M1JS/M1J

本科 3 期 2 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 1 選抜東大数学

高 1 東大数学

３０章　数列（４）

問題

【1】与えられた数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項 a_n は

$$a_n = 2n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である.

(1) 第 n 群には n 個の項が含まれるので，第 1 群から第 9 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 45$$

よって第 10 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第 46 項．したがって

$$a_{46} = 2 \cdot 46 - 1 = \mathbf{91} \qquad \text{(答)}$$

(2) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

よって 第 n 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第

$$\frac{1}{2}n(n-1) + 1$$

項．ゆえに

$$a_{\frac{1}{2}n(n-1)+1} = 2 \cdot \left\{\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right\} - 1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1} \qquad \text{(答)}$$

これは $n = 1$ のときも成立する.

(3) 第 1 群から第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であるから，第 n 群の最後の数は,

$$a_{\frac{1}{2}n(n+1)} = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = n^2 + n - 1$$

である.

したがって 求める和は，初項 $n^2 - n + 1$，末項 $n^2 + n - 1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{n \cdot \{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)\}}{2} = \frac{n \cdot 2n^2}{2} = \boldsymbol{n^3} \qquad \text{(答)}$$

【2】与えられた数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項 a_n は

$$a_n = n$$

である．

(1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$$

である．したがって第 n 群の最初の数は，第

$$\left(2^{n-1} - 1\right) + 1 = 2^{n-1}$$

項．これは $n = 1$ のときも成立する．また第 1 群から第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

であるから，第 n 群の最後の数は，第

$$2^n - 1$$

項．ゆえに求める和は，初項 2^{n-1}，末項 $2^n - 1$，項数 2^{n-1} の等差数列の和である．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{2^{n-1}\left\{2^{n-1} + (2^n - 1)\right\}}{2} &= 2^{n-2}\left(2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} - 1\right) \\ &= 2^{n-2}\left(3 \cdot 2^{n-1} - 1\right) \\ &= \mathbf{3 \cdot 2^{2n-3} - 2^{n-2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 1000 が第 n 群に含まれるとすると，

$$2^{n-1} \leqq 1000 \leqq 2^n - 1$$

ここで

$$2^9 = 512, \quad 2^{10} = 1024$$

より，この不等式をみたす正整数 n は，$n = 10$ である．すなわち 1000 は第 10 群に含まれる．また，第 10 群の最初の数は

$$2^{10-1} = 512$$

より

$$1000 - 512 + 1 = 489$$

ゆえに，1000 は

第 10 群の 489 番目　　(答)

の数である．

【3】問題の数列を，以下のような群に分ける．

$$1 \mid 2,\ 2 \mid 3,\ 3,\ 3 \mid 4, \cdots$$

このとき，第 n 群には n 個の数が含まれる．

(1) 第 n 群には n 個の正整数が含まれるので，2 桁の数が現れるのは第 10 群から第 99 群まで．その個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=10}^{99} k &= \sum_{k=1}^{99} k - \sum_{k=1}^{9} k \\ &= \frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10 \\ &= \frac{90}{2}(110-1) \\ &= \textbf{4905 個} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 初めて 100 が現れるのは，第 100 群の最初の項である．第 1 群から第 99 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{99} k = \frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100 = 4950$$

この次に初めて 100 が現れるから，最初の 100 は

第 4951 項　　(答)

(3) 第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり，第 $n-1$ 群までの項数の総和は， $n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である．第 10000 項が第 n 群に含まれるとすると，

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2}n(n-1) < 10000 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \\ \iff \quad & n(n-1) < 20000 \leqq n(n+1)\end{aligned}$$

ここで

$$140\cdot 141 = 19740,\quad 141\cdot 142 = 20022$$

より，これをみたす整数 n は $n = 141$．ゆえに第 10000 項は

141　　(答)

【4】与えられた数列を

$$\frac{1}{1} \,\Big|\, \frac{1}{2},\ \ \frac{2}{2} \,\Big|\, \frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3},\ \ \frac{3}{3} \,\Big|\, \frac{1}{4},\ \ \frac{2}{4},\ \ \frac{3}{4},\ \ \frac{4}{4} \,\Big|\, \frac{1}{5},\ \ \cdots$$

のように群に分ける．このとき第 n 群には n 個の数が含まれ，第 n 群の k 番目は

$$\frac{k}{n}\ \ (1 \leqq k \leqq n)$$

となる．ただし n，k は正整数とする．

(1) $\dfrac{7}{15}$ は

第 15 群の 7 番目

である．第 14 群までの項数の総和は

$$\sum_{l=1}^{14} l = \frac{1}{2}\cdot 14 \cdot 15 = 105$$

より，$\dfrac{7}{15}$ は

第 $105+7=\mathbf{112}$ **項**　　(答)

(2) 第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{l=1}^{n} l = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり，第 $n-1$ 群までの項数の総和は， $n \geqq 2$ として

$$\sum_{l=1}^{n-1} l = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である．第 200 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}n(n-1) < 200 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \\ \iff\ \ &n(n-1) < 400 \leqq n(n+1) \end{aligned}$$

ここで

$$19\cdot 20 = 380,\ \ 20\cdot 21 = 420$$

であるから，これをみたす整数 n は $n=20$．ゆえに a_{200} は第 20 群に含まれる．
また第 1 群から第 19 群までの項数の総和は

$$\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20 = 190$$

であるから，a_{200} は第 20 群の

$200-190=10$ 番目

ゆえに

$$a_{200} = \mathbf{\frac{10}{20}}\qquad \text{(答)}$$

(3) 第 n 群に含まれる数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n+1}{2}$$

ここで求める和は

(第 1 群から第 19 群までの数の総和) + (第 20 群の 1 番目から 10 番目までの和)

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{200}a_k&=\sum_{n=1}^{19}\frac{n+1}{2}+\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{20}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{19}n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{19}1+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot19\cdot20+\frac{1}{2}\cdot19+\frac{11}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{429}{4}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【5】与えられた数列を

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\ \Big|\ \cdots\cdots$$

のように分ける．ここで，第 n 群には n 個の項が含まれる．

(1) 第 11 項は第 5 群の 1 番目であり，第 15 項は第 5 群の 5 番目である．ゆえに第 11 項から第 15 項までを列挙すると

$$\boldsymbol{\frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5}}\qquad\text{(答)}$$

(2) 第 m 群の数の，分母と分子の和は $m+1$ になる．また，各群の k 番目の分母は k であるから，第 m 群の k 番目は

$$\frac{m-k+1}{k}\quad(1\leqq k\leqq m)$$

と表される．ただし m，k は正整数とする．このとき $\dfrac{a}{b}$ は

第 $(a+b-1)$ 群

に含まれ，分母が b であるから，

第 $(a+b-1)$ 群の第 b 番目

の項である．よって，$a+b\geqq3$ のとき

$$n=\sum_{k=1}^{a+b-2}k+b=\boldsymbol{\frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2)+b}\qquad\text{(答)}$$

これは $a+b=2$，すなわち $a=b=1$ のときも成立する．

【6】問題の数列を列挙すると

$$1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29 \mid 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 49,\ 53,\ 59 \mid 61,\ \cdots$$

これを上のように分ける.

(1) 30 以下の数はすべて第 1 群に含まれ，その個数は **8 個** (答).

(2) 各群には 8 個の数が含まれるから，第 n 群までの項数の総和は

$$8n \text{ 項}$$

ゆえに第 1000 項が第 n 群に含まれるとすると，

$$8(n-1) < 1000 \leqq 8n$$

これをみたす整数 n は，$n = 125$．ここで

$$8 \cdot 125 = 1000$$

より，1000 は第 125 群の最後の項である．ここで，問題の数列を群ごとに列挙すると

群 \ 項	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	7	11	13	17	19	23	29
2	31	37	41	43	47	49	53	59
3	61	67	71	73	77	79	83	89
4	91	$\cdots$						

となる．ここで第 1000 項は，第 125 群の最後の数である．各群の最後の数は，公差 30 の等差数列であるから，求める項は

$$29 + (125-1) \cdot 30 = \mathbf{3749} \qquad \text{(答)}$$

(3) 上の表で，第 1 群の総和は

$$(1+29) + (7+23) + (11+19) + (12+17) = 120$$

第 2 群の総和は

$$(31+59) + (37+53) + (41+49) + (43+47) = 360 = 120 + 240$$

第 3 群の総和は

$$(61+89) + (67+83) + (71+79) + (73+77) = 600 = 120 + 480$$

ゆえに第 n 群の総和は初項 120，公差 240 の等差数列であるから，第 n 群の総和を T_n とすると

$$T_n = 120 + (n-1) \cdot 240 = 240n - 120$$

よって初項から第 1000 項までの和を S とすると，S は第 1 群から第 125 群までの和であるから，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{125} T_k \\ &= \frac{125}{2}\{120 + (240 \cdot 125 - 120)\} \\ &= \mathbf{1875000} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

■別解

上の表で，第 n 行第 k 列の項を $a_{n,\ k}$ とおくと，第 k 列の数は，初項 $a_{1,\ k}$，公差 30 の等差数列である．ゆえに第 125 行第 k 列の項 $a_{125,\ k}$ は

$$\begin{aligned} a_{125,\ k} &= a_{1,\ k} + (125-1)\cdot 30 \\ &= a_{1,\ k} + 3720 \end{aligned}$$

ゆえに第 k 列の第 1 行から第 125 行までの和 U_k は

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{125}{2}\left\{a_{1,\ k} + (a_{1,\ k} + 3720)\right\} \\ &= 125\,(a_{1,\ k} + 1860) \end{aligned}$$

よって求める和 S は，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{8} U_k \\ &= 125\sum_{k=1}^{8}(a_{1,\ k} + 1860) \\ &= 125\left(\sum_{k=1}^{8} a_{1,\ k} + 8\cdot 1860\right) \\ &= 125\left\{(1+7+\cdots+29) + 14880\right\} \\ &= \mathbf{1875000} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【7】与えられた数列を

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6 \mid 7,\ 8,\ 9,\ 10 \mid 11,\ \cdots$$

のように分ける．この数列の一般項を b_n とすると，

$$b_n = n$$

である．

	1	2	3	4
1	1	2	4	7
2	3	5	8	
3	6	9		
4	10			

(1) 第 1 行第 k 列の数は，第 k 群の最初の項である．第 k 群には k 個の項が含まれるから，第 $(k-1)$ 群までの項数の総和は，$k \geqq 2$ として

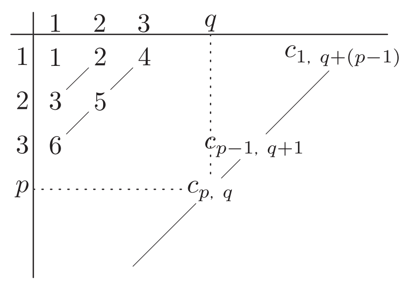
$$\sum_{l=1}^{k-1} l = \frac{1}{2}k(k-1)$$

ゆえに第 k 群の最初の項は

$$b_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} = \frac{1}{2}k(k-1)+1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(k^2-k+2\right)} \qquad (\text{答})$$

これは $k=1$ のときも成立する．

(2) 第 p 行第 q 列を $c_{p,\ q}$ とおく．$c_{p,\ q}$ が属する群の項を $c_{p,\ q}$ からさかのぼって書き並べると



$$c_{p,\ q},\ c_{p-1,\ q+1},\ c_{p-2,\ q+2},\ \cdots,\ c_{1,\ q+(p-1)}$$

であるから，$c_{p,\ q}$ が属する群の最初の数は

$$c_{1,\ p+q-1}$$

であることがわかる．よって，$c_{p,\ q}$ は

第 $(p+q-1)$ 群の第 p 項

である．したがって，第 13 行第 18 列の数は

第 $13+18-1=30$ 群の第 13 項

である．(1) より，第 30 群の最初の数は

$$\frac{1}{2}\cdot 30\cdot(30-1)+1 = 436$$

であるから，求める数は

$$436+(13-1) = \mathbf{448} \qquad (\text{答})$$

(3) 2000 が第 k 群に含まれるとすると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}k(k-1) < 2000 \leqq \frac{1}{2}k(k+1) \\ \iff \quad & k(k-1) < 4000 \leqq k(k+1) \end{aligned}$$

ここで

$$62 \cdot 63 = 3906, \quad 63 \cdot 64 = 4032$$

より，この不等式をみたす整数 k は，$k = 63$．よって，2000 は第 63 群の数である．

また，第 63 群の最初の数は，

$$\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 62 + 1 = 1954$$

であり，$2000 - 1954 + 1 = 47$ より，2000 は第 63 群の第 47 項である．ゆえに

$$2000 = c_{p,\ q}$$

であるとすると，

$$\begin{cases} p + q - 1 = 63 \\ p = 47 \end{cases}$$

これを解いて

$$p = 47, \quad q = 17$$

したがって，2000 は

第 47 行第 17 列　　(答)

の数である．

【8】(1) 与えられた数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{3}{2} + (n-1)\cdot 1 = n + \frac{1}{2}$$

第 k 群には 2^{k-1} 個の項が含まれるから，第 $(k-1)$ 群までの項数の総和は，$k \geqq 2$ として

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} = \frac{1\cdot(2^{k-1}-1)}{2-1} = 2^{k-1} - 1$$

よって，第 k 群の最初の項は第 2^{k-1} 項であるから

$$a_{2^{k-1}} = \boldsymbol{2^{k-1} + \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

これは $k = 1$ のときも成立する．また第 k 群の最後の項は第 $(2^k - 1)$ 項であるから，

$$\begin{aligned} a_{2^k-1} &= 2^k - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{2^k - \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 第 k 群の数の和は，初項 $a_{2^{k-1}} = 2^{k-1} + \frac{1}{2}$，末項 $a_{2^k-1} = 2^k - \frac{1}{2}$，公差 1，項数 2^{k-1} の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2}\cdot 2^{k-1}\cdot(a_{2^{k-1}} + a_{2^k-1}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2^{k-1}\cdot\left(2^{k-1} + \frac{1}{2} + 2^k - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{k-2}\cdot 2^{k-1}(1+2) \\ &= \boldsymbol{3\cdot 2^{2k-3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3)
$$T_k > 10^{50} \iff 3\cdot 2^{2k-3} > 10^{50}$$

両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{10} 3 + (2k-3)\log_{10} 2 > 50 \\ \log_{10} 3 + 2k\log_{10} 2 - 3\log_{10} 2 > 50 \end{aligned}$$

よって

$$k > \frac{1}{2}\cdot\frac{50 - \log_{10} 3 + 3\log_{10} 2}{\log_{10} 2} = 83.76\cdots$$

これを満たす最小の整数 k は

$$k = \boldsymbol{84} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2n-1$$

$n-1$ 番目のカッコまでの項数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^{n-1}-1$$

であるから，n 番目のカッコ内の最初の項は

第 2^{n-1} 項

より

$$a_{2^{n-1}} = 2\cdot 2^{n-1}-1 = \boldsymbol{2^n - 1} \qquad \text{(答)}$$

また，n 番目のカッコ内の最後の項は

第 2^n-1 項

より

$$a_{2^n-1} = 2(2^n-1)-1 = \boldsymbol{2^{n+1} - 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) n 番目のカッコ内は

初項 2^n-1 ，末項 $2^{n+1}-3$ ，項数 2^{n-1} の等差数列

であるから，その和は

$$\begin{aligned}\frac{2^{n-1}}{2}\cdot\left\{(2^n-1)+(2^{n+1}-3)\right\} &= 2^{n-2}\cdot(3\cdot 2^n-4)\\ &= \boldsymbol{3\cdot 2^{2n-2} - 2^n} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】 $$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\ \Big|\ \cdots$$

のように区切り，それぞれ，第 1 群，第 2 群，$\cdots$ とする．

(1) 第 n 群の最後の項までの項数は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{(項)}$$

ここで，第 100 項が第 n 群の数であるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 100 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

この不等式をみたす自然数は，$n = 14$ であるから

第 100 項は第 14 群の数である

第 13 群までの項数は

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91 \quad \text{(項)}$$

であるから

$$100 - 91 = 9 \quad \text{(番目)}$$

より

第 100 項は第 14 群の 9 番目の数である

したがって

第 100 項は，$\boldsymbol{\frac{9}{15}}$ (答)

(2) 第 n 群のすべての項の和は

$$\frac{1}{n+1}(1 + \cdots + n) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}$$

よって，第 13 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{13} \frac{k}{2} = \frac{1}{4} \cdot 13 \cdot 14 = \frac{91}{2}$$

また，第 14 群の 1 番目から 9 番目までの和は

$$\frac{1}{15}(1 + \cdots + 9) = 3$$

以上より，求める和は

$$\frac{91}{2} + 3 = \boldsymbol{\frac{97}{2}} \quad \text{(答)}$$

【3】(1) カッコのくくりを第 1 群，第 2 群，$\cdots$ とすると，第 k 群の和は

$$1+2+\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$$

したがって

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)\\
&=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n\\
&=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&S_1=n\cdot 1\\
&S_2=(n-1)\cdot 2\\
&S_3=(n-2)\cdot 2^2\\
&\qquad\vdots\\
&S_n=1\cdot 2^{n-1}
\end{aligned}$$

したがって，S は各項が (等差数列) $\times$ (等比数列) の形であるから，等比数列の公比 2 をかけあわせたものとの差を考えて

$$\begin{array}{rlllll}
S= & n\cdot 1+(n-1)\cdot 2 & +(n-2)\cdot 2^2 & +\cdots+1\cdot 2^{n-1} & \\
-)\ 2S= & \qquad\qquad\ n\cdot 2 & +(n-1)\cdot 2^2 & +\cdots+2\cdot 2^{n-1} & +1\cdot 2^n\\
\hline
-S= & n \qquad\qquad\ -2 & -2^2- & \cdots-2^{n-1} & -2^n
\end{array}$$

したがって

$$\begin{aligned}
S&=-n+(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+2^n)\\
&=-n+\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}\\
&=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

３１章　数列（５）

問題

【1】(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 5，公差 -4 の等差数列であるから，一般項 a_n は

$$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-4) = \boldsymbol{-4n+9} \qquad \text{(答)}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 -5 の等比数列であるから，一般項 a_n は

$$a_n = \boldsymbol{2\cdot(-5)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + 4n - 1$ より

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 1$$

よって $\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 1$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1) \\ &= 2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}1 \\ &= 2 + 4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= 2n^2 - 3n + 3 \end{aligned}$$

この式で $n=1$ とすると

$$2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 3 = 2 = a_1$$

より成立．ゆえに

$$a_n = \boldsymbol{2n^2 - 3n + 3} \qquad \text{(答)}$$

(4) $a_{n+1} = a_n + 3^n$ より

$$a_{n+1} - a_n = 3^n$$

よって，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は

$$a_{n+1} - a_n = 3^n$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}3^k \\ &= 2 + \frac{3\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1} \\ &= \frac{3^n+1}{2} \end{aligned}$$

この式で $n=1$ とすると

$$\frac{3+1}{2}=2=a_1$$

より成立．ゆえに，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{3^n+1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $2a_{n+1}=a_n-2$ より

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1$$

ここで方程式

$$x=\frac{1}{2}x-1$$

を解くと $x=-2$．ゆえに与えられた漸化式は

$$a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$$

と変形できる．上式は，数列 $\{a_n+2\}$ が初項 $a_1+2=1+2=3$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n+2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_{n+1}=-2a_n+3$ より，方程式

$$x=-2x+3$$

を解くと $x=1$．ゆえに与えられた漸化式は

$$a_{n+1}-1=-2(a_n-1)$$

と変形できる．上式は，数列 $\{a_n-1\}$ が初項 $a_1-1=2-1=1$，公比 -2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n-1=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{(-2)^{n-1}+1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで

$$b_n=\frac{a_n}{2^n}$$

とおくと上式は

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2} \quad \cdots (*)$$

ここで方程式 $x = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ を解いて $x = -1$．ゆえに $(*)$ は

$$b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$

と変形される．この式は，数列 $\{b_n + 1\}$ が初項 $b_1 + 1 = \dfrac{a_1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\begin{aligned} b_n + 1 &= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ b_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \\ \therefore\quad a_n &= 2^n b_n = \boldsymbol{3^n - 2^n} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4) 漸化式より明らかに $a_n \fallingdotseq 0$．漸化式の両辺の逆数をとって

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{3a_n + 2}{a_n} \\ \therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}} &= 2\cdot\frac{1}{a_n} + 3 \end{aligned}$$

ここで，方程式

$$x = 2x + 3$$

を解くと $x = -3$．ゆえに与えられた漸化式は

$$\frac{1}{a_{n+1}} + 3 = 2\left(\frac{1}{a_n} + 3\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n} + 3\right\}$ が初項 $\dfrac{1}{a_1} + 3 = 4$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} + 3 &= 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \\ \frac{1}{a_n} &= 2^{n+1} - 3 \\ \therefore\quad a_n &= \boldsymbol{\frac{1}{2^{n+1} - 3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(5) 両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{n+1} &= \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ \iff\quad \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

この式は，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ の階差数列の一般項が

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

であることを示す．よって $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} &= \frac{a_1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

ここで $n = 1$ のとき

$$2 - \frac{1}{1} = 1 = \frac{a_1}{1}$$

より成立．ゆえに $n \geqq 1$ のとき

$$a_n = n\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \boldsymbol{2n - 1} \qquad (答)$$

【3】(1) 与えられた漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 3 \quad \cdots ①$ が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2\left(a_n + \alpha n + \beta\right)$$

と変形されたとすると，上式は

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n + \beta - \alpha \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$\alpha = 2, \quad \beta - \alpha = -3$$

これを解いて

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} + 2(n+1) - 1 = 2\left(a_n + 2n - 1\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n + 2n - 1\}$ が初項 $a_1 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$，公比 2 の等比数列であることを示す．すなわち

$$a_n + 2n - 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \boldsymbol{3 \cdot 2^{n-1} - 2n + 1} \qquad (答)$$

(2) 与えられた漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + n \quad \cdots ①$ が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \frac{1}{2}\left(a_n + \alpha n + \beta\right)$$

と変形されたとすると，上式は

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}\alpha n - \alpha - \frac{1}{2}\beta \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$-\frac{1}{2}\alpha = 1,\quad -\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0$$

これを解いて

$$\alpha = -2,\quad \beta = 4$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} - 2(n+1) + 4 = \frac{1}{2}\left(a_n - 2n + 4\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n - 2n + 4\}$ が初項 $a_1 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．すなわち

$$a_n - 2n + 4 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n = \boldsymbol{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2n - 4} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 与えられた関係式

$$S_n = 1 - a_n \quad \cdots ①$$

① において，n を $n+1$ で置き換えて

$$S_{n+1} = 1 - a_{n+1} \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n$$

$$\therefore\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \cdots ③$$

また，① で $n = 1$ とすると

$$S_1 = a_1 = 1 - a_1$$

$$\therefore\quad a_1 = \frac{1}{2}$$

これと ③ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた関係式

$$S_n = 3S_{n-1} + 2n \quad \cdots ①$$

① において，n を $n+1$ で置き換えて

$$S_{n+1} = 3S_n + 2(n+1) \quad \cdots ②$$

②－① より

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= 3(S_n-S_{n-1})+2 \\ a_{n+1} &= 3a_n+2 \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

これが $n=1$ においても成り立つかどうかを調べる．① で $n=2$ とすると

$$S_2=3S_1+2\cdot 2$$

ここで

$$S_1=a_1=2, \quad S_2=a_1+a_2=a_2+2$$

であるから

$$\begin{aligned} & a_2+2=3\cdot 2+2\cdot 2 \\ \therefore \quad & a_2=8 \end{aligned}$$

ゆえに ③ において

$$3a_1+2=3\cdot 2+2=8=a_2$$

よって $n=1$ のときも成り立つ．ゆえに

$$a_{n+1}=3a_n+2 \quad (n \geqq 1)$$

である．方程式

$$x=3x+2$$

を解いて $x=-1$．これを用いて上式は

$$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$$

と変形できる．この式は，数列 $\{a_n+1\}$ が初項 $a_1+1=3$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\begin{aligned} & a_n+1=3\cdot 3^{n-1}=3^n \\ \therefore \quad & a_n=\boldsymbol{3^n-1} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

【5】与えられた漸化式 $2(n+1)a_{n+1}=na_n+(-1)^n$ で

$$b_n=na_n$$

とおくと，

$$2b_{n+1}=b_n+(-1)^n$$

両辺 $2\cdot(-1)^{n+1}$ で割って

$$\begin{aligned} & \frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=\frac{1}{2\cdot(-1)}\cdot\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{1}{2\cdot(-1)} \\ \therefore \quad & \frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=-\frac{1}{2}\frac{b_n}{(-1)^n}-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ここで方程式

$$x=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

を解くと $x=-\frac{1}{3}$．ゆえに漸化式は

$$\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{1}{3}\right\}$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{1}{3}\right\}$ が初項

$$\frac{b_1}{(-1)^1}+\frac{1}{3}=-b_1+\frac{1}{3}=-1\cdot a_1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3},$$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{1}{3}&=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ \frac{b_n}{(-1)^n}&=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right\}\\ b_n&=(-1)^n\cdot\frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right\}\\ &=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(-1)^n\right\}\end{aligned}$$

よって

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{3n}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(-1)^n\right\}}\qquad\text{(答)}$$

【6】(1) 与えられた漸化式

$$a_{n+1}=2a_n+2n^2-n+1\quad\cdots①$$

が，

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=2\left(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)$$

と変形されたとすれば，

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n^2+(-2\alpha+\beta)\,n-\alpha-\beta+\gamma\quad\cdots②$$

①，② の右辺を比較して，

$$\alpha=2,\quad -2\alpha+\beta=-1,\quad -\alpha-\beta+\gamma=1$$

これを解いて

$$\alpha=2,\quad \beta=3,\quad \gamma=6$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1}+2(n+1)^2+3(n+1)+6=2\left(a_n+2n^2+3n+6\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n+2n^2+3n+6\}$ が初項 $a_1+2\cdot1^2+3\cdot1+6=11$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n+2n^2+3n+6=11\cdot2^{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{11\cdot2^{n-1}-2n^2-3n-6}\qquad(\text{答})$$

(2) 与えられた漸化式

$$a_{n+1}=2a_n+n^2-n\quad\cdots①$$

が

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=2\left(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)$$

と変形されたとすると，

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n^2+(-2\alpha+\beta)\,n-\alpha-\beta+\gamma\quad\cdots②$$

となる．①，② の右辺を比較して

$$\alpha=1,\quad -2\alpha+\beta=-1,\quad -\alpha-\beta+\gamma=0$$

これを解いて

$$\alpha=1,\quad\beta=1,\quad\gamma=2$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1}+(n+1)^2+(n+1)+2=2\left(a_n+n^2+n+2\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{a_n+n^2+n+2\right\}$ が初項 $a_1+1^2+1+2=8$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n+n^2+n+2=8\cdot2^{n-1}=2^{n+2}$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{2^{n+2}-n^2-n-2}\qquad(\text{答})$$

【7】(1) 条件より

$$S_{n+1}-3S_n=n^2\quad\cdots①$$

$n\geqq2$ として

$$S_n-3S_{n-1}=(n-1)^2\quad\cdots②$$

① − ② より

$$(S_{n+1}-S_n)-3\left(S_n-S_{n-1}\right)=n^2-(n-1)^2$$
$$a_{n+1}-3a_n=2n-1$$

ここで $n=1$ とすると $S_1=a_1=0$.
また $S_2-3S_1=1^2$ より $S_2=a_1+a_2=a_2=1$.
これは上式を満たす．ゆえに求める漸化式は

$$\boldsymbol{a_{n+1}=3a_n+2n-1}\qquad(\text{答})$$

(2) 条件より

$$a_1 = S_1 = 0$$

(1) で得られた漸化式

$$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1 \quad \cdots ①$$

が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3\left(a_n + \alpha n + \beta\right)$$

と変形されたとすれば

$$a_{n+1} = 3a_n + 2\alpha n - \alpha + 2\beta \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$2\alpha = 2,\quad 2\beta - \alpha = -1$$

これを解いて

$$\alpha = 1,\quad \beta = 0$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} + (n+1) = 3\left(a_n + n\right)$$

この式は，数列 $\{a_n + n\}$ が初項 $a_1 + 1 = 1$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + n = 1 \cdot 3^{n-1}$$
$$a_n = \boldsymbol{3^{n-1} - n} \qquad \text{(答)}$$

【8】$a_1 = 1 > 0$ と漸化式より，明らかに $a_n > 0$．与えられた漸化式

$${a_{n+1}}^3 = 4{a_n}^2$$

の，両辺底 2 の対数をとると，

$$\log_2 {a_{n+1}}^3 = \log_2\left(4{a_n}^2\right)$$
$$3\log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 2$$

ここで

$$b_n = \log_2 a_n$$

とおくと，

$$3b_{n+1} = 2b_n + 2$$
$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3} \quad \cdots ①$$

ここで方程式

$$x = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

を解くと，$x=2$．ゆえに①は

$$b_{n+1}-2=\frac{2}{3}\left(b_n-2\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{b_n-2\}$ が初項 $b_1-2=\log_2 a_1-2=-2$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であることを示す．すなわち

$$\begin{aligned}b_n-2&=(-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ b_n&=2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ &=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\log_2 a_n=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{2^{2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}}\qquad\text{(答)}$$

【9】与えられた条件は

$$a_1=0,\ \ a_2=1,\ \ (n-1)^2a_n=S_n\quad\cdots①$$

$n\geqq 2$ として，①は

$$(n-2)^2a_{n-1}=S_{n-1}\quad\cdots②$$

① − ② より

$$\begin{aligned}a_n&=(n-1)^2a_n-(n-2)^2a_{n-1}\\ n(n-2)a_n&=(n-2)^2a_{n-1}\end{aligned}$$

ここで，$n\geqq 3$ として

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}$$

この式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\cancel{n-2}}{n}\cdot\frac{\cancel{n-3}}{n-1}\cdot\frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}}\cdots\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}a_2\\ &=\frac{2}{n(n-1)}\end{aligned}$$

上式は $n=2$ のとき成立し，$n=1$ のとき成立しない．ゆえに求める一般項は

$$\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{2}{n(n-1)}} & \boldsymbol{(n\geqq 2)}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n=1)}\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

【10】

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+2} a_k = 1 - 2a_{n+1} \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき ① において，n の代わりに $n-1$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{k+2} a_k = 1 - 2a_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+2} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{k+2} a_k &= 1 - 2a_{n+1} - (1 - 2a_n) \\
\frac{4}{n+2} a_n &= -2a_{n+1} + 2a_n \\
\therefore \quad a_{n+1} &= \frac{n}{n+2} a_n \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

$n \geqq 3$ として，$(*)$ において n を $n-1$ に置き換えて

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \quad \cdots (**)$$

$(**)$ を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} a_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{\cancel{n-1}}{n+1} \cdot \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} a_2 \\
&= \frac{3 \cdot 2}{(n+1) \cdot n} \cdot a_2 \quad \cdots ③
\end{aligned}$$

ここで，① に $n=1$ を代入して

$$\frac{4}{3} a_1 = 1 - 2a_2$$

$$\therefore \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{3} a_1\right) = \frac{1}{6}$$

これと ③ より，

$$a_n = \frac{3 \cdot 2}{(n+1) \cdot n} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{n(n+1)}$$

これは，$n = 1$，2 のとき

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

より，$n = 1$，2 のときも成り立つ．

よって，一般項は，

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{n(n+1)}} \qquad \text{(答)}$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \boldsymbol{\frac{n}{n+1}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

＜コメント＞

$(*)$ の漸化式は，次のようにして解くこともできる．

両辺に，$(n+1)(n+2)$ をかけると

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n \quad (n \geqq 2)$$

したがって，$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
(n+1)na_n &= n(n-1)a_{n-1} \\
&= (n-1)(n-2)a_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= 3 \cdot 2 \cdot a_2 \\
\therefore \quad a_n &= \frac{3 \cdot 2}{n(n+1)} a_2 \quad \text{（以下同様）}
\end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) $\{a_n\}$ は，初項 1，公差 5 の等差数列だから

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 5 = \boldsymbol{5n-4} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\{a_n\}$ は，初項 -1，公比 2 の等比数列だから

$$a_n = -1\cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{-2^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + 2n$ より，$a_{n+1} - a_n = 2n$
よって，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ が，

$$a_{n+1} - a_n = 2n$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

これは，$n = 1$ のとき，$1^2 - 1 + 1 = 1 = a_1$ より，$n = 1$ のときも成り立つ.
したがって，

$$a_n = \boldsymbol{n^2 - n + 1} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $a_{n+1} = 3a_n - 4$ より，$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，
$\alpha = 2$ であるから，

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

これより，$\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$，公比 3 の等比数列だから

$$a_n - 2 = 1\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = \boldsymbol{3^{n-1} + 2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_{n+1} - 2a_n = 1$ より，$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，
$\alpha = -1$ であるから，

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

これより，$\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 4 + 1 = 5$，公比 2 の等比数列だから

$$a_n + 1 = 5\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = \boldsymbol{5\cdot 2^{n-1} - 1} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 両辺の逆数をとって，

$$\frac{1}{2a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{a_n}$$
$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{a_n} + 2$$

ここで，$\dfrac{1}{a_{n+1}} - \alpha = 2\left(\dfrac{1}{a_n} - \alpha\right)$ となる α を求めると，
$\alpha = -2$ であるから

$$\frac{1}{a_{n+1}} + 2 = 2\left(\frac{1}{a_n} + 2\right)$$

これより，$\left\{\dfrac{1}{a_n} + 2\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1} + 2 = 3$，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n} + 2 = 3 \cdot 2^{n-1}$$
$$\frac{1}{a_n} = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_n = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} - 2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{3}{n(n+1)}$$
$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{3}{n(n+1)}$$

ここで，$n \geqq 2$ のとき，$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ の階差数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{n+1} - \dfrac{a_n}{n}\right\}$ が

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{3}{n(n+1)}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n} &= \frac{a_1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{a_1}{1} + 3\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 1 + 3\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 1 + 3\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right\} \\
&= 1 + 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 4 - \frac{3}{n}
\end{aligned}$$
$$a_n = 4n - 3$$

これは，$n = 1$ のとき，$4 \cdot 1 - 3 = 1 = a_1$ より，$n = 1$ のときも成り立つ．
よって，

$$\boldsymbol{a_n = 4n - 3} \qquad \text{(答)}$$

【4】

$$S_n = 2a_n + n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots ①$$

① において，n の代わりに $n+1$ とすると

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1) \quad (n \geqq 0) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2a_n + 1 \quad (n \geqq 1)$$

ここで，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \quad (n \geqq 1)$ であるから

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n \geqq 1)$$

ここで，$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，$\alpha = 1$
よって，

$$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1) \quad \cdots ③$$

また，① で $n = 1$ を代入すると，$S_1 = 2a_1 + 1$
ここで，$S_1 = a_1$ であるから

$$a_1 = 2a_1 + 1$$
$$a_1 = -1$$

これと ③ より，$\{a_n - 1\}$ は，初項 $a_1 - 1 = -2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n - 1 = (-2) \cdot 2^{n-1}$$
$$= -2^n$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_n = -2^n + 1} \qquad (答)$$

３２章　数列（６）

問題

【1】(1) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\, a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha + \beta = 1,\quad \alpha\beta = -6$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2 - x - 6 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = 3, -2$．ゆえに $(*)$ は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

と 2 通りに変形できる．

① は，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ が初項 $a_2 - 3a_1 = -1$，公比 -2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - 3a_n = -1 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} \quad \cdots ③$$

また ② は，数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ が初項 $a_2 + 2a_1 = 4$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} + 2a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots ④$$

④ − ③ より

$$5a_n = 4 \cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}$$

$$a_n = \boldsymbol{\frac{4 \cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\, a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=4$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2-4x+4=0$$

の 2 解である．これを解いて $x=2$．ゆえに $(*)$ は

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n) \quad \cdots ①$$

と変形される．

① は，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ が初項 $a_2-2a_1=2$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-2\cdot\frac{a_n}{2^{n+1}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}$$
$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}$$

よって数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n$$

したがって

$$a_n=2^n\cdot\frac{1}{2}n=\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた漸化式

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)\,a_{n+1}-\alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=-1$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2-x-1=0$$

の 2 解である．これを解いて $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$．これを α，β $(\alpha>\beta)$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① は，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ が初項 $a_2-\alpha a_1=1-\alpha$，公比 β の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(1-\alpha)\beta^{n-1}=\beta^n \quad \left(\because \quad 1-\alpha=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\beta\right) \quad \cdots ③$$

② は，数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ が初項 $a_2-\beta a_1=1-\beta$，公比 α の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1}-\beta a_n=(1-\beta)\alpha^{n-1}=\alpha^n \quad \left(\because \quad 1-\beta=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\alpha\right) \quad \cdots ④$$

④ − ③ より

$$(\alpha-\beta)a_n=\alpha^n-\beta^n$$
$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n-\beta^n\right)$$

上式に

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

を代入して，求める一般項は

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 与えられた条件は

$$a_1 = 3,\quad b_1 = 1$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

これを繰り返し用いて

$$a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = \cdots = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 = 3 + 1 = 4$$

ゆえに

$$a_n + b_n = 4 \quad \cdots ③$$

① − ② より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$$

上式は，数列 $\{a_n - b_n\}$ が初項 $a_1 - b_1 = 2$，公比 3 の等比数列であることを示す．
ゆえに

$$a_n - b_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots ④$$

③ + ④ より

$$2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$$
$$\therefore \quad a_n = \mathbf{3^{n-1} + 2} \qquad (\text{答})$$

また ③ − ④ より

$$2b_n = 4 - 2 \cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore \quad b_n = \mathbf{2 - 3^{n-1}} \qquad (\text{答})$$

(2) 与えられた条件は

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 1$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 4a_n + b_n & \cdots ② \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が条件

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta\,(a_n - \alpha b_n)$$

をみたすとすれば

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta b_n \quad \cdots (*)$$

また ① − ② × α より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_{n+1} &= (a_n + b_n) - \alpha(4a_n + b_n) \\ &= (1 - 4\alpha)a_n + (1 - \alpha)b_n \quad \cdots (\#) \end{aligned}$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\beta = 1 - 4\alpha,\quad -\alpha\beta = 1 - \alpha$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して

$$4\alpha^2 - 1 = 0$$
$$\therefore\quad \alpha = \pm\frac{1}{2}$$

第 1 式とから

$$(\alpha,\ \beta) = \left(-\frac{1}{2},\ 3\right),\quad \left(\frac{1}{2},\ -1\right)$$

よって与えられた漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_{n+1} = 3\left(a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots③ \\ a_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_{n+1} = -\left(a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots④ \end{cases}$$

と変形できる．

③ は，数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 + \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{3}{2}$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{2}\cdot 3^{n-1} = \frac{3^n}{2} \quad \cdots⑤$$

また ④ は，数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 - \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{1}{2}$，公比 -1 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}\cdot(-1)^{n-1} = -\frac{(-1)^n}{2} \quad \cdots⑥$$

⑤ + ⑥ より

$$2a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$$
$$\therefore\quad a_n = \boldsymbol{\frac{3^n - (-1)^n}{4}} \qquad (答)$$

また ⑤ − ⑥ より

$$b_n = \boldsymbol{\frac{3^n + (-1)^n}{2}} \qquad (答)$$

■別解

与えられた条件より $\{a_n\}$ の 3 項間漸化式を導く．

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \cdots①$$
$$b_{n+1} = 4a_n + b_n \quad \cdots②$$

① より

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad \cdots③$$

③ で n を $n+1$ でおきかえて

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} \quad \cdots④$$

③，④ を ② に代入して

$$a_{n+2}-a_{n+1}=4a_n+(a_{n+1}-a_n)$$
$$\therefore\quad a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n \quad \cdots ⑤$$

ここで ⑤ が

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$$

と変形されたとすれば

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)\,a_{n+1}-\alpha\beta a_n \quad \cdots ⑥$$

⑤ と ⑥ を比較して

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-3$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2-2x-3=0$$

の 2 解である．これを解いて $x=3$，-1．ゆえに ⑤ は

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=-\left(a_{n+1}-3a_n\right) \quad \cdots ⑦$$
$$a_{n+2}+a_{n+1}=3\left(a_{n+1}+a_n\right) \quad \cdots ⑧$$

⑦ は，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が初項 $a_2-3a_1=(a_1+b_1)-3a_1=-1$，公比 -1 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1}-3a_n=(-1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n \quad \cdots ⑨$$

また ⑧ は，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ が初項 $a_2+a_1=(a_1+b_1)+a_1=3$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1}+a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n \quad \cdots ⑩$$

⑩ − ⑨ より

$$4a_n=3^n-(-1)^n$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{\frac{3^n-(-1)^n}{4}} \qquad (答)$$

ここで

$$a_{n+1}=\frac{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}{4}$$

より，③ に代入して

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}{4}-\frac{3^n-(-1)^n}{4}\\&=\frac{1}{4}\left\{3\cdot3^n-(-1)\cdot(-1)^n-3^n+(-1)^n\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{2\cdot3^n+2\cdot(-1)^n\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{3^n+(-1)^n}{2}} \qquad (答)\end{aligned}$$

【3】(1) $(n+1)$ 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出すとき，赤球が奇数個となるのは

(i) n 個の袋から赤球を偶数個取り出し，$(n+1)$ 番目の袋から赤球を取り出す

(ii) n 個の袋から赤球を奇数個取り出し，$(n+1)$ 番目の袋から白球を取り出す

の 2 通りの場合がある．それぞれの確率を p_n で表すと

(i) のとき．

$$\frac{1}{10}(1-p_n)$$

(ii) のとき．

$$\frac{9}{10}p_n$$

であり，これらは排反であるから，p_{n+1} は

$$p_{n+1} = \frac{1}{10}(1-p_n) + \frac{9}{10}p_n = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{10}$$

〔証明終〕

(2) 漸化式

$$p_{n+1} = \frac{1}{10}(1-p_n) + \frac{9}{10}p_n = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{10} \quad \cdots (*)$$

を解く．方程式

$$x = \frac{4}{5}x + \frac{1}{10}$$

を解くと $x = \dfrac{1}{2}$．ゆえに $(*)$ は

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

と変形される．この式は数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ が初項 $p_1 - \dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{4}{5}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

ここで，p_1 は 1 個の袋から球を 1 個取り出してそれが赤球である確率だから

$$p_1 = \frac{1}{10}$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【4】(1)　最初の 1 歩で 1 段登ったときは，残りの階段は $(n-1)$ 段であり，このときの登り方の総数は残りの階段の登り方の総数に等しく，a_{n-1} 通りである．

また，最初の 1 歩で 2 段登ったときは，残りの階段は $(n-2)$ 段であり，このときの登り方の総数は残りの階段の登り方の総数に等しく，a_{n-2} 通りである．

n 段ある階段の登り方は，題意よりこの 2 通りだけであり，これらは互いに排反であるから

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

であり，1 段，2 段のときの登り方はそれぞれ

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

である．したがって

$$\boldsymbol{a_1 = 1,\ \ a_2 = 2,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geqq 1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_1 = 1$，$a_2 = 2$ を用いて，(1) の漸化式より a_n を順に調べると

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 = 3\\
a_4 &= a_3 + a_2 = 5\\
a_5 &= a_4 + a_3 = 8\\
a_6 &= a_5 + a_4 = 13\\
a_7 &= a_6 + a_5 = 21\\
a_8 &= a_7 + a_6 = 34\\
a_9 &= a_8 + a_7 = 55\\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 89\\
a_{11} &= a_{10} + a_9 = 144
\end{aligned}$$

したがって，11 段ある階段の登り方 a_{11} は

144 通り　　(答)

【5】与えられた条件は

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 3$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n & \cdots ② \end{cases}$$

である．

(1) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が条件

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta\,(a_n - \alpha b_n)$$

をみたすとすれば

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta b_n \quad \cdots (*)$$

① − ② × α より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_n &= (3a_n + b_n) - \alpha(2a_n + 4b_n) \\ &= (3 - 2\alpha)a_n + (1 - 4\alpha)b_n \quad \cdots (\#) \end{aligned}$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$3 - 2\alpha = \beta,\quad 1 - 4\alpha = -\alpha\beta$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して

$$2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = -1,\quad \frac{1}{2}$$

第 1 式とから，

$$(\alpha,\ \beta) = (-1,\ 5)\,,\quad \left(\frac{1}{2},\ 2\right)$$

よって与えられた漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = 5\,(a_n + b_n) & \cdots ③ \\ a_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots ④ \end{cases}$$

と変形される．

③ は，数列 $\{a_n + b_n\}$ が初項 $a_1 + b_1 = 4$，公比 5 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \quad \cdots ③'$$

また ④ は，数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 - \dfrac{1}{2}b_1 = -\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = -2^{n-2} \quad \cdots ④'$$

③$'$ + 2 × ④$'$ より

$$3a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$$
$$a_n = \boldsymbol{\frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

また ③$'$ − ④$'$ より

$$\frac{3}{2} b_n = 4 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-2}$$
$$b_n = \boldsymbol{\frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件

$$b_n > xa_n, \qquad (x \text{ は正整数})$$

$$\frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3} > x \cdot \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$
$$\frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}} > x \quad \left(\because \quad 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1} > 0\right)$$

ここで左辺の最小値を求める.

$$\frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}} = \frac{8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + 1}{4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 1} \quad \cdots (\flat)$$

ここで $t = \dfrac{5}{2}$ とおくと

$$(\flat) = \frac{8t^{n-1} + 1}{4t^{n-1} - 1}$$
$$= \frac{2\left(4t^{n-1} - 1\right) + 3}{4t^{n-1} - 1}$$
$$= 2 + \frac{3}{4t^{n-1} - 1} \quad \cdots (\natural)$$

$t = \dfrac{5}{2}$, $n \geqq 1$ より $4t^{n-1} - 1 > 0$. また t^{n-1} は単調増加であるから, $4t^{n-1} - 1$ は $n = 1$ のとき最小. すなわち

$$0 < \frac{3}{4t^{n-1} - 1} \leqq \frac{3}{4 - 1} = 1$$

ゆえに

$$2 < (\natural) = 2 + \frac{3}{4t^{n-1} - 1} \leqq 2 + 1 = 3$$

ゆえに求める正整数 x の最大値は

$$x = \mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ より，n を $n+1$ で置き換えて

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1} \\ &= \frac{\dfrac{9a_n+1}{a_n+9}-1}{\dfrac{9a_n+1}{a_n+9}+1} \\ &= \frac{9a_n+1-(a_n+9)}{9a_n+1+(a_n+9)} \\ &= \frac{8a_n-8}{10a_n+10} \\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1} = \frac{4}{5}b_n \end{aligned}$$

ゆえに数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1-1}{a_1+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{4}{5}$ の等比数列である.

〔証明終〕

また一般項は

$$b_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $$b_n = \frac{a_n-1}{a_n+1}$$

を a_n について解くと

$$\begin{aligned} (a_n+1)b_n &= a_n - 1 \\ a_nb_n + b_n &= a_n - 1 \\ (b_n-1)a_n &= -(b_n+1) \\ a_n &= -\frac{b_n+1}{b_n-1} \quad \left(\because \quad b_n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < 1\right) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}+1}{\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}-1} \\ &= -\frac{4^{n-1}+3\cdot5^{n-1}}{4^{n-1}-3\cdot5^{n-1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\cdot5^{n-1}+4^{n-1}}{3\cdot5^{n-1}-4^{n-1}}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) $$a_n = \frac{3\cdot5^{n-1}+4^{n-1}}{3\cdot5^{n-1}-4^{n-1}} < \frac{25}{24}$$

より

$$\begin{aligned} &24\left(3\cdot5^{n-1}+4^{n-1}\right) < 25\left(3\cdot5^{n-1}-4^{n-1}\right) \quad \left(\because 3\cdot5^{n-1}-4^{n-1} > 0\right) \\ &3\cdot5^{n-1} > 49\cdot4^{n-1} \\ &\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} > \frac{49}{3} \end{aligned}$$

両辺の常用対数をとると,

$$\log_{10}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} > \log_{10}\left(\frac{49}{3}\right) \quad \cdots (*)$$

ここで

$$\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$$

であるから

$$\begin{aligned}(*) \quad \Longleftrightarrow \quad (n-1)\left(\log_{10} 5 - 2\log_{10} 2\right) &> \log_{10} 49 - \log_{10} 3 \\ (n-1)\left(1 - 3\log_{10} 2\right) &> 2\log_{10} 7 - \log_{10} 3 \\ (n-1)\left(1 - 3\cdot 0.3010\right) &> 2\cdot 0.8451 - 0.4771 \\ 0.097(n-1) &> 1.2131 \\ n-1 &> \frac{1.2131}{0.097} = 12.50\cdots \\ n &> 13.50\cdots\end{aligned}$$

ゆえに求める n の最小値は

$n = \mathbf{14}$ 　　(答)

【7】(1) $(k-1)$ 回目から k 回目までの，A，B の容器内の食塩の量は，以下の表のようになる．

	A 内の食塩の量 [kg]		B 内の食塩の量 [kg]	
$(k-1)$ 回目の始め	(6L中)	$\dfrac{6a_{k-1}}{100}$	(4L中)	$\dfrac{4b_{k-1}}{100}$
A から B へ 1L移す	(5L中)	$\dfrac{5a_{k-1}}{100}$	(5L中)	$\dfrac{4b_{k-1}}{100}+\dfrac{a_{k-1}}{100}$
B から A へ 1L戻す	(6L中)	$\dfrac{5a_{k-1}}{100}+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4b_{k-1}}{100}+\dfrac{a_{k-1}}{100}\right)$	(4L中)	$\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{4b_{k-1}}{100}+\dfrac{a_{k-1}}{100}\right)$

k 回目の容器 A，B 内の食塩水の濃度がそれぞれ a_k %，b_k % であるから，

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{6}\left\{\frac{5a_{k-1}}{100}+\frac{1}{5}\left(\frac{4b_{k-1}}{100}+\frac{a_{k-1}}{100}\right)\right\}\times 100 \\ &= \frac{1}{15}(13a_{k-1}+2b_{k-1}) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{4b_{k-1}}{100}+\frac{a_{k-1}}{100}\right)\times 100 = \frac{1}{5}(a_{k-1}+4b_{k-1}) \quad \cdots ②$$

② − ① より，

$$b_k - a_k = \frac{2}{3}(b_{k-1}-a_{k-1})$$

ゆえに数列 $\{b_k - a_k\}$ は，初項 $b_0 - a_0 = b - a$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから，その一般項は

$$b_k - a_k = \boldsymbol{\left(\frac{2}{3}\right)^k (b-a)} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果より

$$b_k - a_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k (b-a) \quad \cdots ③$$

A，B 内の塩の量の合計は変わらないから，

$$6a_k + 4b_k = 6a + 4b \quad \cdots ④$$

③，④ を連立して

$$a_k = \boldsymbol{\frac{1}{5}\left\{3a+2b-2(b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}} \qquad \text{(答)}$$

$$b_k = \boldsymbol{\frac{1}{5}\left\{3a+2b+3(b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1)　条件をみたす n 本の直線 l_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ によって平面が a_n 個の部分に分けられているとする．

条件をみたす $n+1$ 本目の直線 l_{n+1} をひくと，l_{n+1} は各 l_k と 1 点で交わり，これらの交点によって l_{n+1} は $n+1$ 個の部分に分けられる．

さらにこの $n+1$ 個の部分は，それが含まれる平面を 2 つに分けるので，平面の数は $n+1$ 個増える．したがって，

$$a_{n+1}=a_n+n+1 \quad \cdots ①$$

ここで $a_1=2$ であるから

$$① \iff \quad a_{n+1}-a_n=n+1$$

とあわせて，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= 2+\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1) \\ &= \frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right) \end{aligned}$$

ここで

$$a_1=2=\frac{1}{2}\left(1^2+1+2\right)$$

であるから上式は $n=1$ のときも成立．ゆえに

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right)} \qquad (答)$$

(2)　条件をみたす n 本の直線 m_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のうち，m_n 以外の $n-1$ 本の直線について，どの 2 本も平行でないとして一般性を失わない．

このとき (1) の結果から，m_n をひく前の $n-1$ 本の直線によって，平面は a_{n-1} 個の部分に分けられている．

m_n をひくと，m_n は m_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のいずれか 1 本と平行であるから，m_k のうちの $n-2$ 本と交わり，これらの $n-2$ 個の交点により m_n は $n-1$ 本の部分に分けられる．

さらに，この $n-1$ 個の部分は，それが含まれる平面を 2 つに分けるので，平面の部分の数は $n-1$ 個増える．

したがって

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1}+n-1 \\ &= \frac{1}{2}\left\{(n-1)^2+(n-1)+2\right\}+n-1 \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{2}(n+1)} \qquad (答) \end{aligned}$$

【9】条件より

$$
\begin{aligned}
&0<c<1,\quad f(x)=-4x^3+3x^2,\\
&f_1(x)=f(x)+\int_0^c f(t)dt,\\
&f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)dt \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}
$$

(1) $a_n=\displaystyle\int_0^c f_{n-1}(t)dt$ とおく．ただし $f_0(x)=f(x)$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}&=\int_0^c f_n(t)dt\\
&=\int_0^c \{f(t)+a_n\}\,dt\\
&=\int_0^c \left(-4t^3+3t^2+a_n\right)dt\\
&=\left[-t^4+t^3+a_nt\right]_0^c\\
&=ca_n-c^4+c^3
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
a_1&=\int_0^c f(t)dt\\
&=\int_0^c \left(-4t^3+3t^2\right)dt\\
&=\left[-t^4+t^3\right]_0^c\\
&=-c^4+c^3
\end{aligned}
$$

ゆえに数列 $\{a_n\}$ は条件

$$a_{n+1}=ca_n-c^4+c^3 \quad \cdots(*),\quad a_1=-c^4+c^3$$

をみたす.

方程式

$$x=cx-c^4+c^3$$

を解くと

$$
\begin{aligned}
(1-c)x&=c^3(1-c)\\
x&=c^3 \quad (\because \quad c \fallingdotseq 1)
\end{aligned}
$$

ゆえに $(*)$ は

$$a_{n+1}-c^3=c\left(a_n-c^3\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n-c^3\}$ が初項 $a_1-c^3=-c^4$，公比 c の等比数列であることを示す．ゆえに

$$
\begin{aligned}
&a_n-c^3=c^{n-1}\left(-c^4\right)\\
\therefore\quad &a_n=c^3-c^{n+3}\\
&\quad\;=c^3\left(1-c^n\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
f_n(x)&=f(x)+a_n\\
&=\boldsymbol{-4x^3+3x^2+c^3\left(1-c^n\right)} \quad (n \geqq 1) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

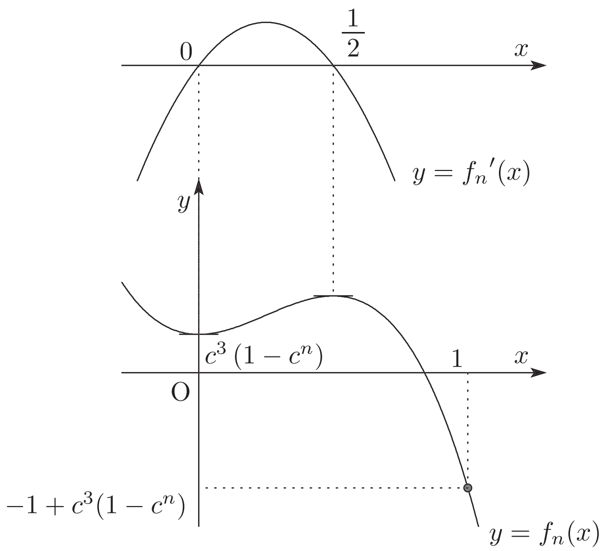
(2) (1) の結果より

$$f_n{}'(x) = -12x^2 + 6x = -6x(2x-1)$$

下図より $f_n(x)$ は $x=0$ で極小，$x = \dfrac{1}{2}$ で極大となる．ここで

$$f(0) = c^3(1-c^n) > 0 \quad (\because \quad 0 < c < 1)$$
$$f(1) = -1 + c^3(1-c^n) < 0 \quad \left(\because \quad 0 < c^3(1-c^n) < 1\right)$$

より $y = f_n(x)$ のグラフは下のようになり，方程式 $f_n(x) = 0$ は，$\dfrac{1}{2} < x < 1$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつことが示された．〔証明終〕



添削課題

【1】(1) 特性方程式は，$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$ であり，この解 2 と 3 を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ が，初項 $a_2-2a_1=3-2\cdot2=-1$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-2a_n=-1\cdot3^{n-1}\quad\cdots①$$

また，漸化式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=3-3\cdot2=-3$，公比 2 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=-3\cdot2^{n-1}\quad\cdots②$$

① − ② より

$$\boldsymbol{a_n=3\cdot2^{n-1}-3^{n-1}}\qquad(答)$$

(2) 特性方程式は，$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ であり，この重解 3 を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=6-3\cdot1=3$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$$

これは，$\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ が初項 $\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列をなすことを示すから

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}n$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=n\cdot3^{n-1}}\qquad(答)$$

【2】① より，$2b_n=a_{n+1}-3a_n$

この式で，n を $n+1$ として，$2b_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$

これらを ② × 2 に代入して

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=4a_n+6(a_{n+1}-3a_n)\qquad\therefore\ a_{n+2}-9a_{n+1}+14a_n=0$$

特性方程式 $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$ を解いて，$x=2,\ 7$ より，これを用いて漸化式を

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=7(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形すると，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項が

$$a_2-2a_1=(3a_1+2b_1)-2a_1=a_1+2b_1=1+2\cdot 0=1$$

公比 7 の等比数列だから

$$a_{n+1}-2a_n=7^{n-1}$$

両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{7^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}$$

ここで，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{2^n}&=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{7}{2}\right)^{k-1}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{7}{2}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{7^{n-1}}{2^n}\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2^{n+1}+7^{n-1}}{5}\quad(\text{これは, } n=1 \text{ のときも成立})$$

これを ① に代入して

$$b_n=\frac{2\cdot 7^{n-1}-2^n}{5}$$

よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{a_n=\dfrac{2^{n+1}+7^{n-1}}{5}}\\ \boldsymbol{b_n=\dfrac{2\cdot 7^{n-1}-2^n}{5}}\end{cases}\qquad(\text{答})$$

【3】(1) 条件式より

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=4a_n+2\quad\cdots ①\\S_{n+2}&=4a_{n+1}+2\quad\cdots ②\end{aligned}$$

② − ① より

$$\begin{aligned}S_{n+2}-S_{n+1}&=4(a_{n+1}-a_n)\\a_{n+2}&=4a_{n+1}-4a_n\qquad\therefore\ \boldsymbol{a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

(2) (1) の漸化式より，特性方程式は，$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$ であり，この重解 2 を用いて

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形できる．これより，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=$，公比 2 の等比数列であることを意味している．ここで

$$a_2-2a_1=(a_1+a_2)-3a_1=S_2-3a_1=(4a_1+2)-3a_1=a_1+2=3$$

であるから

$$\boldsymbol{a_{n+1}-2a_n=3\cdot 2^{n-1}\quad (n\geqq 1)}\qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}$$

これより，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{3}{4}$ の等差数列であることを意味している．したがって

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3n-1}{4}=\frac{3n-1}{2^2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) n 桁の正整数のうち最大のものは 10^n-1 であり，最小のものは 10^{n-1} であるから，n 桁の正整数の個数は

$$(10^n-1)-10^{n-1}+1=\boldsymbol{9\cdot 10^{n-1}}\qquad \text{(答)}$$

(2) n 桁の正整数のうち，1 を奇数個含むものの末尾に 0，2，3，4，5，6，7，8，9 をつけると $(n+1)$ 桁の正整数で 1 を奇数個含むものができる．また，n 桁の正整数のうち，1 を偶数個含むものの末尾に 1 をつけると $(n+1)$ 桁の正整数で 1 を奇数個含むものができる．よって，

$$a_{n+1}=9a_n+1\cdot(9\cdot 10^{n-1}-a_n)\qquad \therefore\ a_{n+1}=8a_n+9\cdot 10^{n-1}$$

〔証明終〕

(3) (2) で示した漸化式を 8^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{8^{n+1}}=\frac{a_n}{8^n}+\frac{9}{8^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{8^n}\right\}$ について，$a_1=1$ であることより，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{8^n}&=\frac{a_1}{8}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{9}{8^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{8}+\frac{9}{64}\cdot\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{5}{4}-1}\\&=\frac{2+9\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}-9}{16}=\frac{1}{16}\left\{9\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}-7\right\}\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つので

$$a_n=8^n\cdot\frac{1}{16}\left\{9\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}-7\right\}=2^{3n-4}\left(9\cdot\frac{5^{n-1}}{2^{2n-2}}-7\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=45\cdot 10^{n-2}-28\cdot 8^{n-2}}\qquad \text{(答)}$$

M1JS/M1J
高 1 選抜東大数学
高 1 東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	