MV

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前東医歯大数学

【2 回目】

問題

【1】素数 p について，$p=2$ の場合と p が奇素数である場合とに場合分けをする．与えられた値を I_p で表す．

$$I_p=(a+bi)^p$$

(i) $p=2$ のとき，

$$I_2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

であり，a，b が正整数であることから $2ab \fallingdotseq 0$ である．よって I_p は実数ではない．

(ii) p が奇素数のとき，

$$I_p=(a+bi)^p=A+Bi \text{（ただし }A,\ B\text{ は実数）}$$

とする．2 項定理により

$$\begin{aligned}I_p&=(a+bi)^p\\&=a^p+{}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}bi+{}_p\mathrm{C}_2a^{p-2}(bi)^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}a(bi)^{p-1}+(bi)^p\end{aligned}$$

であるから，この i の係数 B は

$$B={}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}b-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^3+{}_p\mathrm{C}_5a^{p-5}b^5-\cdots+b^pi^{p-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．ここで，① の末尾の項について

$$i^{p-1}=\begin{cases}1 & (p\equiv 1 \pmod 4)\\ -1 & (p\equiv -1 \pmod 4)\end{cases}$$

である．式 ① で表される B が 0 でないことを，以下 a と b の値に着目して示す．

(I) $a \geqq 2$ のとき，① の末尾の項以外は a の倍数であるが，$(a,\ b)=1$ であるから $\pm b^p$ は a の倍数ではない．よって B が 0 となることはないから，I_p が実数であることはない．

(II) $a=1$，$b\geqq 2$ のとき，B は

$$B={}_p\mathrm{C}_1b-{}_p\mathrm{C}_3b^3+{}_p\mathrm{C}_5b^5-\cdots+b^pi^{p-1}$$

となる．この式で第 2 項より後にある項は b^3 の倍数であるが，p は素数であるから，第 1 項 ${}_p\mathrm{C}_1b=pb$ は b^3 の倍数ではない．よってこのときも $B\fallingdotseq 0$ となり I_p は実数でない．

(III) $a=b=1$ のとき，B は

$$B={}_p\mathrm{C}_1-{}_p\mathrm{C}_3+{}_p\mathrm{C}_5-\cdots+(\pm 1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

一般に，k を p より小さな正整数として

$${}_p\mathrm{C}_k=\frac{p!}{k!(p-k)!} \qquad \therefore \quad {}_p\mathrm{C}_k\cdot k!(p-k)!=p!$$

が成り立つ．左辺 ${}_p\mathrm{C}_k\cdot k!(p-k)!$ は p の倍数となるが，$k!$ も $(p-k)!$ も p の倍数ではありえないから，${}_p\mathrm{C}_k$ が p の倍数となる．

よって ② で ${}_p\mathrm{C}_1$，${}_p\mathrm{C}_3$，$\cdots$，${}_p\mathrm{C}_{p-2}$ はすべて p の倍数であるからその和も p の倍

数となる．従ってそれに ± 1 を加えた値は p の倍数ではないから，0 になることはない．$B \fallingdotseq 0$ より，このときも I_p は実数でない．

以上より，いずれの場合にも

$$I_p = A + Bi,\ B \fallingdotseq 0$$

となり，I_p は実数でない．（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ $p = 2$ のときの成立を示して……4 点

$\square_2$ $p \geqq 3$，$a \geqq 2$ のときの成立を示して……7 点

$\square_3$ $p \geqq 3$，$a = 1$，$b \geqq 2$ のときの成立を示して……7 点

$\square_4$ $p \geqq 3$，$a = b = 1$ のときの成立を示して……7 点

【2】$x-y>a$ すなわち $y<x-a$ として x の値を定めて y を変化させる．$y^3<(x-a)^3$ より

$$x^3-y^3-a>x^3-(x-a)^3-a \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad x^3-y^3-a>3ax^2-3a^2x+a^3-a$$

①は x の値を定めたとき x^3-y^3-a のとり得る値の範囲を与えている．そこである x の値に対して

$$3ax^2-3a^2x+a^3-a<0$$

であると，$x^3-y^3-a<0$ となる y が存在することになり矛盾する．したがって，①の形から

$$3ax^2-3a^2x+a^3-a \geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

であることが $x^3-y^3>a$ が成り立つための必要十分条件である．

$a=0$ のとき，②はつねに成り立つ．

$a \fallingdotseq 0$ のとき，②がつねに成り立つためには

$$a>0 \text{ かつ } (3a^2)^2-4\cdot 3a\cdot(a^3-a) \leqq 0 \quad \cdots\cdots ③$$

が必要十分条件である．③を $3a^2\ (>0)$ で割って

$$3a^2-4(a^2-1) \leqq 0$$

$$\therefore \quad a^2 \geqq 4$$

これと $a>0$ より，$a \geqq 2$ である．

したがって，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a=0,\ a \geqq 2} \quad \text{（答）}$$

である．

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ 一方の文字を固定したときの下限を求めて …………… 8 点

□$_2$ $a=0$ のときの成立を述べて …………… 5 点

□$_3$ $a \fallingdotseq 0$ のときの成立条件を述べて …………… 7 点

□$_4$ 答に …………… 5 点

【3】(1) $f(x)=x^2$, $g(x)=ax$ を代入して

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}^2\,dx &= \int_0^1 (x^2-ax)^2\,dx = \int_0^1 (x^4-2ax^3+a^2x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{a}{2}x^4+\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{5}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{80}\end{aligned}$$

であるから，求める a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{3}{4}} \quad \text{(答)}$$

(2) $f(x)=x^2$, $g(x)=ax$ を代入して

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx = \int_0^1 |x^2-ax|\,dx = S(a)$$

とおく．ここで，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$$x^2=ax \Longleftrightarrow x(x-a)=0 \text{ すなわち } x=0,\ a$$

である．

(I) $a \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^1 (x^2-ax)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり，$S(a)$ は $a=0$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとる．

(II) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^a (-x^2+ax)\,dx + \int_a^1 (x^2-ax)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_a^1 \\ &= \frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり

$$S'(a)=a^2-\frac{1}{2}$$

より，$S(a)$ は $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ をとる．

(III) $a \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^1 (-x^2+ax)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}a-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり，$S(a)$ は $a=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{6}$ をとる．

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) より，$\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{6}>\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ であるから，求める a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{\sqrt{2}}{2}}\quad \text{（答）}$$

である．

(3) $P(x)=\left|x^2-ax\right|\ (0\leqq x\leqq 1)$ とおく．

(Ⅰ) $a\leqq 0$ のとき

$P(x)$ は $x=1$ のとき最大である．ここで

$$P(1)=|1-a|=1-a$$

は $a=0$ のとき最小値 1 をとる．

(Ⅱ) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq a \text{ では}\quad P(x)=ax-x^2=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4} \\ a\leqq x\leqq 1 \text{ では}\quad P(x)=x^2-ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

より，$P(x)$ の最大値は

$$P\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4},\ P(1)=1-a$$

のうちの大きな値の方である．ここで

$$\frac{a^2}{4}-(1-a)\geqq 0 \text{ すなわち } a\geqq -2+2\sqrt{2}=2(\sqrt{2}-1)$$

であることから，次のように場合分けして考える．

(i) $2(\sqrt{2}-1)\leqq a\leqq 1$ のとき

最大値は $P\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}$ であり，これは $a=2(\sqrt{2}-1)$ のとき最小値 $3-2\sqrt{2}$ をとる．

(ii) $0\leqq a\leqq 2(\sqrt{2}-1)$ のとき

最大値は $P(1)=1-a$ であり，これは $a=2(\sqrt{2}-1)$ のとき最小値 $3-2\sqrt{2}$ をとる．

(Ⅲ) $a\geqq 1$ のとき

$$P(x)=ax-x^2=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$$

であるから，軸 $x=\dfrac{a}{2}$ と $x=1$ との大小によって次のように場合分けして考える．

(i) $1\leqq a\leqq 2$ のとき

$P(x)$ は $x=\dfrac{a}{2}$ で最大値 $\dfrac{a^2}{4}$ をとり，これは $a=1$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる．

(ii) $a\geqq 2$ のとき

$P(x)$ は $x=1$ で最大値 $a-1$ をとり，これは $a=2$ で最小値 1 をとる．

(I), (II), (III) より，$1 > \dfrac{1}{4} > 3 - 2\sqrt{2}$ であるから，求める a の値は

$$\boldsymbol{a = 2(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{（答）}$$

である.

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　　(2) 10 点　　(3) 10 点

(1) $\square_1$ $\displaystyle\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}^2\,dx$ を計算して……2 点

$\square_2$ 答に……3 点

(2) $\square_1$ $a \leqq 0$ のときの $\displaystyle\int_0^1 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ を計算して……2 点

$\square_2$ $0 < a < 1$ のときの $\displaystyle\int_0^1 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ を計算して……2 点

$\square_3$ $a \geqq 1$ のときの $\displaystyle\int_0^1 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ を計算して……2 点

$\square_4$ 答に……4 点

(3) $\square_1$ $a \leqq 0$ のときの $|\,f(x) - g(x)\,|$ の最大値を求めて……2 点

$\square_2$ $0 \leqq a \leqq 1$ のときの $|\,f(x) - g(x)\,|$ の最大値を求めて……2 点

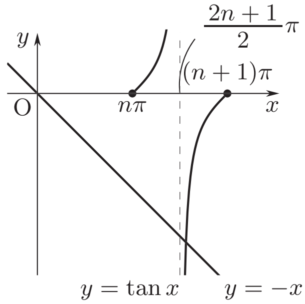
$\square_3$ $a \geqq 1$ のときの $|\,f(x) - g(x)\,|$ の最大値を求めて……2 点

$\square_4$ 答に……4 点

【4】(1) 区間 I_n において，$|f(x)| = x|\sin x|$ であり，また，この区間 I_n で $\sin x$ は定符号であるから

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (n\ \text{が偶数}) \\ -f(x) & (n\ \text{が奇数}) \end{cases}$$

となる．



ここで

$$f'(x) = \sin x + x\cos x$$

であり，$\cos x = 0$ のとき，$f'(x) = 0$ とはならないから

$$\frac{\sin x}{\cos x} + x = 0\ \text{すなわち}\ \tan x = -x \quad \cdots\cdots ①$$

のとき，$f'(x) = 0$ となる．

ここで，右図より，区間 I_n において ① の解はただ 1 つしか存在しない．その解を $n\pi + \alpha$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ とすれば，区間 I_n において

$$\begin{cases} n\ \text{が偶数のとき}\quad f(x)\ \text{は}\ x = n\pi + \alpha\ \text{で最大} \\ n\ \text{が奇数のとき}\quad f(x)\ \text{は}\ x = n\pi + \alpha\ \text{で最小} \end{cases}$$

となる．

したがって，$|f(x)|$ は $x = n\pi + \alpha$ のとき最大となり，$\alpha = a_n$ となる．

このとき，① より

$$\tan(n\pi + a_n) = -(n\pi + a_n)$$

$$\therefore\quad \tan a_n = -n\pi - a_n$$

ここで，$a_n \geqq 0$ より，$-n\pi - a_n \leqq -n\pi$ であるから，$\lim_{n\to\infty}(-n\pi) = -\infty$ より

$$\lim_{n\to\infty}(-n\pi - a_n) = -\infty$$

よって

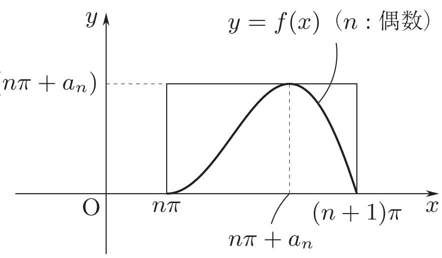
$$\lim_{n\to\infty}\tan a_n = \lim_{n\to\infty}(-n\pi - a_n) = -\infty$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}\ (\because 0 \leqq a_n \leqq \pi)$$

(証終)

(2) 区間 I_n で $f(x)$ は定符号であり，$f(n\pi) = f((n+1)\pi) = 0$ より

$$S_n = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x\sin x dx\right|$$



ここで

$$\int x\sin x\,dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

(C は積分定数)

であるから

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left| \Big[-x\cos x + \sin x \Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \right| \\
&= \left| -(n+1)\pi\cos(n+1)\pi + n\pi\cos n\pi \right| \\
&= (n+1)\pi + n\pi \\
&= (2n+1)\pi
\end{aligned}
$$

また

$$T_n = \pi\left| f(n\pi + a_n) \right| = \pi\left| (n\pi + a_n)\sin(n\pi + a_n) \right| = \pi(n\pi + a_n)\left|\sin a_n\right|$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n\pi + a_n)\left|\sin a_n\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{n}}{\left(\pi + \dfrac{a_n}{n}\right)\left|\sin a_n\right|} \\
&= \frac{2+0}{(\pi+0)\sin\frac{\pi}{2}} \quad \left(\because \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}} \quad \text{（答）}
\end{aligned}
$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）$\square_1$ $\tan x = -x$ のとき $f'(x) = 0$ となる……5 点

　　$\square_2$ 最後まで正しく証明を続けて……5 点

（2）$\square_1$ $S_n = (2n+1)\pi$ に……5 点

　　$\square_2$ $T_n = \pi(n\pi + a_n)\left|\sin a_n\right|$ に……5 点

　　$\square_3$ 答に……5 点

MV

直前東医歯大数学

【2 回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	