ に …………………………………… 5 点

$\square_3$ 答に …………………………………………………………… 5 点

MV

直前東医歯大数学

【1 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	