PF

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前東工大物理

【1 回目】

問題

【1】

《解答》

(1) エネルギー保存の関係より，位置エネルギーの基準を B 点として，

$$0 + mga = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 + 0$$
$$\therefore \quad v_\mathrm{B} = \sqrt{2ga}$$

(2) 運動方程式の斜面下向き成分より，

$$m\ddot{x}_\mathrm{X} = +mg\sin\theta - \mu_\mathrm{X} mg\cos\theta$$
$$m\ddot{x}_\mathrm{Y} = +mg\sin\theta - \mu_\mathrm{Y} mg\cos\theta$$

ここで問題文より $\ddot{x}_\mathrm{X} > \ddot{x}_\mathrm{Y}$.

$$\therefore \quad \mu_\mathrm{X} < \mu_\mathrm{Y}$$

(3) BC 間では等速．X の運動方程式の斜面下向き成分より，

$$0 = +mg\sin\theta - \mu_\mathrm{X} mg\cos\theta$$
$$\therefore \quad \tan\theta = \mu_\mathrm{X}$$

(4) C 点通過後のエネルギー保存の関係より，

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 + mgc (= mg(a+c))$$
$$\therefore \quad x = \sqrt{\frac{2mg(a+c)}{k}}$$

(5) 単振動の周期 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ の $\dfrac{1}{4}$ の時間に相当する．ω は $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$．よって，

$$\frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(6) 同質量の 2 物体の弾性衝突ゆえ速度交換が起きる．自然長に戻ったときの速さ v_E' は，

$$\frac{1}{2}kx^2 \left(= \frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 + mgc\right) = mg(a+c) = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{E}}'^2$$
$$\therefore \quad v_\mathrm{E} = v_\mathrm{E}' = \sqrt{2g(a+c)}$$

(7) エネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{E}}^2 + 0 = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{C}}^2 + mgc$$
$$\therefore \quad v_\mathrm{C} = \sqrt{2ga}$$

(8) Y が B 点に達したと仮定するとき，B 点での運動エネルギーは，エネルギーの原理より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2 = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{C}}}^2 - (mg\sin\theta + \mu_{\mathrm{Y}}mg\cos\theta) \times \frac{b}{\sin\theta}$$

実際には B 点に達しないとき，上式右辺は負の値をとることになるので，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{C}}}^2 - (mg\sin\theta + \mu_{\mathrm{Y}}mg\cos\theta) \times \frac{b}{\sin\theta} < 0$$

$v_{\mathrm{C}} = \sqrt{2ga}$ を代入，整理して，

$$\left(\frac{\mu_{\mathrm{Y}}}{\tan\theta} + 1\right) b > a$$
$$\therefore \quad b > \frac{\mu_{\mathrm{X}}}{\mu_{\mathrm{X}} + \mu_{\mathrm{Y}}} a$$

(9) Y と BC 面の間の静止摩擦係数を μ_0 とおく．Y が静止するためには，

$$\mu_0 > \tan\theta$$

が必要．今回 (2)，(3) より，

$$\mu_{\mathrm{Y}} > \mu_{\mathrm{X}} = \tan\theta$$

一般に $\mu_0 > \mu_{\mathrm{Y}}$ は成立ゆえ，

$$\mu_0 > \tan\theta$$

が成り立つ．よって Y は滑り降りることなくその場に静止する．

配点の目安

34 点

(1) 3 点
(2) 3 点
(3) 3 点
(4) 4 点
(5) 3 点
(6) 4 点
(7) 4 点
(8) 5 点
(9) 5 点 (結論に 2 点，理由に 3 点)

【2】

《解答》

(1) 経過した時間を t_1 とすると，

$$L = V_{\mathrm{A}} t_1 + S t_1$$

$$\therefore \quad t_1 = \frac{L}{S + V_{\mathrm{A}}} \qquad ①$$

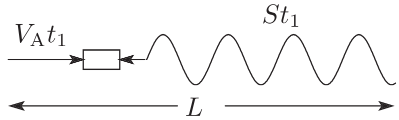

図 1

(2) 2 番目の汽笛を鳴らしたとき，船 A と船 B との距離は，

$$L_2 = L + V_{\mathrm{B}} T - V_{\mathrm{A}} T$$

よって，①で L を L_2 で置き換えると，

$$t_2 = \frac{L + (V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}})T}{S + V_{\mathrm{A}}} \qquad ②$$

(3) 1 番目の汽笛を聞いてから，2 番目の汽笛を聞くまでの時間は図 2 より，

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{A}} &= T + t_2 - t_1 \\ &= \frac{S + V_{\mathrm{B}}}{S + V_{\mathrm{A}}} T \qquad (\because \quad ①, ②) \qquad ③ \end{aligned}$$

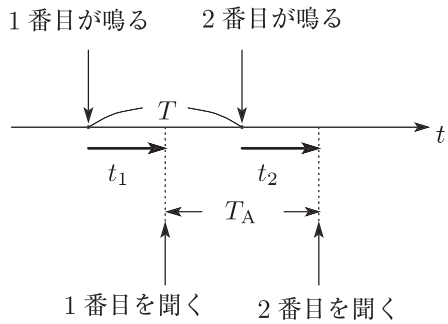

図 2

(4) 汽笛の伝わる方向の速度が $-V_{\mathrm{B}}$，$-V_{\mathrm{A}}$ から，V_{B}，$-V_{\mathrm{C}}$ に変わる．③で，V_{B} を $-V_{\mathrm{B}}$ で，V_{A} を V_{C} で置き換えると，

$$T_{\mathrm{C}} = \frac{S - V_{\mathrm{B}}}{S + V_{\mathrm{C}}} T \qquad ④$$

(5) ③，④で，$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{C}}$ とすると，

$$T_{\mathrm{A}} = \frac{S + V_{\mathrm{B}}}{S + V_{\mathrm{A}}} T \qquad T_{\mathrm{C}} = \frac{S - V_{\mathrm{B}}}{S + V_{\mathrm{A}}} T \qquad ⑤$$

これより，

$$V_{\mathrm{A}} = S\left(\frac{2T}{T_{\mathrm{A}} + T_{\mathrm{C}}} - 1\right) \qquad V_{\mathrm{B}} = S\frac{T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{A}} + T_{\mathrm{C}}}$$

数値を代入すると，

$$V_{\mathrm{A}} = 10.0[\mathrm{m/s}] \qquad V_{\mathrm{B}} = 5.00[\mathrm{m/s}]$$

(6) 汽笛の振動数を $f(= 500[\mathrm{Hz}])$ とすると，

$$f_{\mathrm{A}} = \frac{S + V_{\mathrm{A}}}{S + V_{\mathrm{B}}} f \qquad f_{\mathrm{C}} = \frac{S + V_{\mathrm{A}}}{S - V_{\mathrm{B}}} f$$

上式と⑤より，

$$f_{\mathrm{A}} = \frac{T}{T_{\mathrm{A}}} f = \frac{70.0}{69.0} \times 500 = 5.07 \times 10^2[\mathrm{Hz}]$$

$$f_{\mathrm{C}} = \frac{T}{T_{\mathrm{C}}} f = \frac{70.0}{67.0} \times 500 = 5.22 \times 10^2[\mathrm{Hz}]$$

(7) 図 3 で，船 B が D から E に進む間に，波は D から F に進む．よって，

$$\sin\theta = \frac{Wt}{V_{\mathrm{B}}t} = \frac{W}{V_{\mathrm{B}}} \qquad ⑤$$

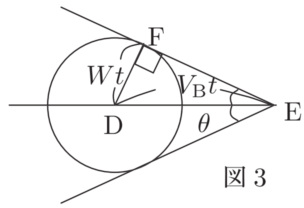

図 3

(8) 図 4 で，船 B が B_1 から B_2 まで進むのに要する時間を t とすると，

$$\tan\theta = \frac{D}{V_{\mathrm{B}}t}$$

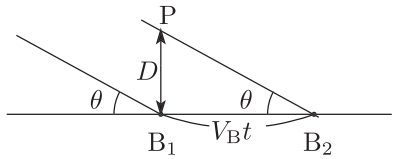

図 4

これと⑤より，

$$t = \frac{D}{V_{\mathrm{B}}\tan\theta}$$

$$= \frac{D}{V_{\mathrm{B}}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta} - 1} = D\sqrt{\frac{1}{W^2} - \frac{1}{{V_{\mathrm{B}}}^2}}$$

配点の目安

34 点

(1) 3 点
(2) 3 点
(3) 4 点
(4) 4 点
(5) 6 点 (V_{A} に 3 点，V_{B} に 3 点)
(6) 6 点 (f_{A} に 3 点，f_{C} に 3 点)
(7) 3 点
(8) 5 点

【3】

《解答》

I (1) 点 $\mathrm{B_1}$ にある電荷が点 G に作る電界の大きさは，

$$E_1 = k\frac{Q}{a^2+r^2}$$

この電界と，点 $\mathrm{B_2}$ にある電荷が作る電界とをベクトル合成すると，

$$E = 2E_1\cos\theta = \frac{2kQr}{(a^2+r^2)^{3/2}} \qquad ①$$

ここで，$\cos\theta = \dfrac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}$ を用いた．向きは G → O.

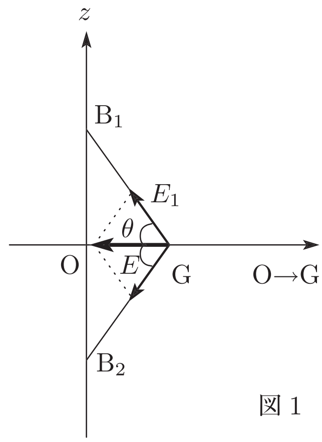

図 1

(2) $\overline{\mathrm{B_1C}} = \overline{\mathrm{B_2C}} = \sqrt{a^2+l^2}$ であるから，点 C での電位は，

$$V_\mathrm{C} = k\frac{-Q}{\overline{\mathrm{B_1C}}} + k\frac{-Q}{\overline{\mathrm{B_2C}}} = -\frac{2kQ}{\sqrt{a^2+l^2}} \qquad ②$$

II (3) ②で，$l=0$ とすると，原点での電位は，

$$V_0 = -\frac{2kQ}{a}$$

原点での速さを v とすると，エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV_0 = qV_\mathrm{C}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{2q}{m}(V_\mathrm{C}-V_0)} = \sqrt{\frac{4kqQ}{m}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right)}$$

(4) ①より，$r \ll a$ の場合，分母の r を省略すると，

$$E \fallingdotseq \frac{2kQr}{a^3}$$

と近似できる．図 2 で，荷電粒子に働く力は，

$$\cos\phi = \frac{x}{r}, \quad \sin\phi = \frac{y}{r}$$

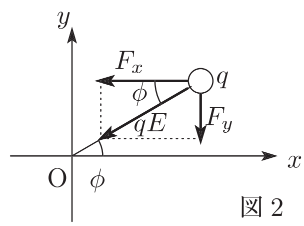

図 2

を用いて，

$$F_x = -qE\cos\phi = -\frac{2kQq}{a^3}x \qquad ③$$

$$F_y = -qE\sin\phi = -\frac{2kQq}{a^3}y \qquad ④$$

上 2 式より，

$$A = \frac{2kQq}{a^3}$$

(5) ③，④より，x，y 方向の運動方程式は，

$$x: \quad ma_x = -\frac{2kQq}{a^3}x \qquad ⑤$$

$$y: \quad ma_y = -\frac{2kQq}{a^3}y \qquad ⑥$$

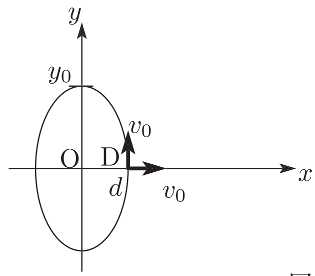

図 3

両方向とも，バネ定数 $k_0 = \dfrac{2kQq}{a^3}$ のバネにつながれた質点の運動に等しい．よって，例えば，x 方向の運動を考える場合，⑤より，

$$\frac{1}{2}m{v_x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 = \text{一定} \qquad ⑦$$

が成り立つ．

初速度の大きさを v_0 とすると，点 D と折り返した地点とについて，式⑦より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}k_0d^2 = \frac{1}{2}k_0(2d)^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{3}{2}k_0d^2 \qquad ⑧$$

一方，y 方向に初速 v_0 で打ち出した場合，y 座標の最大値を y_0 とすると，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}k_0{y_0}^2 \qquad ⑨$$

⑧，⑨より，

$$y_0 = \sqrt{3}d \qquad ⑩$$

配点の目安

32 点

(1) 6 点 (強さに 4 点，向きに 2 点)

(2) 4 点

(3) 5 点 (原点 O での電位に 2 点，答に 3 点)

(4) 6 点 (電界の強さが r に比例することに 3 点，答に 3 点)

(5) 11 点 (v_0 と d の関係に 4 点，v_0 と y_0 の関係に 4 点，答に 3 点)

PF

直前東工大物理

【1 回目】

会員番号		氏　名	