PJXA

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大力学特講

問題

【1】

《解答》

(1) 台＋物体 についての力のつり合いより，

$$(M+m)\cdot 0 = kd-(M+m)g \qquad \therefore \quad d=\frac{(M+m)g}{k}$$

(2) (1) と同様に，台＋物体 についての力のつり合いより，

$$(M+m)\cdot 0 = k(d+s)-F_s-(M+m)g \qquad \therefore \quad F_s = ks$$

(3) 台＋物体 の受ける合力 F は，

$$F=-k(x-d)-(M+m)g=-kx$$

(4) (3) より，台＋物体 の運動方程式は，

$$(M+m)\ddot{x}=-kx \qquad \therefore \quad \ddot{x}=-\frac{k}{M+m}x$$

これより，台＋物体 の運動は，振動中心が $x=0$，角振動数が $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ の単振動とわかる．よって，周期 T は，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

(5) $\ddot{x}=a$ なので，台，物体それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} ma=-k(x-d)-N-mg \\ Ma=N-Mg \end{cases}$$

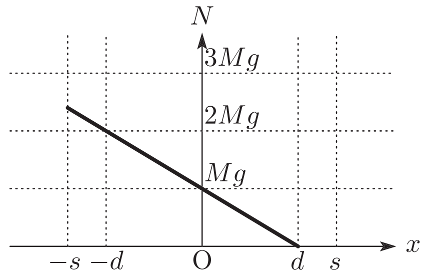
(6) (5) の 2 式より，a を消去すると，

$$N=Mg-\frac{M}{M+m}kx$$

さらに，(1) の結果を用いて k を消去すると，

$$\begin{aligned} N &= Mg-\frac{M}{M+m}\cdot\frac{(M+m)g}{d}\cdot x \\ &= \frac{d-x}{d}Mg \end{aligned}$$

(7)



(8) $x = x_0$ に達したとき，$N = 0$ となるので，

$$0 = \frac{d - x_0}{d} Mg \qquad \therefore \quad x_0 = d \ \left(= \frac{(M+m)g}{k} \right)$$

(9) $m = M$，$s = 2d$ のとき，初期条件 $x(0) = -s$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす解は，

$$x(t) = -2d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) = -2d \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t\right)$$

$x = d$ に達して物体が台から離れる時刻 t_0 は，

$$d = -2d \cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t_0\right) \qquad \therefore \quad t_0 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{d}{g}}$$

このときの速さ v_0 は，

$$v_0 = \left| 2d\sqrt{\frac{g}{d}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{d}} t_0\right) \right| = \sqrt{3gd}$$

【2】

《解答》

I.

(1) おもりが OP から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを f(O→P 向き正) とする．

OP と水平面とのなす角度が $\alpha\,(\leqq \theta)$ のとき，おもりが受ける力の OP 方向の成分，OP に垂直な成分のつり合いの式は，

$$\begin{cases} 0 = N - mg\cos\alpha \\ 0 = mg\sin\alpha - f \end{cases}$$

また，このときおもりは静止し続けるので，

$$f \leqq \mu N \qquad \therefore \quad mg\sin\alpha \leqq \mu\cdot mg\cos\alpha$$

等号が成り立つとき $\alpha=\theta$ なので，

$$\tan\theta = \mu$$

(2) 動摩擦力は O→P 向きで大きさ $\mu' N = \mu' mg\cos\theta$ であるから，仕事を W とすると，

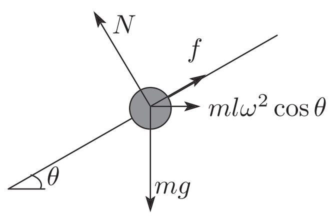
$$W = -\mu' mg\cos\theta\cdot l \qquad \therefore \quad |W| = \mu' mgl\cos\theta$$

(3) 全力学的エネルギーの変化量は，動摩擦力のする仕事に等しいので，求める速さを v とし，点 O を重力の位置エネルギーの基準とすると，

$$\left(\frac{1}{2}mv^2+0\right) - (0+mgl\sin\theta) = -\mu' mgl\cos\theta$$
$$\therefore \quad v = \sqrt{2gl(\sin\theta - \mu'\cos\theta)}$$

(4) $m(l\cos\theta)\omega^2 = ml\omega^2\cos\theta$

(5) おもりとともに角速度 ω で回転する観測者から見た場合で考える．おもりが受ける力の水平成分，鉛直成分のつり合いの式は，



$$\begin{cases} 0 = N\sin\theta - f\cos\theta - ml\omega^2\cos\theta & \cdots ① \\ 0 = N\cos\theta + f\sin\theta - mg & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times\cos\theta -$ ② $\times\sin\theta$ より，

$$f = m(g\sin\theta - l\omega^2\cos^2\theta)$$

$\omega=\omega_0$ のとき $f=0$ となるので，

$$0 = m(g\sin\theta - l{\omega_0}^2\cos^2\theta) \qquad \therefore \quad \omega_0 = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}}$$

(6) ① $\times \sin\theta +$ ② $\times \cos\theta$ より，

$$N = m\cos\theta(g + l\omega^2 \sin\theta)$$

おもりが静止し続けるための条件は，

$$-\mu \leqq \frac{f}{N} \leqq \mu$$

$$\therefore \quad -\mu m\cos\theta(g + l\omega^2\sin\theta) \leqq m(g\sin\theta - l\omega^2\cos^2\theta) \leqq \mu m\cos\theta(g + l\omega^2\sin\theta)$$

ω について整理すると，

$$\sqrt{\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta(\cos\theta + \mu\sin\theta)} \cdot \frac{g}{l}} \leqq \omega \leqq \sqrt{\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta(\cos\theta - \mu\sin\theta)} \cdot \frac{g}{l}} (= \omega_{\mathrm{m}})$$

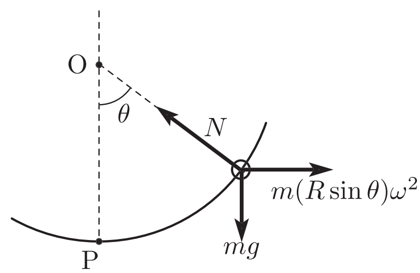
《参考》(1) で得た $\mu = \tan\theta$ を用いると，上の不等式の左辺は 0 であることがわかる．一方，右辺は，μ を消去して次のように表してもよい．

$$\omega_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{\sin\theta + \tan\theta\cos\theta}{\cos\theta(\cos\theta - \tan\theta\sin\theta)} \cdot \frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \cdot \frac{g}{l}}$$

なお，ω_{m} が存在するためには，$\cos^2\theta - \sin^2\theta > 0$，すなわち $\theta < 45^\circ$ の必要がある．ところが，$\mu = \tan\theta$ と，問題文に与えられた $\mu' < \mu < 1$ より，$\theta < 45^\circ$ は必ず成り立つ．つまり，$\mu' < \mu < 1$ という条件により，ω_{m} の存在は保証される．

II.

(1) 針金とともに角速度 ω で回転する観測者から見た場合で考える．小物体が受ける重力 (大きさ mg)，針金からの垂直抗力 (大きさを N とする)，遠心力 (大きさ $m(R\sin\theta)\omega^2$) は右図のように表される．右図で θ が増加する方向を正として，遠心力の接線方向成分 F_θ，重力の接線方向成分 G_θ は，それぞれ，



$$\begin{cases} F_\theta = m(R\sin\theta)\omega^2 \cdot \cos\theta \\ G_\theta = -mg\sin\theta \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} |F_\theta| = mR\omega^2\sin\theta\cos\theta \\ |G_\theta| = mg\sin\theta \end{cases}$$

《参考》小物体が針金に対して静止し続けるならば，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．

(2) 小物体が受ける力の接線方向成分のつり合いより，

$$\begin{aligned} 0 &= F_\theta + G_\theta \\ &= mR\omega^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$\theta \neq 0$ の場合について考えて，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\theta}} \quad (\theta = 0 \text{ の場合も含めて成立})$$

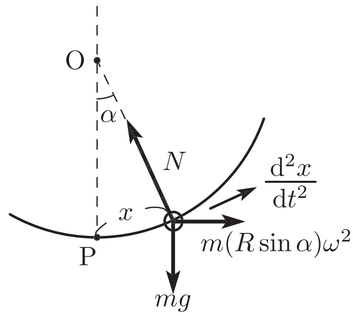
(3) ①を満たす θ は，$\theta = 0$(点 P) と，

$$\cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

を満たす θ(点 Q) である．点 P 以外で静止することができるためには，$\cos\theta < 1$ より，

$$\frac{g}{R\omega^2} < 1 \qquad \therefore \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$$

(4) P に対する針金に沿った微小変位を x(反時計回り正) とすると，小物体の接線方向の運動方程式は，



$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= F_\alpha + G_\alpha \\ &= mR\omega^2\sin\alpha\cos\alpha - mg\sin\alpha \end{aligned}$$

ここで，$\cos\alpha \fallingdotseq 1$, $\sin\alpha \fallingdotseq \alpha = \dfrac{x}{R}$ より，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{m(g - R\omega^2)}{R}x$$

これより，物体の運動は単振動であることがわかる．また，振動中心は $x = 0$(点 P)，角振動数は $\varOmega = \sqrt{\dfrac{g - R\omega^2}{R}}$ である．よって，周期を T とすると，

$$T = \frac{2\pi}{\varOmega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g - R\omega^2}}$$

【3】

《解答》

［A］(a) 糸を切る前の左右の糸の張力の大きさは等しく，その値を T_1 とする．A が受ける力の鉛直成分のつり合いより，

$$M\cdot 0 = T_1\cos\theta\times 2 - Mg \qquad \therefore\quad T_1 = \frac{Mg}{2\cos\theta}$$

左の糸を切った直後の右の糸の張力の大きさを T_2 とすると，運動方程式の向心成分は，

$$M\cdot\frac{0^2}{l} = T_2 - Mg\cos\theta \qquad \therefore\quad T_2 = Mg\cos\theta$$

$T_1 = T_2$ であるためには，

$$\frac{Mg}{2\cos\theta} = Mg\cos\theta \qquad \therefore\quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

(b) 床を重力の位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgl(1-\cos\theta) \qquad \therefore\quad V = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

求める張力の大きさを T とすると，運動方程式の向心成分は，

$$M\frac{V^2}{l} = T - Mg \qquad \therefore\quad T = Mg + \frac{MV^2}{l} = (3-2\cos\theta)Mg$$

［B］(c) A と B の衝突前後について，運動量保存と力学的エネルギー保存より，

$$\begin{cases} MV' + m{v_{\mathrm{B}}}' = MV \\ \dfrac{1}{2}MV'^2 + \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}'^2 = \dfrac{1}{2}MV^2 \end{cases}$$

これらより，

$$V' = \frac{M-m}{M+m}V, \qquad {v_{\mathrm{B}}}' = \frac{2M}{M+m}V$$

A，B の衝突直後，C は速度 0 なので，

$$v' = \frac{m{v_{\mathrm{B}}}' + m\cdot 0}{m+m} = \frac{M}{M+m}V$$

(d) B，ばね，C を 1 つの物体とみなした物体を B + C とおく．B + C と A との間のはね返り係数は，

$$e = -\frac{V'-v'}{V} = \frac{m}{M+m}(<1)$$

A と B との衝突で力学的エネルギーは失われないので，衝突直後の A の運動エネルギーと B + C の力学的エネルギーの和は，衝突直前の A の運動エネルギーと一致する．ところで，B + C の力学的エネルギーは，B + C の重心の運動エネルギーと，重心から見た B，C それぞれの振動における力学的エネルギーの和に等しい．このた

め，衝突直後の A の運動エネルギーと B + C の 重心の運動エネルギー の和は，衝突直前の A の運動エネルギーよりも小さい．衝突により運動エネルギーの和が減少するので，A と B + C との衝突は非弾性衝突とみなせ，このため，はね返り係数 e は 1 より小さい．

(e) B + C の重心から見た初速度は，

$$\mathrm{B} \quad \cdots \quad {v_{\mathrm{B}}}' - v' = \frac{M}{M+m}V$$

$$\mathrm{C} \quad \cdots \quad 0 - v' = -\frac{M}{M+m}V$$

重心から見た運動量の和は 0 なので，重心から見た B の速度が 0 の瞬間，C の速度も 0 である．この瞬間の，ばねの伸びまたは縮みを X とすると，重心から見た力学的エネルギー保存より，

$$0 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{M+m}V\right)^2 \times 2 \qquad \therefore \quad X = \frac{MV}{M+m}\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

B，C 間の距離を x とすると，x が最大のときは伸びが X で，x が最小のときは縮みが X なので，求める距離差は，

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{2MV}{M+m}\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

PJXA
直前東大力学特講

Z-KAI

会員番号		氏　名	