MV

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前東医歯大数学

【3回目】

問題

【1】(1) 回転角度が $m\theta$ の整数倍でないときに一致していることがあると仮定し，そのときの回転角度を $m'\theta$（m' は整数）とする．このとき

$$km\theta < m'\theta < (k+1)m\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

をみたす整数 k が存在することになる．

一方，$m\theta$ のときは一致するので，$km\theta$ のときも一致する．すなわち，$m'\theta-km\theta$ のときも一致する．ところが，$(*)$ より

$$0 < m'\theta - km\theta < m\theta$$

となり，これは題意の条件に反し，$m\theta$ よりも小さい回転角度で配色が一致してしまうことを表しており矛盾する．

よって，題意は示された．（証終）

(2) 一回転すれば一致するのであるから，(1) の結果より $360 = im\theta$ をみたす整数 i が存在する．$n = p$ であるから

$$\theta = \frac{360}{p}$$

であるから

$$360 = im \cdot \frac{360}{p}$$

$$\therefore \quad p = im$$

p は素数であるから

$$(m,\ i) = (p,\ 1),\ (1,\ p)$$

のいずれかに限られるが，$m = 1$ とすると，任意の二等辺三角形に対して，その隣の二等辺三角形も同じ色になってしまい，題意の条件である 2 色以上を用いることに矛盾する．

したがって，$m = p$ である．（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ 回転角度が $m\theta$ の整数倍でないときに一致していることがあると仮定して ……… 5 点

$\square_2$ 題意を示して ……… 5 点

(2) $\square_1$ $360 = im\theta$ をみたす整数 i が存在することを述べて ……… 5 点

$\square_2$ $m = 1$ または p であることを述べて ……… 5 点

$\square_3$ 結論を述べて ……… 5 点

【2】(1) 与えられた方程式において

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

とおくと

$$r^2(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta) = d$$

$$\iff r^2\left(a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\sin 2\theta + c\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) = d$$

$$\iff r^2\{(a+c) + 2b\sin 2\theta + (a-c)\cos 2\theta\} = 2d$$

$$\iff r^2\{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}\sin(2\theta+\alpha)\} = 2d$$

$$\left(\text{ただし, } \cos\alpha = \frac{2b}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}},\ \sin\alpha = \frac{a-c}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}\right)$$

$$\iff r^2 = \frac{2d}{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}\sin(2\theta+\alpha)}$$

と変形できる．ここで，$-1 \leqq \sin(2\theta+\alpha) \leqq 1$ であるから

$$\frac{2d}{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}} \leqq r^2 \leqq \frac{2d}{a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{2d}{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}} \leqq r \leqq \sqrt{\frac{2d}{a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}}$$

したがって

$$\begin{cases} \textbf{最大値}\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{2d}}{\boldsymbol{a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}}} \\ \textbf{最小値}\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{2d}}{\boldsymbol{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}}} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2) (1) の最大値を R_1，最小値を R_2 とすると，楕円の長軸の長さが $2R_1$，短軸の長さが $2R_2$ であるから

$$S = \pi R_1 R_2$$

より

$$\left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = {R_1}^2{R_2}^2$$

$$= \frac{2d}{a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}\cdot\frac{2d}{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}$$

$$= \frac{4d^2}{(a+c)^2-\{4b^2+(a-c)^2\}}$$

$$= \frac{d^2}{ac-b^2}$$

よって

$$\boldsymbol{S = \frac{\pi d}{\sqrt{ac-b^2}}} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）16 点　　（2）9 点

（1）$\square_1$ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおきかえて ……………………………… 3 点

$\square_2$ r^2 を a, b, c, d, θ を用いて表して ……………………………… 5 点

$\square_3$ 答に ……………………………………………………… 8（各 4) 点

（2）$\square_1$ $S = \pi R_1 R_2$ であることを述べて ……………………………… 3 点

$\square_2$ 答に ……………………………………………………… 6 点

【3】(1) 動点 Q はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{5}{6}$ の確率で反時計，時計回りに隣の頂点に移る．

2 回の試行で Q が A にいる確率が a_1 である．

この場合の Q の移動の仕方は

(i) A → D → A　または　(ii) A → B → A

のいずれかなので

$$a_1 = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{5}{18}} \quad \text{(答)}$$

(2) 動点 Q の位置は，偶数回の試行のとき A または C だから，$Q_{2n} = C$ となる確率は $1 - a_n$ である．

$2(n+1)$ 回の試行で動点 Q が A にいるのは

(i) $2n$ 回目の Q の位置が A で，次に B → A または D → A と移動

(ii) $2n$ 回目の Q の位置が C で，次に D → A または B → A と移動

のいずれかであり，(i)，(ii) は排反である．

したがって

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)+(1-a_n)\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\} \\ &= \frac{5}{18}a_n+\frac{13}{18}(1-a_n) \\ &= \boldsymbol{-\frac{4}{9}a_n+\frac{13}{18}} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) (2) より

$$a_{n+1}-\frac{1}{2} = -\frac{4}{9}\left(a_n-\frac{1}{2}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

これより

$$a_n-\frac{1}{2} = \left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9}\right)^n$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^n = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 8 点　　(2) 9 点　　(3) 8 点

(1) □$_1$ 2 回移動したあとに Q が A にある場合の動き方を述べて …………… 4 点

□$_2$ 答に …………………………………………………………………… 4 点

(2) □$_1$ $2(n+1)$ 回移動したあとに Q が A にある場合の動き方を述べて …… 4 点

□$_2$ 答に …………………………………………………………………… 5 点

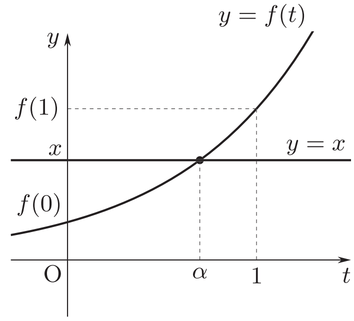
（3）□$_1$ a_n を求めて……………………………………………………4 点

□$_2$ 答に……………………………………………………………4 点

【4】(i) $x \leqq f(0)$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \{f(t) - x\}\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\,dt - x\int_0^1 dt \\ &= -x + \int_0^1 f(t)\,dt \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数なので，$g(x)$ は減少関数である．



(ii) $f(0) \leqq x \leqq f(1)$ のとき，条件より $f(t) = x$ となる $t \in [0,\ 1]$ が 1 つだけあるので，それを α とおくと

$$x = f(\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

このとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^\alpha \{x - f(t)\}\,dt + \int_\alpha^1 \{f(t) - x\}\,dt \\ &= x\int_0^\alpha dt - \int_0^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^1 f(t)\,dt - x\int_\alpha^1 dt \\ &= \alpha x - \int_0^\alpha f(t)\,dt - \int_1^\alpha f(t)\,dt - x(1-\alpha) \\ &= 2\alpha x - \int_0^\alpha f(t)\,dt - \int_1^\alpha f(t)\,dt - x \end{aligned}$$

よって，α は x の関数と考えられるので

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\left(\frac{d\alpha}{dx}\cdot x + \alpha\right) - f(\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{dx} - f(\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{dx} - 1 \\ &= 2\{x - f(\alpha)\}\cdot\frac{d\alpha}{dx} + 2\alpha - 1 \\ &= 2\alpha - 1 \ (\because ①) \end{aligned}$$

ここで，$\alpha = f^{-1}(x)$ より，$f(x)$ が単調増加であることから，α は x の増加関数となり，$a = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を用いると，次の表を得る．

α	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
x	$f(0)$	$\rightarrow$	a	$\rightarrow$	$f(1)$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$g(x)$ は $x = a$ のとき最小値をとる．

(iii) $f(1) \leqq x$ のとき

$$g(x) = \int_0^1 \{x - f(t)\}\,dt = x - \int_0^1 f(t)\,dt$$

これは x の増加関数である．

$g(x)$ が連続関数であることと，(i)～(iii) より，$g(x)$ は $x=a$ で最小値をとる．

（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) $\square_1$ (i) $x \leqq f(0)$ のときの考察に ……………………………… 5 点

$\square_2$ (ii) の $g(x)=\displaystyle\int_0^{\alpha}\{x-f(t)\}\,dt+\int_{\alpha}^{1}\{f(t)-x\}\,dt$ に …………… 5 点

$\square_3$ (ii) の $g'(x)=2\alpha-1$ に ……………………………… 5 点

$\square_4$ (ii) の増減表に ……………………………… 5 点

$\square_5$ (iii) $f(1) \leqq x$ のときの考察に ……………………………… 5 点

MV

直前東医歯大数学

【3 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	