PJXB

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

# 直前東大電磁気学特講

## 問題

**【1】**

**《解答》**

I

(1) 極板 A，B 間の電位差 $V$，および電界の強さ $E$ はそれぞれ，

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{kS} \qquad \therefore \quad E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{kS} \quad \cdots ①$$

また，電界の向きは，A から B の向き．→(a)

(2) $U = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2 d}{2kS}$

(3) $\varDelta W = F\varDelta d \quad \cdots ②$

(4) (2) と同様に考えて，極板間隔を $\varDelta d$ だけ増加させたときの静電エネルギー $U'$ は，

$$U' = \frac{Q^2(d+\varDelta d)}{2kS}$$

よって，$\varDelta U$ は，

$$\varDelta U = U' - U = \frac{Q^2 \varDelta d}{2kS} \quad \cdots ③$$

(5) 外力のした仕事の分だけコンデンサーの静電エネルギーは増加するから，

$$\varDelta W = \varDelta U$$

①，②，③より，

$$F\varDelta d = \frac{Q^2\varDelta d}{2kS} \qquad \therefore \quad F = \frac{Q^2}{2kS} = \frac{1}{2}QE$$

II

(1) A，M からなるコンデンサーの静電容量を $C_1$，M，B からなるコンデンサーの静電容量を $C_2$ とすると，

$$C_1 = \frac{kS}{d - \dfrac{d}{3}} = \frac{3kS}{2d} \qquad C_2 = \frac{kS}{\dfrac{d}{3}} = \frac{3kS}{d}$$

ここで，A にある電荷を $Q$ とすると，静電誘導により，$M_A$ にある電荷は $-Q$ である．また，M は電荷をもっていないことと電荷保存則より，$M_B$ にある電荷は $Q$ である．さらに，B にある電荷は $-Q$ である．したがって，

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Qd}{kS}$$

$$\therefore \quad Q = \frac{kSV}{d}$$

よって，求める電荷は，

$$\mathrm{A}:\frac{kSV}{d}\qquad \mathrm{M_A}:-\frac{kSV}{d}\qquad \mathrm{M_B}:\frac{kSV}{d}\qquad \mathrm{B}:-\frac{kSV}{d}$$

(2) 電荷保存および静電誘導を考えると，

$$\mathrm{M_A}:-q'\qquad \mathrm{M_B}:q+q'\qquad \mathrm{B}:-(q+q')$$

(3) II(1)，(2) より，

$$V_1=\frac{q'}{C_1}=\frac{2dq'}{3kS}$$
$$V_2=\frac{q+q'}{C_2}=\frac{d(q+q')}{3kS}$$

(4) II(3) の結果より，

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2\\&=\frac{2dq'}{3kS}+\frac{d(q+q')}{3kS}\\&=\frac{d}{kS}\left(\frac{q}{3}+q'\right)\end{aligned}$$

よって，$q'$ は，$V$ を含む式で表すと，

$$q'=\frac{kSV}{d}-\frac{q}{3}$$

(5) A，M 間の電界の強さを $E_1$，M，B 間の電界の強さを $E_2$ とすると，

$$E_1=\frac{V_1}{d-\frac{d}{3}}=\frac{3V_1}{2d}$$
$$E_2=\frac{V_2}{\frac{d}{3}}=\frac{3V_2}{d}$$

M は A，B それぞれから引力を受け，その大きさ $F'$ は，I(5) の結果より，

$$F'=\left|\frac{1}{2}q'E_1-\frac{1}{2}(q+q')E_2\right|=\frac{3}{4d}|q'V_1-2(q+q')V_2|$$

ここで，$q'<q+q'$，および，II(3) の結果より得られる $V_1<2V_2$ を踏まえると，

$$F'=\frac{3}{4d}\{2(q+q')V_2-q'V_1\}$$

## 【2】

**《解答》**

(1) 運動エネルギーの変化量とされた仕事の関係を考えると，

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = qV_0 \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

(2) 電界の大きさ $E$ は電位勾配の大きさに等しいので，

$$E = \frac{V-(-V)}{a-b} = \frac{2V}{a-b}$$

また，電界の向きは，正電極から負電極の向き．→(d)

(3) イオンが電界から受ける力は「紙面に平行で，O から放射状に内向き」で大きさ $qE$ であり，これが円運動の向心力を担う．よって，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{r} = qE$$

(4) (1)，(3) の結果より，

$$\begin{aligned} r &= \frac{mv^2}{qE} \\ &= \frac{m}{qE}\cdot\frac{2qV_0}{m} \\ &= \frac{2V_0}{E} \end{aligned}$$

(5) $r$ と $a$，$b$ との間の関係は

$$r = \frac{a+b}{2}$$

(2)，(4) の結果より，

$$\frac{a+b}{2} = 2V_0\cdot\frac{a-b}{2V} \qquad \therefore \quad \frac{V_0}{V} = \frac{a+b}{2(a-b)}$$

(6) (a)

(7) $m\dfrac{v^2}{r} = qvB$

(8) (7) の結果より得られる $mv = qBr$ と (1) の結果より，

$$m\sqrt{\frac{2qV_0}{m}} = qBr \qquad \therefore \quad \frac{q}{m} = \frac{2V_0}{(Br)^2}$$

(9) 電子と陽子は電荷が異符号なので，電極の電位の高低は互いに逆にする必要はあるが，(4) の結果を踏まえると，円軌道の半径 $r$ は質量 $m$ や電荷 $q$ に依存しないので，陽子の場合と電子の場合で，電極間の電界の大きさは等しくすれば (1 倍にすれば) よい．

(10) (8) の結果より，

$$B = \frac{1}{r}\sqrt{2V_0 \cdot \frac{m}{q}}$$

電子と陽子の電荷の大きさは等しいので，同じ半径 $r$ の円軌道を描かせるのに必要な磁束密度の大きさは，質量の平方根に比例する．よって，電子，陽子それぞれの場合の磁束密度の大きさを $B_{\mathrm{e}}$，$B_{\mathrm{p}}$ とすると，

$$\begin{aligned} \frac{B_{\mathrm{p}}}{B_{\mathrm{e}}} &= \sqrt{\frac{2 \times 10^{-27}}{9 \times 10^{-31}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \times 10^2 \\ &\fallingdotseq 5 \times 10^1 \text{倍} \end{aligned}$$

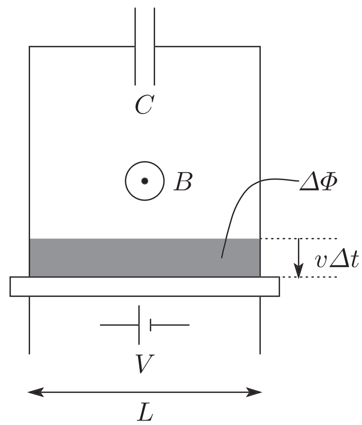
なお，それぞれの場合の磁束密度の向きは互いに逆である．

**【3】**

**《解答》**

［A］

(1) 微小時間 $\Delta t$ の間の，回路を貫く磁束の変化量を $\Delta\Phi$ とすると，




$$\Delta\Phi = B(L \cdot v\Delta t)$$

この変化を妨げるように，右図に示す向きに，大きさ

$$V = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BLv$$

の起電力が生じる．この電圧がコンデンサーにかかるから，求める静電エネルギー $U$ は，

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C(BLv)^2$$

(2) 棒を放した位置を重力の位置エネルギーの基準とし，求める速さを $v$ とすると，重力の位置エネルギーの減少分が，金属棒の運動エネルギーと静電エネルギーに転化するので，

$$mgh = \left\{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}C(BLv)^2\right\} - 0$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + C(BL)^2}} \quad \cdots ①$$

(3) ①より，

$$v^2 = 2 \cdot \frac{m}{m + C(BL)^2} g \cdot h$$

が得られる．この式は，一定の加速度

$$a = \frac{m}{m + C(BL)^2} g \quad \cdots ②$$

で運動する物体の速度と移動距離との関係を表している．

(4) 棒が速さ $v$ で落下しているとき，コンデンサーに蓄えられている電荷 $Q$ は，

$$Q = CV = C(BLv)$$

この式と②より，回路に流れる電流の大きさ $I$ は，

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ &= CBL\frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= CBLa \\ &= \frac{mgCBL}{m + C(BL)^2} \end{aligned}$$

［B］

I L を流れる電流を $i_1$ とすると，キルヒホッフの第 2 法則より，

$$E - L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = R_1 i_1$$

十分に時間が経過すると，$\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$ になり，L を流れる電流は一定になる．このときの電流を $I_1$ とすると，

$$E - L\cdot 0 = R_1 I_1 \qquad \therefore \quad I_1 = \frac{E}{R_1}$$

また，このとき L に蓄えられるエネルギーを $U$ とすると，

$$U = \frac{1}{2}L{I_1}^2 = \frac{LE^2}{2{R_1}^2}$$

II (1) I の状態から $\mathrm{S_2}$ をさらに閉じても，ab 間の電位差は 0 のままである．このため $\mathrm{R_2}$ の両端間の電位差も 0 であり，$\mathrm{R_2}$ を電流は流れない．すなわち 0 である．

(2) L は，$\mathrm{S_1}$ を開いた直後，$\mathrm{S_1}$ を開く直前の状態を保とうとするので，電流 $I_1$ が流れる．よって，$\mathrm{S_1}$ を開いた直後に $\mathrm{S_2}$ を流れる電流を $I_2$ とすると，符号 (向き) に注意することにより，

$$I_2 = -I_1 = -\frac{E}{R_1}$$

また，$I_2$ は $\mathrm{R_2}$ を図 1 で上向きに流れるので，a と b では b の方が高電位である．これより，ab 間の電圧を $V_{\mathrm{ab}}$ とすると，符号に注意することにより，

$$V_{\mathrm{ab}} = R_2 I_2 = -\frac{R_2}{R_1}E$$

さらに，$\mathrm{R_2}$ での消費電力を $P_2$ とすると，

$$P_2 = R_2{I_2}^2 = \frac{R_2E^2}{{R_1}^2}$$

(3) L を a→b 向き ($\mathrm{R_2}$ を図 1 で <u>上向き</u>) に流れる電流を $i_2$ とすると，L，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{S_2}$ からなる閉回路について，キルヒホッフの第 2 法則より，

$$-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = R_2 i_2 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_2}{L}i_2$$

したがって，$i_2$ の減少の速さ $\left|\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right|$ は $R_2$ に比例し，$R_2$ が大きいほど減少の速さは大きい．

III (1) I の状態から $\mathrm{S_3}$ をさらに閉じても，L を流れる電流は $I_1 = \dfrac{E}{R_1}$，ab 間の電位差は 0 のままである．このため C の極板間の電位差も 0 であり，C の極板が帯びる電荷も 0 である．これを踏まえ，$\mathrm{S_1}$ を開いてから時間 $t$ が経過した瞬間に L を流れる電流を $i_3$ とすると，図 2 より，

$$i_3 = I_1\cos\left(2\pi\frac{t}{2\pi\sqrt{LC}}\right) = I_1\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

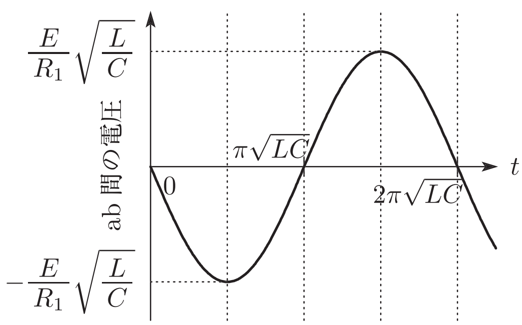
また，時間 $t$ が経過した瞬間の ab 間の電圧 (C の下側極板に対する上側極板の電位) を $V_{\mathrm{ab}}{}'$，L を b→a 向き に流れる電流を正として $i_3{}'$ と表すと，

$$i_3{}' = -i_3 = -I_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

LC 回路にキルヒホッフの第 2 法則を適用して，

$$\begin{aligned} -L\frac{\mathrm{d}i_3{}'}{\mathrm{d}t} &= V_{\mathrm{ab}}{}' \\ \therefore \quad V_{\mathrm{ab}}{}' &= -I_1\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ &= -\frac{E}{R_1}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{aligned}$$

よって，$V_{\mathrm{ab}}{}'$–$t$ グラフは下図.




(2) $i_3{}' = 0$ の瞬間，$V_{\mathrm{ab}}{}' = \pm\dfrac{E}{R_1}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ より，C に蓄えられる電荷を $Q_0$ とすると，

$$Q_0 = C|V_{\mathrm{ab}}{}'| = \frac{E}{R_1}\sqrt{LC}$$

PJXB

直前東大電磁気学特講

Z-KAI

| 会員番号 | | 氏　名 | |
|---|---|---|---|