

直前東大物理発展演習

【1 回目】



問題

【1】

《解答》

(1) 鉛直方向の力のつり合いと重心のまわりの力のモーメントのつり合いより,

$$\begin{cases} 0 = N_A + N_B - mg \\ 0 = N_A L_A - N_B L_B \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} N_A = \frac{L_B}{L_A + L_B} mg \\ N_B = \frac{L_A}{L_A + L_B} mg \end{cases}$$

(2) 自転車から見ると, 左向きに ma の慣性力が作用することをふまえて, 力のつり合いと力のモーメントのつり合いより,

$$\begin{cases} 0 = f_B - ma \\ 0 = N_A + N_B - mg \\ 0 = f_B H + N_A L_A - N_B L_B \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} N_A = \frac{m}{L_A + L_B} (gL_B - aH) \\ N_B = \frac{m}{L_A + L_B} (gL_A + aH) \end{cases}$$

前輪が浮き上がらないでいる限界のとき $N_A = 0$ なので,

$$\frac{m}{L_A + L_B} (gL_B - a_1 H) = 0 \quad \therefore \quad a_1 = \frac{L_B}{H} g$$

(3) 後輪が滑らないでいる限界のとき $f_B = \mu N_B$ なので,

$$ma_2 = \mu \cdot \frac{m}{L_A + L_B} (gL_A + a_2 H) \quad \therefore \quad a_2 = \frac{\mu L_A}{L_A + L_B - \mu H} g$$

(4) (2) で a を $-a$ で置き換えることにより,

$$\begin{cases} N_A = \frac{m}{L_A + L_B} (gL_B + aH) \\ N_B = \frac{m}{L_A + L_B} (gL_A - aH) \end{cases}$$

後輪が浮き上がらないでいる限界のとき, $N_B = 0$ なので,

$$\frac{m}{L_A + L_B} (gL_A - aH) = 0 \quad \therefore \quad a = \frac{L_A}{H} g$$

両輪が滑らないでいる限界のとき, 運動方程式は,

$$\begin{cases} m \cdot (-a) = -\mu N_A - \mu N_B \\ m \cdot 0 = N_A + N_B - mg \end{cases} \quad \therefore \quad a = \mu g$$

これらの加速度のうち, 小さい方が a_3 となるので,

$$\begin{cases} \mu < \frac{L_A}{H} \text{ の場合} & \cdots & a_3 = \mu g \\ \mu \geq \frac{L_A}{H} \text{ の場合} & \cdots & a_3 = \frac{L_A}{H} g \end{cases}$$

(5) $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$ である. 比熱の定義より,

$$\frac{1}{2} \cdot 50 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s})^2 = 0.20 \text{ kg} \cdot (0.50 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \cdot \Delta T$$
$$\therefore \Delta T = 25 \text{ K}$$

配点の目安

34 点

(1) 6 点

N_A に 3 点, N_B に 3 点

(2) 13 点

N_A に 4 点, N_B に 4 点, a_1 に 5 点

(3) 3 点

$f_B = \mu N_B$ がわかって 1 点, 答えに 2 点

(4) 10 点

後輪が浮き上がらない限界のとき $a = \frac{L_A}{H}g$ であることがわかって 2 点,

両輪が滑らない限界のとき $a = \mu g$ であることがわかって 2 点,

$\mu < \frac{L_A}{H}$ のときの a_3 に 3 点, $\mu \geq \frac{L_A}{H}$ のときの a_3 に 3 点

(5) 2 点

【2】

《解答》

- (1) 辺 BC 上の点から導線 PQ, RS までの距離は $\sqrt{a^2 + x^2}$ なので、導線 PQ, RS に流れる電流それぞれが辺 BC 上に作る磁界の大きさ H_1 は、

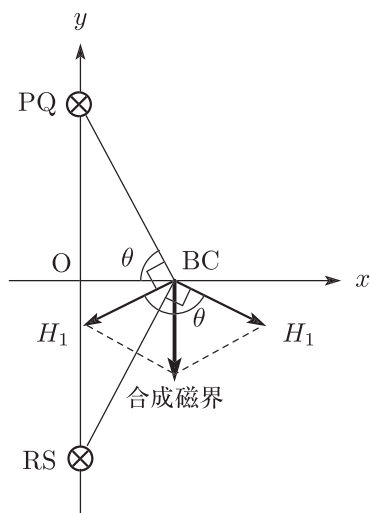
$$H_1 = \frac{I}{2\pi\sqrt{a^2 + x^2}}$$

また、右図の角 θ について、

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \end{cases}$$

よって、辺 BC 上の合成磁界 (H_x , H_y , H_z) は、

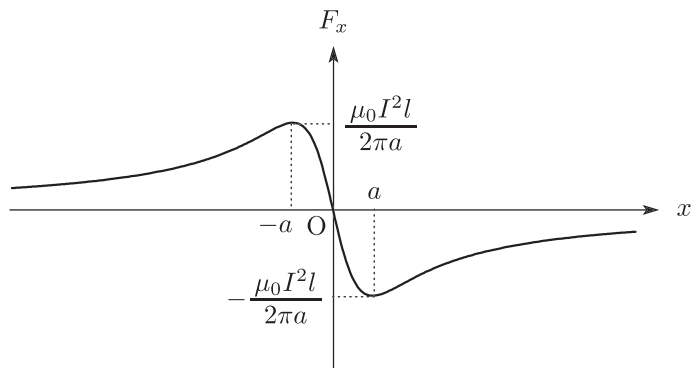
$$\begin{cases} H_x = H_1 \sin \theta - H_1 \sin \theta = 0 \\ H_y = -H_1 \cos \theta \times 2 = -\frac{Ix}{\pi(a^2 + x^2)} \\ H_z = 0 \end{cases}$$



- (2) 辺 BC に流れる電流の向きは B→C の向きなので、(1) の合成磁界から受ける力 (F_x , F_y , F_z) は、

$$\begin{cases} F_x = -I \cdot \frac{\mu_0 I x}{\pi(a^2 + x^2)} \cdot l = -\frac{\mu_0 I^2 l x}{\pi(a^2 + x^2)} \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

F_x と x の関係を表すグラフは下図のようになる。



(3) 辺 DA 上の合成磁界 (H_x, H_y, H_z) は, (1) の x を $x+l$ で置き換えて得られ,

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = -\frac{I(x+l)}{\pi\{a^2 + (x+l)^2\}} \\ H_z = 0 \end{cases}$$

辺 DA に流れる電流の向きは D→A の向きなので, 上記の合成磁界から受ける力 (F_x, F_y, F_z) は,

$$\begin{cases} F_x = +I \cdot \frac{\mu_0 I(x+l)}{\pi\{a^2 + (x+l)^2\}} \cdot l = \frac{\mu_0 I^2 l(x+l)}{\pi\{a^2 + (x+l)^2\}} \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

(4) (2), (3) より, コイルが受ける合力の x 成分 F_x は,

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\mu_0 I^2 l x}{\pi(a^2 + x^2)} + \frac{\mu_0 I^2 l(x+l)}{\pi\{a^2 + (x+l)^2\}} \\ &= \frac{\mu_0 I^2 l^2}{\pi(a^2 + x^2)\{a^2 + (x+l)^2\}} \cdot (-x^2 - lx + a^2) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

コイルが受ける合力が 0 になる位置では,

$$-x^2 - lx + a^2 = 0 \quad \therefore \quad x = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$$

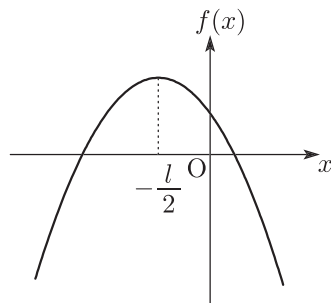
これは辺 BC の位置なので, 辺 AB の中点 E の位置は,

$$\left\{ -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2} \right\} + \frac{l}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$$

(5) (*) の合力 F_x の符号は $f(x) = -x^2 - lx + a^2$ の符号と一致しているので, $f(x)$ の符号を調べればよい.

まず右側のつり合い位置の付近では, つり合い位置からのずれの符号と $f(x)$ の符号が反対なので, つり合い位置に戻す向きの力が作用していて, 安定なつり合いである.

これに対して左側のつり合い位置の付近では, つり合い位置からのずれの符号と $f(x)$ の符号が同じなので, つり合い位置から離れる向きの力が作用していて, 不安定なつり合いである.



配点の目安

33 点

(1) 6 点

PQ, RS に流れる電流それぞれが BC の位置に作る磁界の大きさに 3 点,
合成磁界の x 成分に 1 点, y 成分に 1 点, z 成分に 1 点

(2) 9 点

力の x 成分に 2 点, y 成分に 2 点, z 成分に 2 点, グラフに 3 点

(3) 6 点

力の x 成分に 2 点, y 成分に 2 点, z 成分に 2 点

(4) 6 点

合力の x 成分の式に 2 点, 合力が 0 のときの B の x 座標に 2 点, E の x 座標に 2 点

(5) 6 点

$x = -\frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$ のときのつり合いについて述べて 3 点,

$x = -\frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$ のときのつり合いについて述べて 3 点

【3】

《解答》

I(1) ドップラー効果により,

$$\begin{cases} \text{P から届く音} & \cdots & f_1 = \frac{c-v}{c}f \\ \text{Q から届く音} & \cdots & f_2 = \frac{c+v}{c}f \end{cases}$$

(2) f_1 と f_2 を重ね合わせたときの, うなりの周期が T なので,

$$\frac{1}{T} = \left| \frac{c+v}{c}f - \frac{c-v}{c}f \right| \quad \therefore \quad T = \frac{c}{2vf}$$

II(1) 記号: (か)

理由: 風速 u のとき, 空気とともに右向きに速さ u で移動する観測者から見ると, 音源 P は左向きに速さ u で移動しているので,

(2) 波長を λ_1 , 振動数を f_1' とする. P から点 O に届く音では, 風速も含めたみかけの音速が $c+u$ なので,

$$\begin{cases} c+u = f\lambda_1 \\ c+u = f_1'\lambda_1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{c+u}{f} \\ f_1' = f \end{cases}$$

(3) Q から点 O に届く音の波長を λ_2 , 振動数を f_2' とする. Q から点 O に届く音では, 風速も含めた見かけの音速が $c-u$ なので,

$$\begin{cases} c-u = f\lambda_2 \\ c-u = f_2'\lambda_2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{c-u}{f} \\ f_2' = f \end{cases}$$

P, Q から点 O に届く 2 つの音波の位相差は,

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\frac{L}{\lambda_2} - \frac{L}{\lambda_1} \right) &= \frac{2\pi fL}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{u}{c}} - \frac{1}{1 + \frac{u}{c}} \right) \\ &= \frac{2\pi fL}{c} \left\{ \left(1 - \frac{-u}{c} \right) - \left(1 - \frac{u}{c} \right) \right\} \\ &= \frac{4\pi fLu}{c^2} \end{aligned}$$

この位相差が π の偶数倍となるとき, 音の強さが極大となるので,

$$\frac{4\pi fLu}{c^2} = \pi \cdot 2n \quad \therefore \quad n = \frac{2fLu}{c^2}$$

(4) 次の極大となるまでに, (3) の n は 1 だけ増加するので,

$$\frac{2fL}{c^2} \Delta u = 1 \quad \therefore \quad \Delta u = \frac{c^2}{2fL}$$

(5) (4), I(2) より,

$$\begin{cases} 2vfT = c \\ 2fL\Delta u = c^2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} c = \frac{L\Delta u}{vT} = 3.5 \times 10^2 \text{ m/s} \\ f = \frac{L\Delta u}{2v^2T^2} = 1.8 \times 10^2 \text{ Hz} \end{cases}$$

配点の目安

33 点

I(1) 3 点

答え (f_1) に 3 点

(2) 4 点

$\frac{1}{T} = |f_1 - f_2|$ がわかって 2 点, 答えに 2 点

II(1) 3 点

記号に 1 点, 理由に 2 点

(2) 6 点

波長に 3 点, 振動数に 3 点

(3) 8 点

λ_2 に 2 点, f_2' に 2 点, 答えに 4 点

(4) 3 点

II(3) で $u \rightarrow u + \Delta u$ としたとき $n \rightarrow n + 1$ であることがわかって 2 点, 答えに 1 点

(5) 6 点

c に 3 点, f に 3 点



会員番号	
------	--

氏 名	
-----	--