M1T

本科 3 期 2 月度

解答

Z会東大進学教室

高 1 難関大数学

３０章　数列（４）

問題

【1】与えられた数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項 a_n は

$$a_n = 2n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(1) 第 n 群には n 個の項が含まれるので，第 1 群から第 9 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 45$$

よって第 10 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第 46 項．したがって

$$a_{46} = 2 \cdot 46 - 1 = \mathbf{91} \qquad \text{(答)}$$

(2) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

よって 第 n 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第

$$\frac{1}{2}n(n-1) + 1$$

項．ゆえに

$$a_{\frac{1}{2}n(n-1)+1} = 2 \cdot \left\{\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right\} - 1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1} \qquad \text{(答)}$$

これは $n = 1$ のときも成立する．

(3) 第 1 群から第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であるから，第 n 群の最後の数は，

$$a_{\frac{1}{2}n(n+1)} = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = n^2 + n - 1$$

である．

したがって 求める和は，初項 $n^2 - n + 1$，末項 $n^2 + n - 1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{n \cdot \{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)\}}{2} = \frac{n \cdot 2n^2}{2} = \boldsymbol{n^3} \qquad \text{(答)}$$

【2】与えられた数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項 a_n は

$$a_n = n$$

である．

(1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^{n-1} - 1$$

である．したがって第 n 群の最初の数は，第

$$\left(2^{n-1}-1\right) + 1 = 2^{n-1}$$

項．これは $n=1$ のときも成立する．また第 1 群から第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^{n}-1)}{2-1} = 2^{n} - 1$$

であるから，第 n 群の最後の数は，第

$$2^n - 1$$

項．ゆえに求める和は，初項 2^{n-1}，末項 2^n-1，項数 2^{n-1} の等差数列の和である．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{2^{n-1}\left\{2^{n-1}+(2^n-1)\right\}}{2} &= 2^{n-2}\left(2^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}-1\right)\\ &= 2^{n-2}\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)\\ &= \mathbf{3\cdot 2^{2n-3} - 2^{n-2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 1000 が第 n 群に含まれるとすると，

$$2^{n-1} \leqq 1000 \leqq 2^n - 1$$

ここで

$$2^9 = 512,\quad 2^{10} = 1024$$

より，この不等式をみたす正整数 n は，$n = 10$ である．すなわち 1000 は第 10 群に含まれる．また，第 10 群の最初の数は

$$2^{10-1} = 512$$

より

$$1000 - 512 + 1 = 489$$

ゆえに，1000 は

第 10 群の 489 番目　　(答)

の数である．

【3】問題の数列を，以下のような群に分ける．

$$1 \mid 2,\ 2 \mid 3,\ 3,\ 3 \mid 4, \cdots$$

このとき，第 n 群には n 個の数が含まれる．

(1) 第 n 群には n 個の正整数が含まれるので，2 桁の数が現れるのは第 10 群から第 99 群まで．その個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=10}^{99} k &= \sum_{k=1}^{99} k - \sum_{k=1}^{9} k \\ &= \frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10 \\ &= \frac{90}{2}(110-1) \\ &= \textbf{4905 個} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 初めて 100 が現れるのは，第 100 群の最初の項である．第 1 群から第 99 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{99} k = \frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100 = 4950$$

この次に初めて 100 が現れるから，最初の 100 は

第 4951 項　　(答)

(3) 第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり，第 $n-1$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である．第 10000 項が第 n 群に含まれるとすると，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}n(n-1) < 10000 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \\ \iff \quad & n(n-1) < 20000 \leqq n(n+1)\end{aligned}$$

ここで

$$140\cdot 141 = 19740,\quad 141\cdot 142 = 20022$$

より，これをみたす整数 n は $n = 141$．ゆえに第 10000 項は

141　　(答)

【4】与えられた数列を

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\quad \frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\quad \frac{2}{4},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\quad \cdots$$

のように群に分ける．このとき第 n 群には n 個の数が含まれ，第 n 群の第 k 項は

$$\frac{k}{n}\quad (1 \leqq k \leqq n)$$

となる．ただし n，k は正整数とする．

(1) $\dfrac{7}{15}$ は

第 15 群の第 7 項

である．第 14 群までの項数の総和は

$$\sum_{l=1}^{14} l = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15 = 105$$

より，$\dfrac{7}{15}$ は

第 $105+7=\mathbf{112}$ **項**　　(答)

(2) 第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{l=1}^{n} l = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり，第 $n-1$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{l=1}^{n-1} l = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である．第 200 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n(n-1) < 200 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \\ \Longleftrightarrow\quad & n(n-1) < 400 \leqq n(n+1) \end{aligned}$$

ここで

$$19\cdot 20 = 380,\quad 20\cdot 21 = 420$$

であるから，これをみたす整数 n は $n=20$．ゆえに a_{200} は第 20 群に含まれる．
また第 1 群から第 19 群までの項数の総和は

$$\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20 = 190$$

であるから，a_{200} は第 20 群の

第 $200-190=10$ 項

ゆえに

$$a_{200} = \boldsymbol{\frac{10}{20}}\qquad \text{(答)}$$

(3) 第 n 群に含まれる数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

ここで求める和は

(第 1 群から第 19 群までの数の総和) + (第 20 群の第 1 項から第 10 項までの和)

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{200} a_k &= \sum_{n=1}^{19} \frac{n+1}{2} + \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{20} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{19} n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{19} 1 + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 19 + \frac{11}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{429}{4}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】与えられた数列を

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\ \Big|\ \cdots$$

のように分ける．ここで，第 n 群には n 個の項が含まれる．

(1) 第 11 項は第 5 群の第 1 項であり，第 15 項は第 5 群の第 5 項である．ゆえに第 11 項から第 15 項までを列挙すると

$$\boldsymbol{\frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 第 m 群の数の，分母と分子の和は $m+1$ になる．また，各群の第 k 項の分母は k であるから，第 m 群の第 k 項は

$$\frac{m-k+1}{k}\ \ (1 \leqq k \leqq m)$$

と表される．ただし m，k は正整数とする．このとき $\dfrac{a}{b}$ は

第 $(a+b-1)$ 群

に含まれ，分母が b であるから，

第 $(a+b-1)$ 群の第 b 番目

の項である．よって，$a+b \geqq 3$ のとき

$$n = \sum_{k=1}^{a+b-2} k + b = \boldsymbol{\frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2)+b} \qquad \text{(答)}$$

これは $a+b=2$，すなわち $a=b=1$ のときも成立する．

【6】問題の数列を列挙すると

$$1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29 \mid 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 49,\ 53,\ 59 \mid 61,\ \cdots$$

これを上のように分ける．

(1) 30 以下の数はすべて第 1 群に含まれ，その個数は **8 個**　　(答).

(2) 各群には 8 個の数が含まれるから，第 n 群までの項数の総和は

$8n$ 項

ゆえに第 1000 項が第 n 群に含まれるとすると，

$$8(n-1) < 1000 \leqq 8n$$

これをみたす整数 n は，$n = 125$．ここで

$$8 \cdot 125 = 1000$$

より，1000 は第 125 群の最後の項である．ここで，問題の数列を群ごとに列挙すると

群 \ 項	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	7	11	13	17	19	23	29
2	31	37	41	43	47	49	53	59
3	61	67	71	73	77	79	83	89
4	91	$\cdots$						

となる．ここで第 1000 項は，第 125 群の最後の数である．各群の最後の数は，公差 30 の等差数列であるから，求める項は

$$29 + (125-1) \cdot 30 = \mathbf{3749} \qquad (答)$$

(3) 上の表で，第 1 群の総和は

$$(1+29) + (7+23) + (11+19) + (12+17) = 120$$

第 2 群の総和は

$$(31+59) + (37+53) + (41+49) + (43+47) = 360 = 120 + 240$$

第 3 群の総和は

$$(61+89) + (67+83) + (71+79) + (73+77) = 600 = 120 + 480$$

ゆえに第 n 群の総和は初項 120，公差 240 の等差数列であるから，第 n 群の総和を T_n とすると

$$T_n = 120 + (n-1) \cdot 240 = 240n - 120$$

よって初項から第 1000 項までの和を S とすると，S は第 1 群から第 125 群までの和であるから，

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{125} T_k \\
&= \frac{125}{2}\{120 + (240 \cdot 125 - 120)\} \\
&= \mathbf{1875000} \qquad (答)
\end{aligned}
$$

■別解

上の表で，第 n 行第 k 列の項を $a_{(n,\ k)}$ とおくと，第 k 列の数は，初項 $a_{(1,\ k)}$，公差 30 の等差数列である．ゆえに第 125 行第 k 列の項 $a_{(125,\ k)}$ は

$$
\begin{aligned}
a_{(125,\ k)} &= a_{(1,\ k)} + (125-1) \cdot 30 \\
&= a_{(1,\ k)} + 3720
\end{aligned}
$$

ゆえに第 k 列の第 1 行から第 125 行までの和 U_k は

$$
\begin{aligned}
U_k &= \frac{125}{2}\left\{a_{(1,\ k)} + \left(a_{(1,\ k)} + 3720\right)\right\} \\
&= 125\left(a_{(1,\ k)} + 1860\right)
\end{aligned}
$$

よって求める和 S は，

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{8} U_k \\
&= 125\sum_{k=1}^{8}\left(a_{(1,\ k)} + 1860\right) \\
&= 125\left(\sum_{k=1}^{8} a_{(1,\ k)} + 8 \cdot 1860\right) \\
&= 125\{(1 + 7 + \cdots + 29) + 14880\} \\
&= \mathbf{1875000} \qquad (答)
\end{aligned}
$$

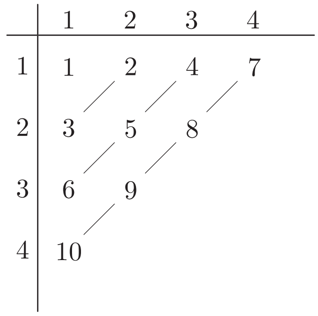
【7】与えられた数列を

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6 \mid 7,\ 8,\ 9,\ 10 \mid 11,\ \cdots$$

のように分ける．この数列の一般項を b_n とすると，

$$b_n = n$$

である．



(1) 第 1 行第 k 列の数は，第 k 群の最初の項である．第 k 群には k 個の項が含まれるから，第 $(k-1)$ 群までの項数の総和は，$k \geqq 2$ として

$$\sum_{l=1}^{k-1} l = \frac{1}{2}k(k-1)$$

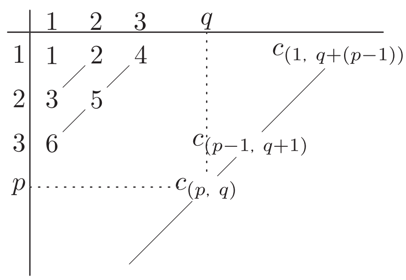
ゆえに第 k 群の最初の項は

$$b_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} = \frac{1}{2}k(k-1)+1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(k^2-k+2\right)} \qquad \text{(答)}$$

これは $k=1$ のときも成立する．

(2) 第 p 行第 q 列を $c_{(p,\ q)}$ とおく．

$c_{(p,\ q)}$ が属する群の項を $c_{(p,\ q)}$ からさかのぼって書き並べると



$$c_{(p,\ q)},\ c_{(p-1,\ q+1)},\ \cdots,\ c_{(1,\ q+(p-1))}$$

であるから，$c_{(p,\ q)}$ が属する群の最初の数は

$$c_{(1,\ p+q-1)}$$

であることがわかる．よって，$c_{(p,\ q)}$ は

第 $(p+q-1)$ 群の第 p 項

である．したがって，第 13 行第 18 列の数は

第 $13+18-1=30$ 群の第 13 項

である．(1) より，第 30 群の最初の数は

$$a_{30} = \frac{1}{2}\cdot 30 \cdot (30-1)+1 = 436$$

であるから，求める数は

$$436+(13-1) = \mathbf{448} \qquad \text{(答)}$$

(3) 2000 が第 k 群に含まれるとすると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}k(k-1) < 2000 \leqq \frac{1}{2}k(k+1) \\ \iff \quad & k(k-1) < 4000 \leqq k(k+1) \end{aligned}$$

ここで

$$62 \cdot 63 = 3906, \quad 63 \cdot 64 = 4032$$

より，この不等式をみたす整数 k は，$k = 63$．よって，2000 は第 63 群の数である．

また，第 63 群の最初の数は,

$$\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 62 + 1 = 1954$$

であり，$2000 - 1954 + 1 = 47$ より，2000 は第 63 群の第 47 項である．ゆえに

$$2000 = c_{(p,\ q)}$$

であるとすると,

$$\begin{cases} p + q - 1 = 63 \\ p = 47 \end{cases}$$

これを解いて

$$p = 47, \quad q = 17$$

したがって，2000 は

第 47 行第 17 列　　(答)

の数である．

添削課題

【1】(1) もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2n - 1$$

$n-1$ 番目のカッコまでの項数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$$

であるから，n 番目のカッコ内の最初の項は

第 2^{n-1} 項

より

$$a_{2^{n-1}} = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = \mathbf{2^n - 1} \qquad (答)$$

また，n 番目のカッコ内の最後の項は

第 $2^n - 1$ 項

より

$$a_{2^n-1} = 2(2^n - 1) - 1 = \mathbf{2^{n+1} - 3} \qquad (答)$$

(2) n 番目のカッコ内は

初項 $2^n - 1$，末項 $2^{n+1} - 3$，項数 2^{n-1} の等差数列

であるから，その和は

$$\begin{aligned} \frac{2^{n-1}}{2} \cdot \left\{(2^n - 1) + (2^{n+1} - 3)\right\} &= 2^{n-2} \cdot (3 \cdot 2^n - 4) \\ &= \mathbf{3 \cdot 2^{2n-2} - 2^n} \qquad (答) \end{aligned}$$

【2】 $\dfrac{1}{2} \Bigm| \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3} \Bigm| \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4} \Bigm| \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5} \Bigm| \cdots$

のように区切り，それぞれ，第 1 群，第 2 群，$\cdots$ とする．

(1) 第 n 群の最後の項までの項数は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{(項)}$$

ここで，第 100 項が第 n 群の数であるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 100 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

この不等式をみたす自然数は，$n = 14$ であるから

第 100 項は第 14 群の数である

第 13 群までの項数は

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91 \quad \text{(項)}$$

であるから

$$100 - 91 = 9 \quad \text{(番目)}$$

より

第 100 項は第 14 群の 9 番目の数である

したがって

第 100 項は，$\boldsymbol{\dfrac{9}{15}}$ (答)

(2) $\dfrac{19}{23}$ は第 22 群の 19 番目の数であるから，第 21 群までの項数は

$$\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 22 = 231 \quad \text{(項)}$$

したがって，$\dfrac{19}{23}$ は

$$231 + 19 = 250$$

より

第 250 項 (答)

【3】(1) カッコのくくりを第 1 群，第 2 群，$\cdots$ とすると，第 k 群の和は

$$1+2+\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$$

したがって

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)\\&=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n\\&=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}S_1&=n\cdot 1\\S_2&=(n-1)\cdot 2\\S_3&=(n-2)\cdot 2^2\\&\ \ \vdots\\S_n&=1\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

したがって，S は各項が (等差数列) $\times$ (等比数列) の形であるから，等比数列の公比 2 をかけあわせたものとの差を考えて

$$\begin{array}{rlllll}S= & n\cdot 1+(n-1)\cdot 2 & +(n-2)\cdot 2^2+\cdots+1\cdot 2^{n-1} & \\ -)\ 2S= & \qquad\qquad\quad n\cdot 2 & +(n-1)\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}+1\cdot 2^n \\ \hline -S= & n \qquad\qquad\quad -2 & -2^2- \qquad \cdots-2^{n-1}-2^n\end{array}$$

したがって

$$\begin{aligned}S&=-n+(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+2^n)\\&=-n+\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}\\&=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

３１章　数列（５）

問題

【1】(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 5，公差 -4 の等差数列であるから，一般項 a_n は

$$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-4) = \boldsymbol{-4n+9} \qquad \text{(答)}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 -5 の等比数列であるから，一般項 a_n は

$$a_n = \boldsymbol{2\cdot(-5)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + 4n - 1$ より

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 1$$

よって $\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 1$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1) \\
&= 2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}1 \\
&= 2 + 4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\
&= 2n^2 - 3n + 3
\end{aligned}$$

上式で $n = 1$ とすると

$$2\cdot1^2 - 3\cdot1 + 3 = 2 = a_1$$

より成立．ゆえに

$$a_n = \boldsymbol{2n^2 - 3n + 3} \qquad \text{(答)}$$

(4) $a_{n+1} = a_n + 3^n$ より

$$a_{n+1} - a_n = 3^n$$

よって，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は

$$a_{n+1} - a_n = 3^n$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}3^k \\
&= 2 + \frac{3\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1} \\
&= \frac{3^n+1}{2}
\end{aligned}$$

上式で $n=1$ とすると

$$\frac{3+1}{2}=2=a_1$$

より成立．ゆえに，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{3^n+1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $2a_{n+1}=a_n-2$ より

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1$$

ここで方程式

$$x=\frac{1}{2}x-1$$

を解くと $x=-2$．ゆえに与えられた漸化式は

$$a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$$

と変形できる．上式は，数列 $\{a_n+2\}$ が初項 $a_1+2=1+2=3$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n+2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2}\qquad(\text{答})$$

(2) $a_{n+1}=-2a_n+3$ より，方程式

$$x=-2x+3$$

を解くと $x=1$．ゆえに与えられた漸化式は

$$a_{n+1}-1=-2(a_n-1)$$

と変形できる．上式は，数列 $\{a_n-1\}$ が初項 $a_1-1=2-1=1$，公比 -2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n-1=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{(-2)^{n-1}+1}\qquad(\text{答})$$

(3) 与えられた漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで

$$b_n=\frac{a_n}{2^n}$$

とおくと上式は

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}\qquad\cdots(*)$$

ここで方程式 $x=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ を解いて $x=-1$．ゆえに $(*)$ は

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

と変形される．この式は，数列 $\{b_n+1\}$ が初項 $b_1+1=\frac{a_1}{2}+1=\frac{3}{2}$，公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$b_n+1=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}-1$$

$$\therefore\quad a_n=2^n\cdot b_n=\boldsymbol{3^n-2^n}\qquad(\text{答})$$

(4) 漸化式より明らかに $a_n \fallingdotseq 0$．漸化式の両辺の逆数をとって

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{3a_n+2}{a_n} \\ \therefore \quad \frac{1}{a_{n+1}} &= 2\cdot\frac{1}{a_n}+3 \end{aligned}$$

ここで，方程式

$$x = 2x+3$$

を解くと $x=-3$．ゆえに与えられた漸化式は

$$\frac{1}{a_{n+1}}+3 = 2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+3\right\}$ が初項 $\dfrac{1}{a_1}+3=4$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n}+3 &= 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \\ \frac{1}{a_n} &= 2^{n+1}-3 \\ \therefore \quad a_n &= \boldsymbol{\frac{1}{2^{n+1}-3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(5) 両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{n+1} &= \frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)} \\ \iff \quad \frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n} &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

この式は，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ の階差数列の一般項が

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

であることを示す．よって $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 2-\frac{1}{n} \end{aligned}$$

ここで $n=1$ のとき

$$2-\frac{1}{1} = 1 = \frac{a_1}{1}$$

より成立．ゆえに $n \geqq 1$ のとき

$$a_n = n\left(2-\frac{1}{n}\right) = \boldsymbol{2n-1} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+2n-3 \quad \cdots ①$ が

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2\left(a_n+\alpha n+\beta\right)$$

と変形されたとすると，上式は

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n+\beta-\alpha \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$\alpha=2,\ \ \beta-\alpha=-3$$

これを解いて

$$\alpha=2,\ \ \beta=-1$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1}+2(n+1)-1=2\left(a_n+2n-1\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n+2n-1\}$ が初項 $a_1+2\cdot1-1=3$，公比 2 の等比数列であることを示す．すなわち

$$a_n+2n-1=3\cdot2^{n-1}$$
$$\therefore \quad a_n=\boldsymbol{3\cdot2^{n-1}-2n+1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+n \quad \cdots ①$ が

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\frac{1}{2}\left(a_n+\alpha n+\beta\right)$$

と変形されたとすると，上式は

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}\alpha n-\alpha-\frac{1}{2}\beta \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$-\frac{1}{2}\alpha=1,\ \ -\alpha-\frac{1}{2}\beta=0$$

これを解いて

$$\alpha=-2,\ \ \beta=4$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1}-2(n+1)+4=\frac{1}{2}\left(a_n-2n+4\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n-2n+4\}$ が初項 $a_1-2\cdot1+4=3$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．すなわち

$$a_n-2n+4=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \quad a_n=\boldsymbol{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2n-4} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 与えられた関係式

$$S_n = 1 - a_n \quad \cdots ①$$

① において，n を $n+1$ で置き換えて

$$S_{n+1} = 1 - a_{n+1} \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n$$
$$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \cdots ③$$

また，① で $n = 1$ とすると

$$S_1 = a_1 = 1 - a_1$$
$$\therefore \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

これと ③ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \qquad (答)$$

(2) 与えられた関係式

$$S_n = 3S_{n-1} + 2n \quad \cdots ①$$

① において，n を $n+1$ で置き換えて

$$S_{n+1} = 3S_n + 2(n+1) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+1} - S_n = 3(S_n - S_{n-1}) + 2$$
$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n \geqq 2) \quad \cdots ③$$

これが $n = 1$ においても成り立つかどうかを調べる．① で $n = 2$ とすると

$$S_2 = 3S_1 + 2 \cdot 2$$

ここで

$$S_1 = a_1 = 2, \quad S_2 = a_1 + a_2 = a_2 + 2$$

であるから

$$a_2 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2$$
$$\therefore \quad a_2 = 8$$

ゆえに ③ において

$$3a_1 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8 = a_2$$

よって $n = 1$ のときも成り立つ．ゆえに

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n \geqq 1)$$

である．方程式

$$x = 3x + 2$$

を解いて $x = -1$．これを用いて上式は

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

と変形できる．この式は，数列 $\{a_n + 1\}$ が初項 $a_1 + 1 = 3$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$
$$\therefore \quad a_n = \boldsymbol{3^n - 1} \qquad \text{(答)}$$

【5】与えられた漸化式 $2(n+1)a_{n+1}=na_n+(-1)^n$ で

$$b_n=na_n$$

とおくと,

$$2b_{n+1}=b_n+(-1)^n$$

両辺 $2\cdot(-1)^{n+1}$ で割って

$$\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=\frac{1}{2\cdot(-1)}\cdot\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{1}{2\cdot(-1)}$$

$$\therefore\quad \frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=-\frac{1}{2}\frac{b_n}{(-1)^n}-\frac{1}{2}$$

ここで方程式

$$x=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

を解くと $x=-\dfrac{1}{3}$. ゆえに上式は

$$\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{1}{3}\right\}$$

と変形される. この式は, 数列 $\left\{\dfrac{b_n}{(-1)^n}+\dfrac{1}{3}\right\}$ が初項

$$\frac{b_1}{(-1)^1}+\frac{1}{3}=-b_1+\frac{1}{3}=-1\cdot a_1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3},$$

公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であることを示す. ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{1}{3}&=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ \frac{b_n}{(-1)^n}&=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right\}\\ b_n&=(-1)^n\cdot\frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right\}\\ &=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(-1)^n\right\}\end{aligned}$$

よって

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{3n}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(-1)^n\right\}}\qquad\text{(答)}$$

【6】(1) 与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+2n^2-n+1 \quad \cdots①$ が，

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=2\left(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)$$

と変形されたとすれば，

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n^2+(-2\alpha+\beta)\,n-\alpha-\beta+\gamma \quad \cdots②$$

①，② の右辺を比較して，

$$\alpha=2,\quad -2\alpha+\beta=-1,\quad -\alpha-\beta+\gamma=1$$

これを解いて

$$\alpha=2,\quad \beta=3,\quad \gamma=6$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1}+2(n+1)^2+3(n+1)+6=2\left(a_n+2n^2+3n+6\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n+2n^2+3n+6\}$ が初項 $a_1+2\cdot1^2+3\cdot1+6=11$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n+2n^2+3n+6=11\cdot2^{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{11\cdot2^{n-1}-2n^2-3n-6} \qquad (答)$$

(2) 与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+n^2-n \quad \cdots①$ が

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=2\left(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)$$

と変形されたとすると，

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n^2+(-2\alpha+\beta)\,n-\alpha-\beta+\gamma \quad \cdots②$$

となる．①，② の右辺を比較して

$$\alpha=1,\quad -2\alpha+\beta=-1,\quad -\alpha-\beta+\gamma=0$$

これを解いて

$$\alpha=1,\quad \beta=1,\quad \gamma=2$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1}+(n+1)^2+(n+1)+2=2\left(a_n+n^2+n+2\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{a_n+n^2+n+2\right\}$ が初項 $a_1+1^2+1+2=8$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n+n^2+n+2=8\cdot2^{n-1}=2^{n+2}$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{2^{n+2}-n^2-n-2} \qquad (答)$$

【7】(1) 条件より

$$S_{n+1} - 3S_n = n^2 \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ として

$$S_n - 3S_{n-1} = (n-1)^2 \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$\begin{aligned}(S_{n+1} - S_n) - 3(S_n - S_{n-1}) &= n^2 - (n-1)^2 \\ a_{n+1} - 3a_n &= 2n - 1 \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

ここで $n = 1$ とすると $S_1 = a_1 = 0$ であり，また ① から

$$\begin{aligned}S_2 - 3S_1 &= 1^2 \\ a_1 + a_2 - 3a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1\end{aligned}$$

上式 $(*)$ において，$n = 1$ のときもこれを満たす．ゆえに求める漸化式は

$$\boldsymbol{a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$a_1 = S_1 = 0$$

(1) で得られた漸化式

$$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1 \quad \cdots ①$$

が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3(a_n + \alpha n + \beta)$$

と変形されたとすれば

$$a_{n+1} = 3a_n + 2\alpha n - \alpha + 2\beta \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$2\alpha = 2,\ \ 2\beta - \alpha = -1$$

これを解いて

$$\alpha = 1,\ \ \beta = 0$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n)$$

この式は，数列 $\{a_n + n\}$ が初項 $a_1 + 1 = 1$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\begin{aligned}a_n + n &= 1 \cdot 3^{n-1} \\ a_n &= \boldsymbol{3^{n-1} - n} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【8】$a_1=1>0$ と，与えられた漸化式より明らかに $a_n>0$ である．
与えられた漸化式

$$a_{n+1}{}^3=4a_n{}^2$$

において，両辺に底 2 の対数をとると，

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1}{}^3&=\log_2\left(4a_n{}^2\right)\\ 3\log_2 a_{n+1}&=2\log_2 a_n+2\end{aligned}$$

ここで

$$b_n=\log_2 a_n$$

とおくと，

$$\begin{aligned}3b_{n+1}&=2b_n+2\\ b_{n+1}&=\frac{2}{3}b_n+\frac{2}{3}\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで方程式

$$x=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

を解くと，$x=2$．ゆえに ① は

$$b_{n+1}-2=\frac{2}{3}\left(b_n-2\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{b_n-2\}$ が初項 $b_1-2=\log_2 a_1-2=-2$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であることを示す．すなわち

$$\begin{aligned}b_n-2&=(-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ b_n&=2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ &=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\log_2 a_n=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{2^{2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}}\qquad\text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $\{a_n\}$ は，初項 1，公差 5 の等差数列だから

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 5 = \boldsymbol{5n-4} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\{a_n\}$ は，初項 -1，公比 2 の等比数列だから

$$a_n = -1\cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{-2^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + 2n$ より，$a_{n+1} - a_n = 2n$
よって，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ が，

$$a_{n+1} - a_n = 2n$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

これは，$n=1$ のとき，$1^2 - 1 + 1 = 1 = a_1$ より，$n=1$ のときも成り立つ．
したがって，

$$a_n = \boldsymbol{n^2 - n + 1} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $a_{n+1} = 3a_n - 4$ より，$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，
$\alpha = 2$ であるから，

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

これより，$\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$，公比 3 の等比数列だから

$$a_n - 2 = 1\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = \boldsymbol{3^{n-1} + 2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_{n+1} - 2a_n = 1$ より，$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，
$\alpha = -1$ であるから，

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

これより，$\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 4 + 1 = 5$，公比 2 の等比数列だから

$$a_n + 1 = 5\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore\ a_n = \boldsymbol{5\cdot 2^{n-1} - 1} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $a_{n+1}-a_n=2^n$ より，$n \geqq 2$ において

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^n-1$$

$a_1=1$ とあわせて，$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$ **(答)**

(2) $a_{n+1}=-a_n+2^n$ の辺々を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$ であり

$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}\cdot b_n+\frac{1}{2}$$
$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $b_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore\quad b_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

よって

$$a_n=2^nb_n=\frac{(-1)^{n-1}}{3}+\frac{2^n}{3}=\boldsymbol{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$ **(答)**

【4】

$$S_n = 2a_n + n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots ①$$

① において，n の代わりに $n+1$ とすると

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1) \quad (n \geqq 0) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2a_n + 1 \quad (n \geqq 1)$$

ここで，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \quad (n \geqq 1)$ であるから

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n \geqq 1)$$

ここで，$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ をみたす α を求めると，$\alpha = 1$
よって，

$$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1) \quad \cdots ③$$

また，① で $n = 1$ を代入すると，$S_1 = 2a_1 + 1$
ここで，$S_1 = a_1$ であるから

$$a_1 = 2a_1 + 1$$
$$a_1 = -1$$

これと ③ より，$\{a_n - 1\}$ は，初項 $a_1 - 1 = -2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n - 1 = (-2) \cdot 2^{n-1}$$
$$= -2^n$$
$$\therefore \ \boldsymbol{a_n = -2^n + 1} \qquad \text{(答)}$$

３２章　数列（６）

問題

【1】(1) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha+\beta)\,a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha+\beta = 1,\quad \alpha\beta = -6$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2 - x - 6 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = 3, -2$．ゆえに $(*)$ は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

と 2 通りに変形できる．

① は，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ が初項 $a_2 - 3a_1 = -1$，公比 -2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - 3a_n = -1 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} \quad \cdots ③$$

また ② は，数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ が初項 $a_2 + 2a_1 = 4$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} + 2a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots ④$$

④ − ③ より

$$5a_n = 4\cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}$$

$$a_n = \boldsymbol{\frac{4\cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\,(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\,a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha + \beta = 4,\quad \alpha\beta = 4$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = 2$．ゆえに $(*)$ は

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n) \quad \cdots ①$$

と変形される．

① は，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ が初項 $a_2 - 2a_1 = 2$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

両辺を 2^{n+1} で割って

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - 2 \cdot \frac{a_n}{2^{n+1}} &= \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n$$

したがって

$$a_n = 2^n \cdot \frac{1}{2}n = \boldsymbol{n \cdot 2^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\,(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\,a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha + \beta = 1,\quad \alpha\beta = -1$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$．これを α，β $(\alpha > \beta)$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① は，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ が初項 $a_2 - \alpha a_1 = 1 - \alpha$，公比 β の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (1-\alpha)\beta^{n-1} = \beta^n \quad \left(\because \quad 1 - \alpha = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \beta\right) \quad \cdots ③$$

② は，数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ が初項 $a_2 - \beta a_1 = 1 - \beta$，公比 α の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - \beta a_n = (1-\beta)\alpha^{n-1} = \alpha^n \quad \left(\because \quad 1 - \beta = 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \alpha\right) \quad \cdots ④$$

④ − ③ より

$$(\alpha - \beta)a_n = \alpha^n - \beta^n$$
$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\,(\alpha^n - \beta^n)$$

上式に

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

を代入して，求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 与えられた条件は

$$a_1 = 3,\quad b_1 = 1$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

これを繰り返し用いて

$$a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = \cdots = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 = 3 + 1 = 4$$

ゆえに

$$a_n + b_n = 4 \quad \cdots ③$$

① − ② より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$$

上式は，数列 $\{a_n - b_n\}$ が初項 $a_1 - b_1 = 2$，公比 3 の等比数列であることを示す．
ゆえに

$$a_n - b_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots ④$$

③ + ④ より

$$2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$$
$$\therefore \quad a_n = \mathbf{3^{n-1} + 2} \qquad \text{(答)}$$

また ③ − ④ より

$$2b_n = 4 - 2 \cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore \quad b_n = \mathbf{2 - 3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた条件は

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 1$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 4a_n + b_n & \cdots ② \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が条件

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta\,(a_n - \alpha b_n)$$

をみたすとすれば

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta b_n \quad \cdots (*)$$

また ① − ② × α より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_{n+1} &= (a_n + b_n) - \alpha(4a_n + b_n) \\ &= (1 - 4\alpha)a_n + (1 - \alpha)b_n \quad \cdots (\#) \end{aligned}$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\beta = 1 - 4\alpha, \quad -\alpha\beta = 1 - \alpha$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して

$$4\alpha^2 - 1 = 0$$
$$\therefore \quad \alpha = \pm\frac{1}{2}$$

第 1 式から

$$(\alpha,\ \beta) = \left(-\frac{1}{2},\ 3\right), \quad \left(\frac{1}{2},\ -1\right)$$

よって与えられた漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_{n+1} = 3\left(a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots ③ \\ a_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_{n+1} = -\left(a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots ④ \end{cases}$$

と変形できる．

③ は，数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 + \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{3}{2}$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{2}\cdot 3^{n-1} = \frac{3^n}{2} \quad \cdots ⑤$$

また ④ は，数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 - \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{1}{2}$，公比 -1 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}\cdot(-1)^{n-1} = -\frac{(-1)^n}{2} \quad \cdots ⑥$$

⑤ + ⑥ より

$$2a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$$
$$\therefore \quad a_n = \boldsymbol{\frac{3^n - (-1)^n}{4}} \qquad \text{(答)}$$

また ⑤ − ⑥ より

$$b_n = \boldsymbol{\frac{3^n + (-1)^n}{2}} \qquad \text{(答)}$$

■別解

与えられた条件より $\{a_n\}$ の 3 項間漸化式を導く．

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \cdots ①$$
$$b_{n+1} = 4a_n + b_n \quad \cdots ②$$

① より

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad \cdots ③$$

③ で n を $n+1$ でおきかえて

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} \quad \cdots ④$$

③，④ を ② に代入して

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4a_n + (a_{n+1} - a_n)$$
$$\therefore \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \quad \cdots ⑤$$

ここで ⑤ が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$$

と変形されたとすれば

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\,a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots ⑥$$

⑤ と ⑥ を比較して

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -3$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = 3,\ -1$．ゆえに ⑤ は

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -\left(a_{n+1} - 3a_n\right) \quad \cdots ⑦$$
$$a_{n+2} + a_{n+1} = 3\left(a_{n+1} + a_n\right) \quad \cdots ⑧$$

⑦ は，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ が初項 $a_2 - 3a_1 = (a_1 + b_1) - 3a_1 = -1$，公比 -1 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - 3a_n = (-1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^n \quad \cdots ⑨$$

また ⑧ は，数列 $\{a_{n+1} + a_n\}$ が初項 $a_2 + a_1 = (a_1 + b_1) + a_1 = 3$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad \cdots ⑩$$

⑩ − ⑨ より

$$4a_n = 3^n - (-1)^n$$
$$\therefore \quad a_n = \boldsymbol{\frac{3^n - (-1)^n}{4}} \qquad \text{(答)}$$

ここで

$$a_{n+1}=\frac{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}{4}$$

より，③ に代入して

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}{4}-\frac{3^n-(-1)^n}{4}\\&=\frac{1}{4}\{3\cdot 3^n-(-1)\cdot(-1)^n-3^n+(-1)^n\}\\&=\frac{1}{4}\{2\cdot 3^n+2\cdot(-1)^n\}\\&=\boldsymbol{\frac{3^n+(-1)^n}{2}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1) $(n+1)$ 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出すとき，赤球が奇数個となるのは

(i) n 個の袋から赤球を偶数個取り出し，$(n+1)$ 番目の袋から赤球を取り出す

(ii) n 個の袋から赤球を奇数個取り出し，$(n+1)$ 番目の袋から白球を取り出す

の 2 通りの場合がある．それぞれの確率を p_n で表すと

(i) のとき．

$$\frac{1}{10}(1-p_n)$$

(ii) のとき．

$$\frac{9}{10}p_n$$

であり，これらは排反であるから，p_{n+1} は

$$p_{n+1}=\frac{1}{10}(1-p_n)+\frac{9}{10}p_n=\frac{4}{5}p_n+\frac{1}{10}$$

［証明終］

(2) 漸化式

$$p_{n+1}=\frac{1}{10}(1-p_n)+\frac{9}{10}p_n=\frac{4}{5}p_n+\frac{1}{10}\qquad\cdots(*)$$

を解く．方程式

$$x=\frac{4}{5}x+\frac{1}{10}$$

を解くと $x=\dfrac{1}{2}$．ゆえに $(*)$ は

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{4}{5}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

と変形される．この式は数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ が初項 $p_1-\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{4}{5}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

ここで，p_1 は 1 個の袋から球を 1 個取り出してそれが赤球である確率だから

$$p_1=\frac{1}{10}$$

したがって

$$\begin{aligned}p_n&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【4】(1)　最初の 1 歩で 1 段登ったときは，残りの階段は $(n-1)$ 段であり，このときの登り方の総数は残りの階段の登り方の総数に等しく，a_{n-1} 通りである．

また，最初の 1 歩で 2 段登ったときは，残りの階段は $(n-2)$ 段であり，このときの登り方の総数は残りの階段の登り方の総数に等しく，a_{n-2} 通りである．

n 段ある階段の登り方は，題意よりこの 2 通りだけであり，これらは互いに排反であるから

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

であり，1 段，2 段のときの登り方はそれぞれ

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = 2$$

である．したがって

$$\boldsymbol{a_1 = 1,\ \ a_2 = 2,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geqq 1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_1 = 1$，$a_2 = 2$ を用いて，(1) の漸化式より a_n を順に調べると

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 = 3\\
a_4 &= a_3 + a_2 = 5\\
a_5 &= a_4 + a_3 = 8\\
a_6 &= a_5 + a_4 = 13\\
a_7 &= a_6 + a_5 = 21\\
a_8 &= a_7 + a_6 = 34\\
a_9 &= a_8 + a_7 = 55\\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 89\\
a_{11} &= a_{10} + a_9 = 144
\end{aligned}$$

したがって，11 段ある階段の登り方 a_{11} は

144 通り　　(答)

【5】与えられた条件は

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 3$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n & \cdots ② \end{cases}$$

である．

(1) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が条件

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta\,(a_n - \alpha b_n)$$

をみたすとすれば

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta b_n \quad \cdots (*)$$

① $-$ ② $\times\,\alpha$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_n &= (3a_n + b_n) - \alpha(2a_n + 4b_n) \\ &= (3 - 2\alpha)a_n + (1 - 4\alpha)b_n \quad \cdots (\#) \end{aligned}$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$3 - 2\alpha = \beta,\quad 1 - 4\alpha = -\alpha\beta$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して

$$2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = -1,\quad \frac{1}{2}$$

第 1 式から，

$$(\alpha,\ \beta) = (-1,\ 5),\quad \left(\frac{1}{2},\ 2\right)$$

よって与えられた漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = 5\,(a_n + b_n) & \cdots ③ \\ a_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots ④ \end{cases}$$

と変形される．

③ は，数列 $\{a_n + b_n\}$ が初項 $a_1 + b_1 = 4$，公比 5 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \quad \cdots ③'$$

また ④ は，数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 - \dfrac{1}{2}b_1 = -\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = -2^{n-2} \quad \cdots ④'$$

③$'+2\times$④$'$ より

$$3a_n = 4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$a_n = \boldsymbol{\frac{4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

また ③$'-$④$'$ より

$$\frac{3}{2}b_n = 4\cdot 5^{n-1} + 2^{n-2}$$

$$b_n = \boldsymbol{\frac{8\cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件

$$b_n > xa_n, \qquad (x \text{ は正整数})$$

$$\frac{8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1}}{3} > x\cdot\frac{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$$

$$\frac{8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}} > x \quad \left(\because \quad 4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}>0\right)$$

ここで左辺の最小値を求める.

$$\frac{8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}} = \frac{8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}+1}{4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1} \quad \cdots(\flat)$$

ここで $t=\dfrac{5}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}(\flat) &= \frac{8t^{n-1}+1}{4t^{n-1}-1}\\ &= \frac{2\left(4t^{n-1}-1\right)+3}{4t^{n-1}-1}\\ &= 2+\frac{3}{4t^{n-1}-1} \quad \cdots(\natural)\end{aligned}$$

$t=\dfrac{5}{2}$, $n \geqq 1$ より $4t^{n-1}-1>0$. また t^{n-1} は単調増加であるから, $4t^{n-1}-1$ は $n=1$ のとき最小. すなわち

$$0 < \frac{3}{4t^{n-1}-1} \leqq \frac{3}{4-1} = 1$$

ゆえに

$$2 < (\natural) = 2+\frac{3}{4t^{n-1}-1} \leqq 2+1=3$$

ゆえに求める正整数 x の最大値は

$$x=\mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ より，n を $n+1$ で置き換えて

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\dfrac{9a_n + 1}{a_n + 9} - 1}{\dfrac{9a_n + 1}{a_n + 9} + 1} \\
&= \frac{9a_n + 1 - (a_n + 9)}{9a_n + 1 + (a_n + 9)} \\
&= \frac{8a_n - 8}{10a_n + 10} \\
&= \frac{4}{5} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{4}{5} b_n
\end{aligned}
$$

ゆえに数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{4}{5}$ の等比数列である.

［証明終］

また一般項は

$$
b_n = \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)}
$$

(2)

$$
b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}
$$

を a_n について解くと

$$
\begin{aligned}
(a_n + 1) b_n &= a_n - 1 \\
a_n b_n + b_n &= a_n - 1 \\
(b_n - 1) a_n &= -(b_n + 1) \\
a_n &= -\frac{b_n + 1}{b_n - 1} \qquad \left(\because \quad b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < 1 \right)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
a_n &= -\frac{\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} + 1}{\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} - 1} \\
&= -\frac{4^{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1}}{4^{n-1} - 3 \cdot 5^{n-1}} \\
&= \boldsymbol{\frac{3 \cdot 5^{n-1} + 4^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3)
$$a_n = \frac{3 \cdot 5^{n-1} + 4^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}} < \frac{25}{24}$$

より

$$\begin{aligned}
&24\left(3 \cdot 5^{n-1} + 4^{n-1}\right) < 25\left(3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}\right) \quad \left(\because 3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1} > 0\right) \\
&3 \cdot 5^{n-1} > 49 \cdot 4^{n-1} \\
&\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} > \frac{49}{3}
\end{aligned}$$

両辺の常用対数をとると,

$$\log_{10}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} > \log_{10}\left(\frac{49}{3}\right) \quad \cdots (*)$$

ここで

$$\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$$

であるから

$$\begin{aligned}
(*) \quad \iff \quad (n-1)(\log_{10} 5 - 2\log_{10} 2) &> \log_{10} 49 - \log_{10} 3 \\
(n-1)(1 - 3\log_{10} 2) &> 2\log_{10} 7 - \log_{10} 3 \\
(n-1)(1 - 3 \cdot 0.3010) &> 2 \cdot 0.8451 - 0.4771 \\
0.097(n-1) &> 1.2131 \\
n - 1 &> \frac{1.2131}{0.097} = 12.50\cdots \\
n &> 13.50\cdots
\end{aligned}$$

ゆえに求める n の最小値は

$n = \mathbf{14}$ (答)

添削課題

【1】(1) 特性方程式は，$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$ であり，この解 2 と 3 を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ が，初項 $a_2-2a_1=3-2\cdot2=-1$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-2a_n=-1\cdot3^{n-1} \quad \cdots①$$

また，漸化式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=3-3\cdot2=-3$，公比 2 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=-3\cdot2^{n-1} \quad \cdots②$$

① − ② より

$$\boldsymbol{a_n=3\cdot2^{n-1}-3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 特性方程式は，$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ であり，この重解 3 を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=6-3\cdot1=3$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$$

これは，$\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ が初項 $\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列をなすことを示すから

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}n$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=n\cdot3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

【2】① より，$2b_n=a_{n+1}-3a_n$

上式で，n を $n+1$ として，$2b_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$

この 2 式を ② × 2 に代入して

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=4a_n+6(a_{n+1}-3a_n) \qquad \therefore\ a_{n+2}-9a_{n+1}+14a_n=0$$

特性方程式 $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$ を解いて，$x=2,\ 7$ より，この式を

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=7(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形すると，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項が

$$a_2-2a_1=(3a_1+2b_1)-2a_1=a_1+2b_1=1+2\cdot 0=1$$

公比 7 の等比数列だから

$$a_{n+1}-2a_n=7^{n-1}$$

両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{7^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}$$

ここで，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{2^n}&=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{7}{2}\right)^{k-1}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{7}{2}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{7^{n-1}}{2^n}\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2^{n+1}+7^{n-1}}{5}\qquad \text{(これは, } n=1 \text{ のときも成立)}$$

これを ① に代入して

$$b_n=\frac{2\cdot 7^{n-1}-2^n}{5}$$

よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{a_n=\dfrac{2^{n+1}+7^{n-1}}{5}}\\ \boldsymbol{b_n=\dfrac{2\cdot 7^{n-1}-2^n}{5}}\end{cases}\qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 条件式より

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=4a_n+2\quad\cdots①\\S_{n+2}&=4a_{n+1}+2\quad\cdots②\end{aligned}$$

② − ① より

$$\begin{aligned}S_{n+2}-S_{n+1}&=4(a_{n+1}-a_n)\\a_{n+2}&=4a_{n+1}-4a_n\qquad\therefore\ \boldsymbol{a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) (1) の漸化式より，特性方程式は，$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$ であり，この重解 2 を用いて

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

と変形できる．これより，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=$，公比 2 の等比数列であることを意味している．ここで

$$a_2-2a_1=(a_1+a_2)-3a_1=S_2-3a_1=(4a_1+2)-3a_1=a_1+2=3$$

であるから

$$\boldsymbol{a_{n+1}-2a_n=3\cdot 2^{n-1}\quad (n\geqq 1)}\qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}$$

これより，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{3}{4}$ の等差数列であることを意味している．したがって

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3n-1}{4}=\frac{3n-1}{2^2}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $n+1$ 桁の整数の各位の数の和が偶数になるのは

(i) 1 の位が 2 または 4 であり，上 n 桁の各位の数の和が偶数である．

(ii) 1 の位が 1 または 3 または 5 であり，上 n 桁の各位の数の和が奇数である．

のいずれかであり，これらは排反であるから，$n=1,\ 2,\cdots$ に対して

$$p_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{3}{5}(1-p_n)\quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}}\quad \text{(答)}$$

(2) (1) より

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ．よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は

初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列

であるから，求める p_n は

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\quad p_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{1}{2}}\quad \text{(答)}$$

M1T

高１難関大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	