

直前東大物理発展演習

【2 回目】



問題

【1】

《解答》

- (1) ひもでつるされたおもりは、慣性力により電車の加速度と逆向きに動く．これに対して、風船は車の加速度と同じ向きに動いたから、
 (2) 部分 A の進行方向に垂直な断面積を $S \left(= \frac{\Delta V}{\Delta x} \right)$ とすると、部分 A の運動方程式は、

$$\rho_a S \Delta x \cdot a = P_1 S - P_2 S \quad \therefore \Delta P = a \rho_a \Delta x$$

- (3) 水平方向は図 2 で右向きを正、鉛直方向は上向きを正とすると、車内で見たときの力のつりあいの式は、

$$\begin{cases} 0 = \rho_a V a - T \sin \theta - \rho_h V a \\ 0 = \rho_a V g - T \cos \theta - \rho_h V g \end{cases}$$

- (4) (3) より、

$$\begin{cases} T \sin \theta = (\rho_a - \rho_h) V a & \cdots \textcircled{1} \\ T \cos \theta = (\rho_a - \rho_h) V g & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\rho_h < \rho_a$ なので、 $\textcircled{1}$ の右辺は正であり、 $\theta > 0$ と分かる．また、 $\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}}$ より、

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{g} \quad \therefore \tan \theta = \frac{a}{g}$$

- (5) 物体が動く向きは浮力の水平成分と慣性力の大小関係で決まり、 ρ_a より高密度の物体では慣性力の方が、低密度の物体では浮力の水平成分の方が大きいので、動き方が逆になる．

配点の目安

32 点

- (1) 6 点

- (2) 4 点

部分 A の受ける合力がわかって 2 点、運動方程式から結論を導いて 2 点

- (3) 8 点

水平方向の力のつり合いの式に 4 点、鉛直方向の力のつり合いの式に 4 点

- (4) 8 点

$\theta > 0$ であることを示して 4 点、 $\tan \theta$ に 4 点

- (5) 6 点

【2】

《解答》

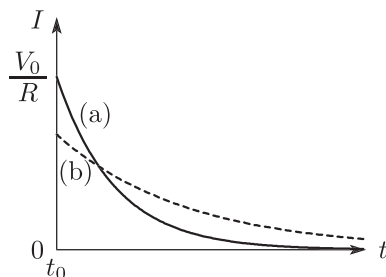
I(1) コンデンサー A の電荷が Q のとき、回路の方程式は、

$$V_0 = RI + \frac{Q}{C_A} \quad \therefore \quad I = \frac{V_0}{R} - \frac{1}{RC_A} \cdot Q \quad \cdots (*)$$

充電が進んで Q が 0 から増加していくと I は $\frac{V_0}{R}$ から減少していく。また、(*) を t で微分して、 $I = \frac{dQ}{dt}$ であることをふまえると、

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC_A} \cdot I$$

I が減少していくと $I-t$ グラフの傾きの大きさも減少していき、 I は 0 に収束する。よって、 $I-t$ グラフは下図 (a) となる。



(2) (1) で R を $R'(>R)$ で置き換えると、 $t=t_0$ での I は小さくなるとともに傾き $\frac{dI}{dt}$ の大きさは小さくなるので、 $I-t$ グラフは上図 (b) となる。

(3) 電気量の保存より、

$$Q_A + Q_B = C_A V_0 + 0$$

回路の方程式は、

$$0 = \frac{Q_A}{C_A} - R \cdot 0 - \frac{Q_B}{C_B}$$

これらより、

$$Q_A = \frac{C_A^2 V_0}{C_A + C_B}, \quad Q_B = \frac{C_A C_B V_0}{C_A + C_B}$$

(4) 電気量が移動する前後の全静電エネルギーをそれぞれ E_0 , E_1 とすると、

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} C_A V_0^2 \\ E_1 &= \frac{Q_A^2}{2C_A} + \frac{Q_B^2}{2C_B} \\ &= \frac{1}{2C_A} \cdot \frac{C_A^4 V_0^2}{(C_A + C_B)^2} + \frac{1}{2C_B} \cdot \frac{C_A^2 C_B^2 V_0^2}{(C_A + C_B)^2} \\ &= \frac{C_A}{C_A + C_B} \cdot \frac{1}{2} C_A V_0^2 \end{aligned}$$

よって、ジュール熱として失われたエネルギーは、

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}C_A V_0^2 - \frac{C_A}{C_A + C_B} \cdot \frac{1}{2}C_A V_0^2 \\ &= \frac{C_A C_B V_0^2}{2(C_A + C_B)}\end{aligned}$$

II(1) 記号：(イ)

理由：時刻 t_0 の直後における回路の方程式は、

$$-L \frac{dI}{dt} = -V_0 \quad \therefore \quad \frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{L} > 0$$

また、 I は連続的に変化するので、時刻 t_0 での電流はスイッチ S_2 を閉じる前と等しく $I = 0$ であるから、

(2) 時刻 t_1 における回路の方程式は、

$$-L \cdot 0 = V_B - V_A \quad \therefore \quad V_A = V_B$$

電気量の保存より、

$$C_A V_A + C_B V_B = C_A V_0 + 0$$

これらより、

$$V_A = \frac{C_A}{C_A + C_B} V_0, \quad V_B = \frac{C_A}{C_A + C_B} V_0$$

(3) 時刻 t_1 において、コンデンサー A に蓄えられている静電エネルギーを U_A とすると、

$$\begin{aligned}U_A &= \frac{1}{2}C_A V_A^2 = \frac{C_A}{2} \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} V_0 \right)^2 \\ U_B &= \frac{1}{2}C_B V_B^2 = \frac{C_B}{2} \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} V_0 \right)^2\end{aligned}$$

回路のエネルギー保存より、

$$U_L + U_A + U_B = \frac{1}{2}C_A V_0^2 \quad \therefore \quad U_L = \frac{1}{2}C_A V_0^2 - (U_A + U_B)$$

これらより、

$$\begin{aligned}U_L &= \frac{1}{2}C_A V_0^2 - \frac{C_A + C_B}{2} \cdot \frac{C_A^2 V_0^2}{(C_A + C_B)^2} \\ &= \frac{C_A C_B V_0^2}{2(C_A + C_B)}\end{aligned}$$

(4) コンデンサー B の電気量が Q_F となったとき、コンデンサー A の電荷を q_F とすると、電気量の保存より、

$$q_F + Q_F = C_A V_0 \quad \therefore \quad q_F = C_A V_0 - Q_F$$

回路のエネルギー保存より、

$$\frac{1}{2}L \cdot 0^2 + \frac{q_F^2}{2C_A} + \frac{Q_F^2}{2C_B} = \frac{1}{2}C_A V_0^2$$

これらより, q_F を消去すると,

$$\frac{(C_A V_0 - Q_F)^2}{2C_A} + \frac{Q_F^2}{2C_B} = \frac{1}{2} C_A V_0^2 \quad \therefore Q_F = \frac{2C_A C_B V_0}{C_A + C_B}$$

(5) コンデンサー A の静電エネルギーをすべてコンデンサー B に移せたとすると,

$$\frac{Q_F^2}{2C_B} = \frac{1}{2} C_A V_0^2 \quad \therefore Q_F^2 = C_A C_B V_0^2$$

これと II(4) より,

$$\left(\frac{2C_A C_B V_0}{C_A + C_B} \right)^2 = C_A C_B V_0^2 \quad \therefore C_A = C_B$$

配点の目安

36 点

I(1) 3 点

グラフの概形に 2 点, 時刻 t_0 での電流の大きさに 1 点

(2) 3 点

各時刻でのグラフの傾きの大きさが (1) より小さいグラフを描いて 2 点,
時刻 t_0 での電流の大きさが (1) より小さくて 1 点

(3) 6 点

Q_A に 3 点, Q_B に 3 点

(4) 3 点

S_2 を閉じる前の静電エネルギーに 1 点, 閉じた後の静電エネルギーに 1 点, 答えに 1 点

II(1) 3 点

記号に 1 点, 理由に 2 点

(2) 6 点

V_A に 3 点, V_B に 3 点

(3) 6 点

U_B に 2 点,

U_A に 2 点, U_L に 2 点

(4) 3 点

(5) 3 点

【3】

《解答》

- (1) 状態 A での状態方程式より，気体の物質質量 n は $n = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$ (R は気体定数) と表せる．これをふまえて，状態 B, C での状態方程式より，

$$\begin{cases} T_B = \frac{2p_0 \cdot 2V_0}{nR} = 4T_0 \\ T_C = \frac{p_0 \cdot 4V_0}{nR} = 4T_0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} W_{AB} = \frac{1}{2}(p_0 + 2p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0 V_0 \\ \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} \cdot 2p_0 \cdot 2V_0 - \frac{3}{2}p_0 V_0 = \frac{9}{2}p_0 V_0 \\ Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = 6p_0 V_0 \end{cases}$$

- (3) B $\rightarrow$ C の途中 (p, V) までの状態変化で気体が吸収した熱量 Q は，

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{3}{2}pV - \frac{3}{2} \cdot 2p_0 \cdot 2V_0 \right) + \frac{1}{2}(2p_0 + p)(V - 2V_0) \\ &= 2pV - pV_0 + p_0V - 8p_0V_0 \end{aligned}$$

また，B $\rightarrow$ C の状態変化における p と V の関係式は，

$$\frac{p - 2p_0}{V - 2V_0} = -\frac{p_0}{2V_0} \quad \therefore \quad p = -\frac{p_0}{2V_0}V + 3p_0$$

これらより， V の関数として Q を表すと，

$$Q = -\frac{p_0}{V_0} \left(V - \frac{15}{4}V_0 \right)^2 + \frac{49}{16}p_0 V_0$$

$V_X = \frac{15}{4}V_0$ までは吸熱過程で，この間の吸収熱量は $Q_{BX} = \frac{49}{16}p_0 V_0$ と分かる．

$$(4) W = \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot 3V_0 = \frac{3}{2}p_0 V_0$$

- (5) (2)～(4) をふまえると，

$$e = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{BX}} = \frac{24}{145}$$

配点の目安

32 点

(1) 4 点

B の絶対温度に 2 点, C の絶対温度に 2 点

(2) 12 点

W_{AB} に 4 点, ΔU_{AB} に 4 点, Q_{AB} に 4 点

(3) 8 点

直線 BC の方程式に 2 点, 吸熱量を V の関数で表して 2 点, V_X に 2 点, Q_{BX} に 2 点

(4) 4 点

(5) 4 点

$e = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{BX}}$ に 2 点, 答えに 2 点



会員番号	
------	--

氏 名	
-----	--