M1T

冬期講習　確認テスト

解答

Z会東大進学教室

高１難関大数学

【1】(1)
$$f(x)=x^3-2x^2+3x-4$$
とおくと
$$f'(x)=3x^2-4x+3$$
であるから, 点 $(2,\ 2)$ における接線の傾きは
$$f'(2)=12-8+3=7$$
よって求める接線の方程式は
$$y=7(x-2)+2$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{y=7x-12}\qquad(\text{答})$$

(2)
$$f(x)=x^3+4$$
とおくと
$$f'(x)=3x^2$$
曲線上の点 $(a,\ a^3+4)$ 上における接線の方程式は
$$y=3a^2(x-a)+(a^3+4)$$
これが点 $(0,\ -12)$ を通るので
$$-12=3a^2(-a)+(a^3+4)$$
$$2a^3=16$$
$$\therefore\quad a=2$$
よって求める接線の方程式は
$$y=12(x-2)+12$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{y=12x-12}\qquad(\text{答})$$

(3)
「$y=f(x),\ y=g(x)$ が点 $(1,\ -2)$ で接する」
$$\iff\quad「f(1)=g(1)=-2 \text{ かつ } f'(1)=g'(1)」$$
ここで
$$f(1)=1+a+b=-2$$
$$g(1)=-1+c=-2$$
より
$$\begin{cases} a+b=-3 \\ c=-1 \end{cases}\qquad\cdots①$$
また,
$$f'(x)=2x+a,\quad g'(x)=-3x^2$$
より
$$2+a=-3\quad\cdots②$$
①, ②より
$$\boldsymbol{a=-5},\quad \boldsymbol{b=2},\quad \boldsymbol{c=-1}\qquad(\text{答})$$

(4) $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{8}{3}$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{8}{3}\right)$$
$$\boldsymbol{f(x) = 3x - 4} \qquad \text{(答)}$$

また，与式で $x = a$ とおくと

$$\begin{aligned} & \int_a^a f(t)dt = \frac{3}{2}a^2 - 4a + \frac{8}{3} \\ \iff \quad & 0 = \frac{3}{2}a^2 - 4a + \frac{8}{3} \\ \iff \quad & 9a^2 - 24a + 16 = 0 \\ \iff \quad & (3a-4)^2 = 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = \frac{4}{3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} \int_1^{-1}(x^3+2)dx &= -\int_{-1}^{1}(x^3+2)dx \\ &= -2\int_0^1 2dx \qquad (\because\ x^3\text{は奇関数，}2\text{ は偶関数}) \\ &= -2\Big[2x\Big]_0^1 = \boldsymbol{-4} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】(1) $f(x) = x^2 - x + 3$ とおくと，

$$f'(x) = 2x - 1$$

$y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = (2t-1)(x-t) + (t^2 - t + 3)$$
$$\therefore\quad y = (2t-1)x - t^2 + 3$$

これが $(1,\ -1)$ を通るから

$$-1 = (2t-1) - t^2 + 3$$

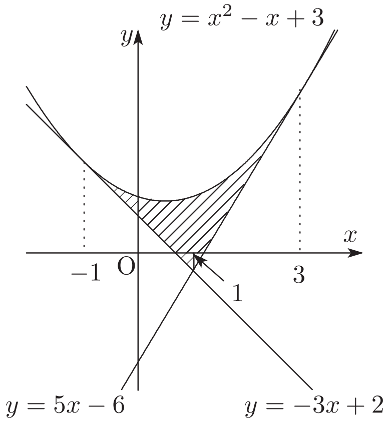
ゆえに

$$(t-3)(t+1) = 0$$
$$\therefore\quad t = 3,\ -1$$

よって問題の接線の方程式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{t = 3} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{y = 5x - 6} \\ \boldsymbol{t = -1} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{y = -3x + 2} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

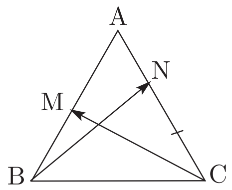
(2) 放物線 $y = f(x)$，および接線のグラフは右の図のようになるから，求める面積は



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \left\{(x^2 - x + 3) - (-3x + 2)\right\} dx \\ &\quad + \int_{1}^{3} \left\{(x^2 - x + 3) - (5x - 6)\right\} dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx + \int_{1}^{3} (x-3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{BN}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \boldsymbol{-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}} \qquad (答)$$



また

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}} \qquad (答)$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{BN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}} \\
&= \left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\
&= -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{7-6-4}{12} \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{4}} \qquad (答)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{BN}}\right|^2 &= \left|-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\
&= 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{10-3}{9} \\
&= \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BN}}\right| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{3}} \qquad (答)$$

【4】

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

の両方に垂直なベクトルの一つを

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

とおく．条件より

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}=2x+6y+z=0\quad\cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=x-z=0\quad\cdots②$$

ここで $x=1$ とおくと，② より

$$z=1$$

① より

$$y=-\frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\ /\!/\ \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

求めるベクトルは，$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ に平行で，大きさが 9 であるから

$$\left|k\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|=|k|\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3|k|=9$$

$$\therefore\quad k=\pm 3$$

ゆえに求めるベクトルは

$$\pm 3\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{6}\end{pmatrix}\qquad (答)$$