PJXC

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前東大熱力学・波動特講

問題

【1】

《解答》

(1) 状態方程式より，

$$p_0V_0 = NRT \qquad \therefore \quad N = \frac{p_0V_0}{RT}$$

(2) 気球が押しのけた空気の物質量は N である．よって，浮力は，

$$\mu Ng = \frac{\mu p_0V_0}{RT}g$$

(3) ロープがとりはらわれたときの合力が鉛直上向きであればよいので，

$$\frac{\mu p_0V_0g}{RT} - \left(M + \frac{mp_0V_0}{RT}\right)g > 0$$

$$\therefore \quad M < \frac{p_0V_0}{RT}(\mu - m)$$

(4) 最高高度では，気球が受ける力がつり合うので，

$$0 = \frac{\mu V_0 g}{RT}\cdot\frac{p_0}{1+\alpha h} - \left(M + \frac{mp_0V_0}{RT}\right)g$$

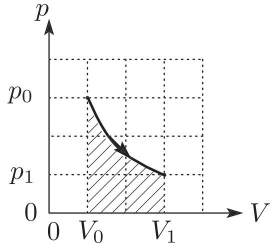
これを h について解いて，

$$h = \frac{(\mu - m)p_0V_0 - MRT}{\alpha(MRT + mp_0V_0)}$$

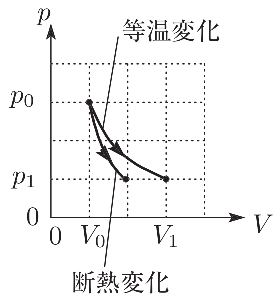
(5) (a) 気球が上昇する間，気球内のヘリウムの温度は (大気の温度と等しく) 一定であり，ヘリウムの圧力と大気の圧力はつねに等しい．よって，ボイルの法則より，

$$p_0V_0 = \frac{p_0}{1+\alpha h}V \qquad \therefore \quad V = V_0(1+\alpha h)$$

(b) ヘリウムの状態変化は等温変化であるから，$p-V$ グラフは $(p_0,\ V_0)$，$(p_1,\ V_1)$ を通る双曲線である．さらに，ヘリウムの内部エネルギー変化はない．よって，熱力学第 1 法則より，気球が得る熱量は，気球が外部にした仕事 (下図の斜線部の面積) に等しい．



(6) ヘリウムの状態変化は断熱膨張であるから，熱力学第 1 法則より，外部にした仕事の分だけ内部エネルギーが減少し，したがって温度が下がる．このとき，同じ高度 (同じ圧力) のときで比べると，断熱変化の方が温度は低いので，状態方程式より，断熱変化の方が体積は小さい．



【2】

《解答》

(1) 気体の内部エネルギー U_0 は，状態方程式より，

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{3}{2} \times [\text{物質量}] \times [\text{気体定数}] \times [\text{絶対温度}] \\ &= \frac{3}{2} \times 60p_0 \times LS \\ &= 90 \times p_0 LS \quad \cdots ① \end{aligned}$$

(2) 打ち出される直前の圧力を p_1 とする．問題文中の関係式より，

$$\begin{aligned} &p_1(8LS)^{5/3} = 60p_0(LS)^{5/3} \\ &\therefore \quad p_1 = \frac{60}{8^{5/3}}p_0 = \frac{15}{8} \times p_0 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

(3) 気体と小物体 A からなる系に着目すると，

$$[\text{系のエネルギーの変化量}] = [\text{系外がした仕事}] \quad \cdots ③$$

が成り立つ．系外，すなわち大気がした仕事 W は，

$$W = -p_0 S \cdot 7L \quad \cdots ④$$

A が B から打ち出される直前の気体の内部エネルギー U_1 は，②より，

$$U_1 = \frac{3}{2}p_1(8LS) = \frac{45}{2}p_0 LS \quad \cdots ⑤$$

さらに，③より，

$$\left(U_1 + \frac{1}{2}m{v_0}^2\right) - (U_0 + 0) = W \quad \cdots ⑥$$

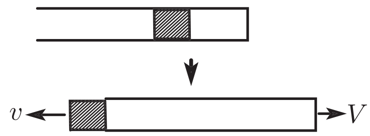
⑥に，①，④，⑤を代入して v_0 について解くと，

$$v_0 = 11 \times \sqrt{\frac{p_0 LS}{m}} \quad \cdots ⑦$$

(4) 与えられた数値を⑦に代入すると，

$$\begin{aligned} v_0 &= 11\sqrt{\frac{1.0 \times 10^5[\mathrm{N/m^2}] \cdot 1.0 \times 10^{-2}[\mathrm{m}] \cdot 1.0 \times 10^{-4}[\mathrm{m^2}]}{1.0 \times 10^{-1}[\mathrm{kg}]}} \\ &= 1.1 \times 10[\mathrm{m/s}] \end{aligned}$$

(5) 打ち出される瞬間の A の速さを v，B の速さを V とする．運動量保存則より，



$$3m \cdot V + m(-v) = 0 \quad \cdots ⑧$$

③より，

$$\left(U_1 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot V^2\right) - (U_0 + 0 + 0) = W$$

上式と⑥とを比較すると，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot V^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \quad \cdots ⑨$$

⑧，⑨より，V を消去すると，

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{3m}{3m+m}}v_0 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times v_0 \end{aligned}$$

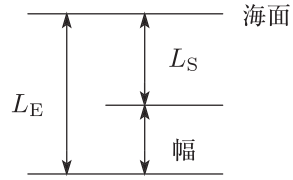
【3】

《解答》

(1) 深度 l のときの音波の先端の往復所要時間が T 以下であれば，測定可能である．したがって，

$$\frac{2l}{V} \leqq T \qquad \therefore \quad l \leqq \frac{1}{2}VT = L$$

(2) 右図において，



$$\frac{2L_E}{V} = t_E,\ \frac{2L_S}{V} = t_S$$

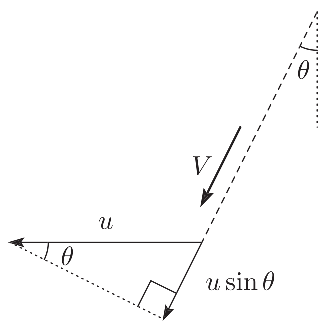
$$\therefore \quad 幅 = L_E - L_S = \frac{1}{2}V(t_E - t_S)$$

波長を λ とすると，$\lambda = \dfrac{V}{f_0}$ であるから，

$$\frac{幅}{\lambda} = \frac{1}{2}f_0(t_E - t_S)(倍)$$

(3) 魚群の速度は，音波の進行方向成分が 0 であるから．

(4) 魚群の速度は，音波の進行成分が $u\sin\theta$ であるから，



$$V - u\sin\theta = f_1\lambda$$

$$\therefore \quad f_1 = \frac{V - u\sin\theta}{\lambda} = \frac{V - u\sin\theta}{V}f_0$$

(5) 魚群は振動数 f_1 の音波を発する“音源”とみなせる．この“音源”が，音波の進行方向に関し速さ $u\sin\theta$ で遠ざかっているとみなせるので，反射波の波長を λ_2 とすると，

$$V + u\sin\theta = f_1\lambda_2$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad f_2 = \frac{V}{\lambda_2} &= \frac{V - u\sin\theta}{V + u\sin\theta}f_0 \\ &= \frac{1 - \dfrac{u}{V}\sin\theta}{1 + \dfrac{u}{V}\sin\theta}f_0 \\ &\fallingdotseq \left(1 - \frac{2u}{V}\sin\theta\right)f_0\end{aligned}$$

(6) (5) の結果より，

$$\varDelta f = |f_0 - f_2| = \frac{2uf_0}{V}\sin\theta$$

$$\therefore \quad u = \frac{\varDelta f}{2f_0\sin\theta}V$$

【4】

《解答》

(1) 隣り合うスリットを通って θ の方向に出ていく光の経路差は $d\sin\theta \fallingdotseq d\cdot\theta$ と表せるので，

$$\text{強め合う (明るく見える) 条件} \quad \cdots \quad d\cdot\theta = \lambda m$$

(2) θ の方向に見える明るい縞の x 座標について，

$$x = L\tan\theta \fallingdotseq L\cdot\theta \qquad \therefore \quad \theta = \frac{x}{L}$$

これを (1) に代入すると，

$$d\frac{x}{L} = \lambda m \qquad \therefore \quad x = m\cdot\frac{L\lambda}{d}$$

(3) 屈折率 n の媒質中での波長は $\lambda' = \dfrac{\lambda}{n}$ なので，明るい縞の x 座標は，

$$x' = \frac{L\lambda'}{d}\cdot m = \frac{L\lambda}{nd}\cdot m$$

(4) この回折格子のスリット間隔 d は，

$$d = \frac{0.01\,\mathrm{m}}{1000} = 1\times10^{-5}\,\mathrm{m}$$

$\lambda_1 = 3.8\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ の光による明るい縞の x 座標を x_1，対応する明線の m を m_1 とすると，(2) より，

$$x_1 = \frac{1\,\mathrm{m}\cdot(3.8\times10^{-7}\,\mathrm{m})}{1\times10^{-5}\,\mathrm{m}}\cdot m_1 = 3.8\,\mathrm{cm}\times m_1$$

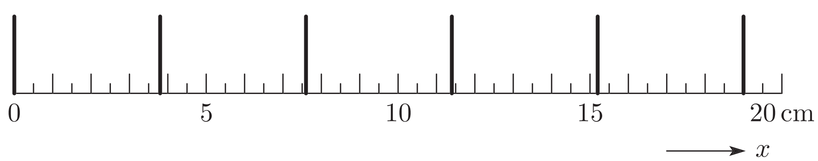
また，$\lambda_2 = 7.6\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ の光による明るい縞の x 座標を x_2，対応する明線の m を m_2 とすると，

$$x_2 = \frac{1\,\mathrm{m}\cdot(7.6\times10^{-7}\,\mathrm{m})}{1\times10^{-5}\,\mathrm{m}}\cdot m_2 = 7.6\,\mathrm{cm}\times m_2$$

よって，$x = 0$〜$20\,\mathrm{cm}$ の範囲に見える明るい縞の位置は，

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3.8\times10^{-7}\,\mathrm{m}\text{ の光} & \cdots \quad x_1 = 0,\ 3.8,\ 7.6,\ 11.4,\ 15.2,\ 19.0\,\mathrm{cm} \\ \lambda_2 = 7.6\times10^{-7}\,\mathrm{m}\text{ の光} & \cdots \quad x_2 = 0,\ 7.6,\ 15.2\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

これらの位置を記入すると，下図の太い実線のようになる．



(5) ガラスの屈折率 n_g は波長 λ によりわずかに異なるので，これを $n_\mathrm{g}(\lambda)$ と表すことにする．(3) より，$\lambda_1 = 3.8 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ の光による明るい縞の x 座標 ${x_1}'$ は，

$$ {x_1}' = \frac{1\,\mathrm{m} \cdot (3.8 \times 10^{-7}\,\mathrm{m})}{n_\mathrm{g}(\lambda_1) \cdot (1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m})} \cdot m_1 = \frac{3.8\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_1)} \times m_1 \quad \cdots ① $$

同様に，$\lambda_2 = 7.6 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ の光による明るい縞の x 座標 ${x_2}'$ は，

$$ {x_2}' = \frac{1\mathrm{m} \cdot (7.6 \times 10^{-7}\,\mathrm{m})}{n_\mathrm{g}(\lambda_2) \cdot (1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m})} \cdot m_2 = \frac{7.6\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_2)} \times m_2 \quad \cdots ② $$

波長によらず屈折率が一定であれば，$m_1 = 2$ の ${x_1}'$ と $m_2 = 1$ の ${x_2}'$ は同じ位置になるが，実際は，光の波長が短いほど屈折率が大きいため，これらの位置は一致せず，

$$ (m_1 = 2 \text{ の } {x_1}') < (m_2 = 1 \text{ の } {x_2}') \quad \cdots \quad \begin{cases} \text{a が} \lambda_1 = 3.8 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \text{ の光} \\ \text{b が} \lambda_2 = 7.6 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \text{ の光} \end{cases} $$

(6) ①，②より，a と b の位置は，

$$ \begin{cases} x_\mathrm{a} = \dfrac{3.8\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_1)} \cdot 2 = \dfrac{7.6\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_1)} \\ x_\mathrm{b} = \dfrac{7.6\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_2)} \cdot 1 = \dfrac{7.6\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_2)} \end{cases} \qquad \therefore \quad x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a} = \frac{7.6\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_2)} - \frac{7.6\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_1)} $$

$m_1 = 4$ の ${x_1}'$ と $m_2 = 2$ の ${x_2}'$ に注目すると，

$$ {x_2}' - {x_1}' = \frac{7.6\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_2)} \cdot 2 - \frac{3.8\,\mathrm{cm}}{n_\mathrm{g}(\lambda_1)} \cdot 4 \qquad \therefore \quad \frac{{x_2}' - {x_1}'}{x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}} = 2 $$

PJXC

直前東大熱力学・波動特講

Z-KAI

会員番号	

氏　名	