M1JK

本科 3 期 2 月度

解答

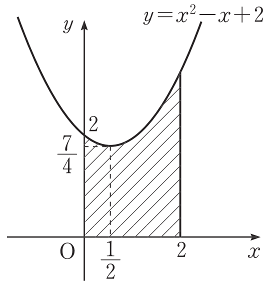
Ｚ会東大進学教室

高 1 東大数学 K

問題

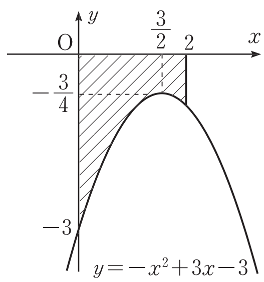
【1】(1) 右図より

$$\int_0^2 (x^2 - x + 2)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{8}{3} - 2 + 4\right)$$
$$= \mathbf{\frac{14}{3}} \qquad \text{(答)}$$



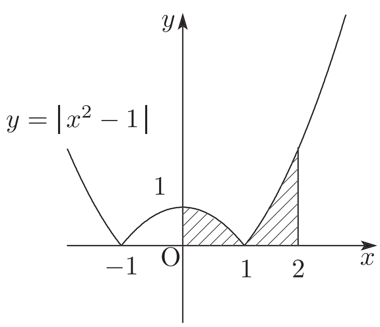
(2) 右図より

$$\int_0^2 \left\{0 - (-x^2 + 3x - 3)\right\} dx$$
$$= -\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 3x\right]_0^2$$
$$= -\left(-\frac{8}{3} + 6 - 6\right)$$
$$= \mathbf{\frac{8}{3}} \qquad \text{(答)}$$

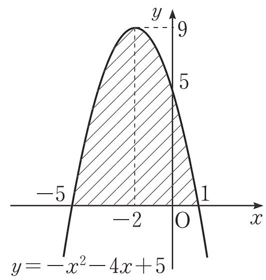


(3) 右図より

$$\int_0^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$$
$$= \left(-\frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$
$$= \mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$



【2】(1) 右図より

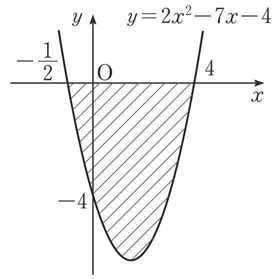


$$\int_{-5}^{1}(-x^2-4x+5)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-5}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)-\left(\frac{125}{3}-50-25\right)$$
$$=\mathbf{36}\qquad(答)$$

＜別解＞

$$\int_{-5}^{1}(-x^2-4x+5)dx=-\int_{-5}^{1}(x+5)(x-1)dx$$
$$=\frac{\{1-(-5)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{36}\qquad(答)$$

(2) 右図より

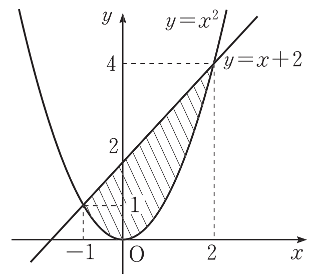


$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-4x\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$$
$$=-\left(\frac{128}{3}-56-16\right)+\left(-\frac{1}{12}-\frac{7}{8}+2\right)$$
$$=\mathbf{\frac{243}{8}}\qquad(答)$$

＜別解＞

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left\{4-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3$$
$$=\mathbf{\frac{243}{8}}\qquad(答)$$

【3】(1) 右図より

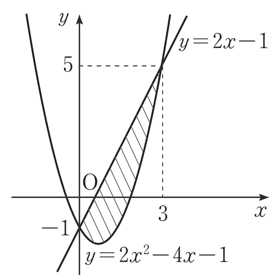


$$\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$ (答)

(2) 右図より

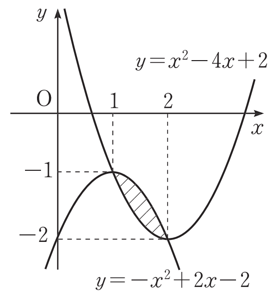


$$\int_{0}^{3}\{(2x-1)-(2x^2-4x-1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=(-18+27)$$
$$=\mathbf{9}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx=-2\int_{0}^{3}x(x-3)dx$$
$$=2\cdot\frac{(3-0)^3}{6}$$
$$=\mathbf{9}$$ (答)

(3) 右図より



$$\int_1^2 \{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$
$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)$$
$$=\mathbf{\frac{1}{3}} \qquad (答)$$

＜別解＞

$$\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx=-2\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$$
$$=2\cdot\frac{(2-1)^3}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{3}} \qquad (答)$$

コメント

多くの面積計算においては，公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

をうまく使うことにより，計算が大幅に簡単になる．

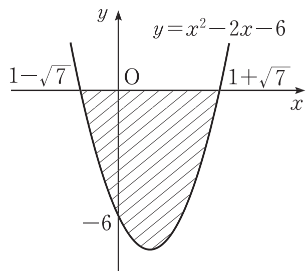
【4】(1) 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{7}$$

ゆえに右図より



$$\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}} \{0 - (x^2 - 2x - 6)\}dx$$
$$= -\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}} \left\{x - (1 - \sqrt{7})\right\}\left\{x - (1 + \sqrt{7})\right\}dx$$
$$= \frac{\left\{(1 + \sqrt{7}) - (1 - \sqrt{7})\right\}^3}{6}$$
$$= \boldsymbol{\frac{28\sqrt{7}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

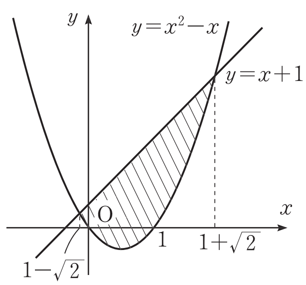
(2) 2 次方程式

$$x^2 - x = x + 1$$

を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

ゆえに右図より



$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \{(x + 1) - (x^2 - x)\}dx$$
$$= -\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left\{x - (1 - \sqrt{2})\right\}\left\{x - (1 + \sqrt{2})\right\}dx$$
$$= \frac{\left\{(1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})\right\}^3}{6} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

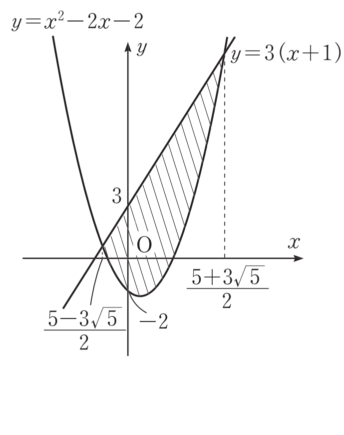
(3) 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 2 = 3(x + 1)$$

を解くと

$$x = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

ゆえに右図より



$$\int_{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}} \{3(x+1)-(x^2-2x-2)\}dx$$
$$= -\int_{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}} \left(x-\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}-\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{45\sqrt{5}}{2}} \qquad (答)$$

(4) 2 次方程式

$$x^2-2x-3=0$$

を解いて

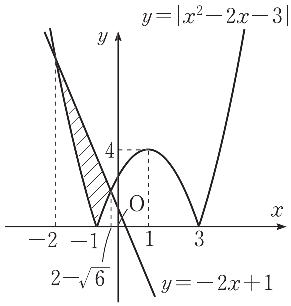
$$x=-1,\ 3$$

また

$$x^2-2x-3=-2x+1$$

を解いて

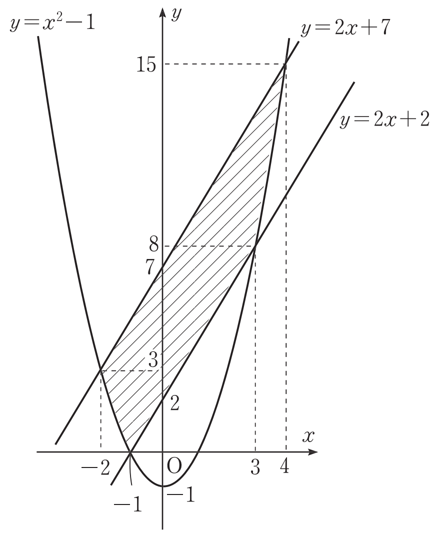
$$x=\pm 2$$



問題の曲線と直線は $x<0$ において，上図のように交わるから

$$\int_{-2}^{-1}\{(-2x+1)-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}}\{(-2x+1)-(-x^2+2x+3)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+4)dx+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}}(x^2-4x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-2x\right]_{-1}^{2-\sqrt{6}}$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{3}-4\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$
$$+\left[\left\{\frac{(2-\sqrt{6})^3}{3}-2(2-\sqrt{6})^2-2(2-\sqrt{6})\right\}-\left(-\frac{1}{3}-2+2\right)\right]$$
$$= \boldsymbol{\frac{12\sqrt{6}-22}{3}} \qquad (答)$$

【5】(1) 右図より



$$\int_{-2}^{-1}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$
$$+\int_{-1}^{3}\{(2x+7)-(2x+2)\}dx$$
$$+\int_{3}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+2x+8)dx$$
$$+\int_{-1}^{3}5dx+\int_{3}^{4}(-x^2+2x+8)dx$$
$$=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\Big]_{-2}^{-1}+\Big[5x\Big]_{-1}^{3}$$
$$+\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\Big]_{3}^{4}$$
$$=\left(\frac{1}{3}+1-8\right)-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)+15-(-5)$$
$$+\left(-\frac{64}{3}+16+32\right)-(-9+9+24)$$
$$=\mathbf{\frac{76}{3}}\qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

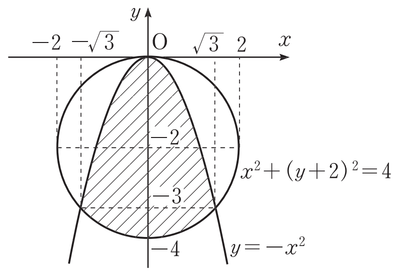
公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いると,

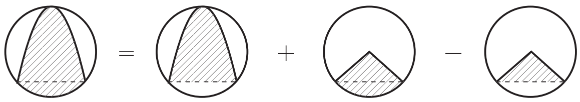
$$\int_{-2}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx-\int_{-1}^{3}\{(2x+2)-(x^2-1)\}dx$$
$$=-\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx+\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$
$$=\frac{\{4-(-2)\}^3}{6}-\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{76}{3}}\qquad \text{(答)}$$

(2) $y=-x^2$ と $x^2+(y+2)^2=4$ の交点の x 座標は

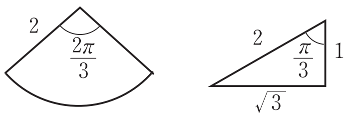


$$\begin{aligned} x^2+(-x^2+2)^2&=4\\ x^2+x^4-4x^2+4&=4\\ x^4-3x^2&=0\\ \therefore\ x&=0,\ \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

ゆえに



であり，



より，求める面積は

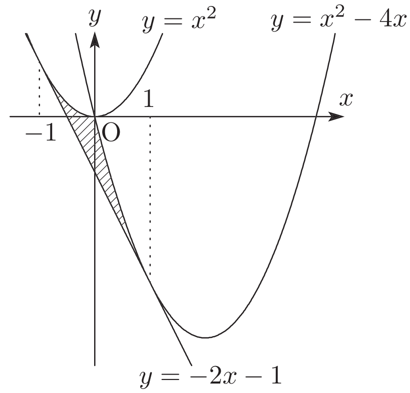
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{(-x^2)-(-3)\}\,dx+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\right)$$

$$=-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)dx+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right\}^3+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

$$=\boldsymbol{3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}$$ (答)

【6】



$$
\begin{aligned}
C &: \ y=x^2 \\
C' &: \ y=x^2-4x
\end{aligned}
$$

とする．

$y=x^2$ 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
& y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2 \\
\therefore\ & y=2\alpha x-\alpha^2
\end{aligned}
$$

また，$y=x^2-4x$ 上の点 $\left(\beta,\ \beta^2-4\beta\right)$ における

接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
& y=(2\beta-4)(x-\beta)+\beta^2-4\beta \\
\therefore\ & y=(2\beta-4)x-\beta^2
\end{aligned}
$$

これらが一致するから

$$
\begin{cases} 2\alpha=2\beta-4 & \cdots ① \\ \alpha^2=\beta^2 & \cdots ② \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=1 \end{cases}
$$

ゆえに l の方程式は

$\boldsymbol{y=-2x-1}$ 　　(答)

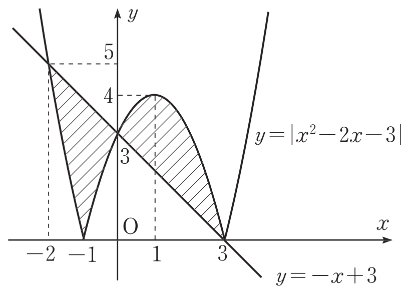
また，l と C，C' の接点の x 座標はそれぞれ $x=-1$，$x=1$ であるから，求める面積は右上図より

$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^{0}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{0}^{1}\{(x^2-4x)-(-2x-1)\}dx \\
&= \int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【7】

$$y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$$
$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \leqq -1,\ 3 \leqq x \text{ のとき}) \\ -x^2 + 2x + 3 & (-1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，これらを図示すると右のようになる．

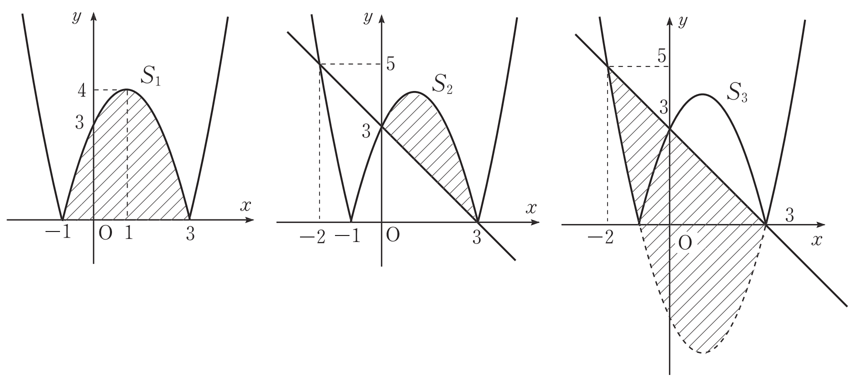


ここで求める面積を S，下図の 3 つの面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると

$$S_1 = \int_{-1}^{3} \{-(x+1)(x-3)\}dx$$
$$= \frac{\{3-(-1)\}^3}{6} = \frac{32}{3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} \{(-x^2+2x+3)-(-x+3)\}dx$$
$$= \int_{0}^{3} \{-x(x-3)\}dx$$
$$= \frac{(3-0)^3}{6} = \frac{9}{2}$$

$$S_3 = \int_{-2}^{3} \{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$= \int_{-2}^{3} \{-(x+2)(x-3)\}dx = \frac{\{3-(-2)\}^3}{6} = \frac{125}{6}$$



ゆえに求める面積は

$$S = S_3 - 2S_1 + 2S_2$$
$$= \frac{125}{6} - \frac{64}{3} + 9 = \boldsymbol{\frac{17}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】2 次方程式

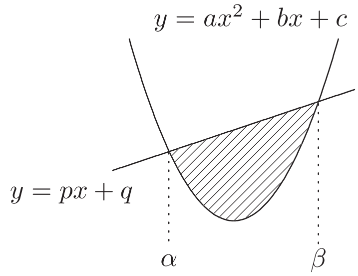
$$ax^2+bx+c=px+q \iff ax^2+(b-p)x+(c-q)=0$$

の 2 解が $x=\alpha,\ \beta \quad (\alpha<\beta)$ であるから

$$ax^2+(b-p)x+(c-q)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

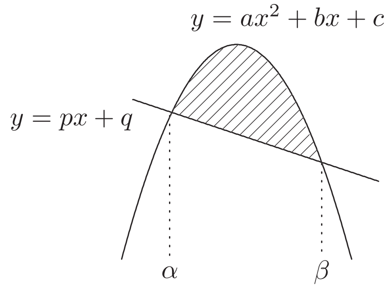
これを用いる.

(i) $a>0$ のとき



$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta \{(px+q)-(ax^2+bx+c)\}dx\\ =&-\int_\alpha^\beta \{ax^2+(b-p)x+(c-q)\}dx\\ =&-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\ =&a\cdot\left\{-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\right\}\\ =&a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\end{aligned}$$

(ii) $a<0$ のとき



$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta \{(ax^2+bx+c)-(px+q)\}dx\\ =&\int_\alpha^\beta \{ax^2+(b-p)x+(c-q)\}dx\\ =&\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\ =&-a\cdot\left\{-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\right\}\\ =&-a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\end{aligned}$$

以上より，求める面積は

$$\boldsymbol{\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3} \qquad \text{(答)}$$

【9】(1) $f(x)$ は 3 次式であるから $f'(x)$ は 2 次式.

$f(x)$ が $x=1,\ 3$ で極値をとるから,

$$f'(x) = a(x-1)(x-3) \quad \cdots (*)$$

とおける．また，$x=2$ における曲線 $y=f(x)$ の接線は

$$y = -3x + 8$$

より，$x=2$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(2)=-3$ である．$(*)$ より，

$$f'(2) = a(2-1)(2-3) = -3 \qquad \therefore\ a = 3$$

よって

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3) = 3x^2 - 12x + 9$$

ここで

$$f(x) = \int f'(x)dx = x^3 - 6x^2 + 9x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり，条件より $f(2)=2$ であるから上式に代入して

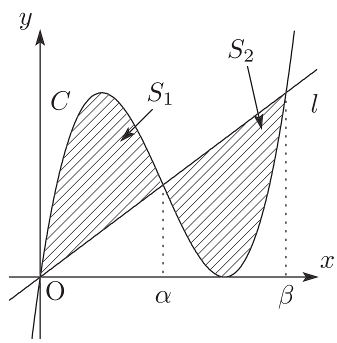
$$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 + C = 2 \qquad \therefore\ C = 0$$

ゆえに求める関数 $f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x} \qquad \text{(答)}$$

(2) $l\ :\ y = ax$ とおく.

$f(1) = 1-6+9 = 4$，$f(3) = 27-54+27 = 0$ より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．C と l との共有点のうち原点と異なるものの座標を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと



$$S_1 = \int_0^\alpha \{f(x) - ax\}dx$$
$$S_2 = \int_\alpha^\beta \{ax - f(x)\}dx$$

$S_1 = S_2$ より

$$\int_0^\alpha \{f(x)-ax\}dx - \int_\alpha^\beta \{ax - f(x)\}dx = 0$$
$$\int_0^\alpha \{f(x)-ax\}dx + \int_\alpha^\beta \{f(x) - ax\}dx = 0$$
$$\int_0^\beta \{f(x)-ax\}dx = 0$$
$$\int_0^\beta \{x^3 - 6x^2 + (9-a)x\}dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{1}{2}(9-a)x^2\right]_0^\beta=0$$
$$\frac{1}{4}\beta^4-2\beta^3+\frac{1}{2}(9-a)\beta^2=0$$

$\beta \fallingdotseq 0$ であるから上式は

$$\beta^2-8\beta+2(9-a)=0 \quad \cdots ①$$

ここで β は方程式 $f(x)-ax=0$，つまり

$$x^3-6x^2+(9-a)x=0$$

の実数解であるから

$$\beta^3-6\beta+(9-a)\beta=0$$
$$\beta^2-6\beta+(9-a)=0$$
$$\therefore\ 9-a=-\beta^2+6\beta \quad \cdots ②$$

② を ① に代入して

$$\beta^2-8\beta+2\left(-\beta^2+6\beta\right)=0 \qquad \therefore\ \beta=4 \quad (\beta \fallingdotseq 0)$$

② に代入して

$$9-a=-4^2+6\cdot 4 \qquad \therefore\ a=1$$

$f(x)-x=0$ を解くと

$$x^3-6x^2+8x=0$$
$$\therefore\ x=0,\ 2\ (=\alpha),\ 4(=\beta)$$

ゆえに求める面積は

$$\begin{aligned} S_1+S_2 &= 2\int_0^2\{x^3-6x^2+8x\}dx \\ &= 2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2 \\ &= 2(4-16+16) \\ &= \mathbf{8} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【10】(1) 与えられた関数を微分すると

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax$$
$$g'(x) = -2x + b$$

$y = f(x)$，$y = g(x)$ が $x = 1$ で接線を共有するから

$$\begin{cases} f(1) = g(1) & \cdots ① \\ f'(1) = g'(1) & \cdots ② \end{cases}$$

② より

$$-3 + 2a = -2 + b \iff b = 2a - 1 \quad \cdots ②'$$

このとき ① は成立．ここで 2 曲線は点 (1, 7) を通るから，②′ を用いて

$$g(1) = -1^2 + (2a-1)\cdot 1 + a = 7 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = 3} \qquad \text{(答)}$$

このとき ②′ より

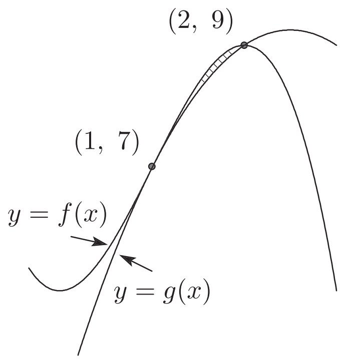
$$\boldsymbol{b} = 6 - 1 = \boldsymbol{5} \qquad \text{(答)}$$

(2) $g'(x) = -2x + 5$ より，$g'(1) = 3$
ゆえに求める接線の方程式は

$$y - 7 = 3(x - 1) \qquad \boldsymbol{y = 3x + 4} \qquad \text{(答)}$$

(3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$ より，$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$
ゆえに

$$\begin{cases} \textbf{極小値} & \boldsymbol{f(0) = 5} \\ \textbf{極大値} & \boldsymbol{f(2) = 9} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$



(4) 方程式 $f(x) = g(x)$ を解くと，$x = 1$ を重解にもつことに注意して

$$-x^3 + 3x^2 + 5 = -x^2 + 5x + 3$$
$$(x-1)^2(x-2) = 0$$
$$\therefore\ x = 1,\ 2$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \int_1^2 \{g(x) - f(x)\}dx &= \int_1^2 \{-(x-1)^2(x-2)\}dx \\
&= -\int_1^2 \{(x-1)^2(x-1-1)\}dx \\
&= -\int_1^2 \{(x-1)^3 - (x-1)^2\}dx \\
&= -\left[\frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 \\
&= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{12}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

３１章　数列（１）ー等差数列・等比数列ー

問題

【1】求める数列の初項を a，公差を d，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とおく．

(1) 一般項 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)\cdot 2 \\ &= 2n + a - 2 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$a_5 = 7$ より

$$\begin{aligned} a_5 = 2\cdot 5 + a - 2 = 7 \\ \therefore \quad a = -1 \end{aligned}$$

ゆえに $(*)$ より求める一般項は $a_n = \boldsymbol{2n-3}$ (答)

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n(-1+2n-3) \\ &= \boldsymbol{n(n-2)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 条件より

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot(a+a_5) \\ &= \frac{5}{2}(2a+4d) = 20 \\ &\therefore \quad a + 2d = 4 \quad \cdots ① \\ S_{10} &= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot(a+a_{10}) \\ &= 5(2a+9d) = -10 \\ &\therefore \quad 2a + 9d = -2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

① $\times 2 -$ ② より

$$-5d = 10 \qquad \therefore \quad d = -2$$

① に代入して

$$a = 4 - 2\cdot(-2) = 8$$

よって求める一般項は

$$a_n = 8 + (n-1)\cdot(-2) = \boldsymbol{-2n+10} \quad \text{(答)}$$

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\{8+(-2n+10)\} \\ &= \boldsymbol{n(9-n)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 条件より

$$a_5 = a + 4d = 7 \quad \cdots ①$$

また第 5 項から第 10 項までの和を T とすると，T は初項 a_5，末項 a_{10}，公差 d，項数 $10-5+1=6$ の等差数列の和であるから

$$T=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(a_5+a_{10})$$
$$=3(7+a+9d)=27 \quad (\because \quad a_5=7)$$
$$\therefore \quad a+9d=2 \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$-5d=5 \qquad \therefore \quad d=-1$$

① に代入して

$$a=7-4d=7-4\cdot(-1)=11$$

ゆえに求める一般項は

$$a_n=11+(n-1)\cdot(-1)=\boldsymbol{-n+12} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{11+(-n+12)\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(23-n)} \qquad \text{(答)}$$

【2】 求める数列の初項を a，公比を r，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とする.

(1) 条件より

$$S_5=\frac{a\left\{1-(-2)^5\right\}}{1-(-2)}=33$$

ゆえに

$$a(1+32)=3\cdot 33$$
$$\therefore \quad a=3$$

よって一般項は

$$a_n=\boldsymbol{3\cdot(-2)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

また和は

$$S_n=\frac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\boldsymbol{1-(-2)^n} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$a_3=a\cdot r^2=18 \quad \cdots ①$$
$$a_5=a\cdot r^4=162 \quad \cdots ②$$

② ÷ ① より

$$r^2=9 \qquad \therefore \quad r=\pm 3$$

① に代入して $a=2$.

(i) $r=3$ のとき．一般項は

$$a_n=\mathbf{2\cdot 3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n=\frac{2\left(3^n-1\right)}{3-1}=\mathbf{3^n-1} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $r=-3$ のとき．一般項は

$$a_n=\mathbf{2\cdot(-3)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n=\frac{2\left\{1-(-3)^n\right\}}{1-(-3)}=\mathbf{\frac{1}{2}\left\{1-(-3)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より

$$a_2=ar=-52 \quad \cdots ①$$

よって $r\fallingdotseq 0$．また $r=1$ とすると

$$S_3=3\cdot a_2=-156\fallingdotseq 169$$

ゆえに $r\fallingdotseq 1$．よって

$$S_3=\frac{a\left(1-r^3\right)}{1-r}=a\left(1+r+r^2\right)=169 \quad \cdots ②$$

① より $a=-\dfrac{52}{r}$．② に代入して

$$\begin{aligned}
-\frac{52}{r}\left(1+r+r^2\right)&=169\\
4r^2+4r+4&=-13r\\
4r^2+17r+4&=0\\
(r+4)(4r+1)&=0\\
r&=-4,\ -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

よって

(i) $r=-4$ のとき．

① より $a=13$．一般項は

$$a_n=\mathbf{13\cdot(-4)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n=\frac{13\left\{1-(-4)^n\right\}}{1-(-4)}=\mathbf{\frac{13}{5}\left\{1-(-4)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $r=-\dfrac{1}{4}$ のとき．

① より $a=208$．一般項は

$$a_n=\mathbf{208\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n=\frac{208\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\mathbf{\frac{832}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 3 つの数を $a-d$, a, $a+d$ とすると，これらの和が 21 であるから

$$(a-d)+a+(a+d)=21 \qquad \therefore \quad a=7$$

また平方の和が 179 であるから

$$\begin{aligned}(a-d)^2+a^2+(a+d)^2&=179\\ 3a^2+2d^2&=179\\ 2d^2&=179-3\cdot 7^2=32\\ d^2&=16\\ d&=\pm 4\end{aligned}$$

ゆえにいずれの場合も，求める 3 数は

3, 7, 11 (答)

(2) 3 つの数を $\frac{a}{r}$, a, ar とすると，積が -1728 であるから

$$\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar=-1728$$

$$a^3=-1728=-2^6\cdot 3^3$$

$$\therefore \quad a=-12$$

また和が 18 であるから

$$\frac{a}{r}+a+ar=18$$

$$-12\cdot\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=18$$

$$2r^2+5r+2=0 \qquad (2r+1)(r+2)=0$$

$$r=-\frac{1}{2},\ -2$$

ゆえにいずれの場合も，求める 3 数は

6, −12, 24 (答)

【4】1 から 100 までの自然数の和は，初項 1，公差 1，末項 100，項数 100 の等差数列の和であるから

$$\frac{100}{2}\times(1+100)=5050$$

(1) 4 で割り切れる数は

$$4\times 1,\ 4\times 2,\ 4\times 3,\ \cdots,\ 4\times 25$$

であり，その和は，初項 4，公差 4，末項 100，項数 25 の等差数列の和だから

$$\frac{25}{2}\times(4+100)=\mathbf{1300} \qquad (答)$$

(2) 6 で割り切れる数は

$$6\times 1,\ 6\times 2,\ 6\times 3,\ \cdots,\ 6\times 16$$

であり，その和は，初項 6，公差 6，末項 96，項数 16 の等差数列の和と考えて

$$\frac{16}{2}\times(6+96)=816$$

よって，6 で割り切れない数の和は

$$5050-816=\mathbf{4234} \qquad (答)$$

(3) 4 で割り切れる数，6 で割り切れる数にともに含まれる数は，

$$12\times 1,\ 12\times 2,\ 12\times 3,\ \cdots,\ 12\times 8$$

であり，その和は，初項 12，公差 12，末項 96，項数 8 の等差数列の和と考えて

$$\frac{8}{2}\times(12+96)=432$$

これと，(1)(2) の結果より，4 または 6 で割り切れる数の総和は

$$1300+816-432=1684$$

以上より，4 でも 6 でも割り切れない数の総和は

$$5050-1684=\mathbf{3366}\qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，条件より

$$a_{10}=a+9d=30\quad\cdots①$$

また

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(a_1+a_5)=220$$
$$\therefore\quad a+2d=44\quad\cdots②$$

① − ② より

$$7d=-14\qquad\therefore\quad d=-2$$

② に代入して

$$a=44-2\cdot(-2)=48$$

ゆえに求める一般項は

$$a_n=48+(n-1)\cdot(-2)=\boldsymbol{-2n+50}\qquad \text{(答)}$$

(2) 不等式

$$a_n\geqq 0$$

を解くと

$$-2n+50\geqq 0\qquad\therefore\quad n\leqq 25$$

ゆえに，公差 $d=-2<0$ であることを考えると

$$a_1>a_2>\cdots>a_{24}>a_{25}=0>a_{26}>\cdots$$

であるから，S_n が最大になるのは $n=24$ または $n=25$ のとき．求める最大値は

$$\begin{aligned}S_{24}=S_{25}&=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot(a_1+a_{25})\\&=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 48\\&=\mathbf{600}\qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) 求める和は，初項 48，公差 $2d=-4$，項数 50 の等差数列の和である．第 50 項は

$$48+(50-1)\cdot(-4)=-148$$

であるから，求める和を S_n とすると

$$S_n=\frac{50}{2}\cdot\{48+(-148)\}=\mathbf{-2500} \qquad (答)$$

【6】初項 3，公比 2 の等比数列の一般項は

$$3\cdot 2^{n-1}$$

であるから，

$$3\cdot 2^{n-1}>1500$$

となる最小の整数 n を求める．これを整理すると

$$2^{n-1}>500$$

となり，$2^8=256$，$2^9=512$ であるから

$$n-1\geqq 9 \qquad \therefore \quad n\geqq 10$$

よって，**第 10 項** ではじめて 1500 を超える．　(答)

【7】初項 2，公比 2 の等比数列の第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$$

であるから

$$2^{n+1}-2>510$$

をみたす最小の整数 n を求める．

$$\begin{aligned}2^{n+1}&>512=2^9\\ n+1&>9\\ n&>8\end{aligned}$$

よって，求める n は，

9　(答)

【8】毎年はじめの積み立て額を x 円，年利率を r $(0<r<1)$ とする．

それぞれの年の積み立て額に対して，n 年後の金額は表のようになる．

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1\text{年後} & 2\text{年後} & & (n-2)\text{年後} & (n-1)\text{年後} & n\text{年後} \\
\hline
x & x(1+r) & x(1+r)^2 & \cdots\cdots & x(1+r)^{n-2} & x(1+r)^{n-1} & x(1+r)^n \\
 & x & x(1+r) & \cdots\cdots & x(1+r)^{n-3} & x(1+r)^{n-2} & x(1+r)^{n-1} \\
 & & x & \cdots\cdots & x(1+r)^{n-4} & x(1+r)^{n-3} & x(1+r)^{n-2} \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & x & x(1+r) & x(1+r)^2 \\
 & & & & & x & x(1+r)
\end{array}
$$

n 年後の元利合計 S_n は，初項 $x(1+r)$，公比 $1+r$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{x(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1} \\
&= \frac{x(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}
\end{aligned}
$$

である．

ここで $r=0.04$，$n=10$ とすると 10 年後の元利合計額は

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{x(1+0.04)\{(1+0.04)^{10}-1\}}{(1+0.04)-1} \\
&= \frac{x\cdot 1.04\cdot(1.48-1)}{0.04} = 12.48x
\end{aligned}
$$

これを 100 万円としたいから

$$
\begin{aligned}
&12.48x = 1000000 \\
&\quad\therefore\ x = \frac{1000000}{12.48} = 80128.20\ldots
\end{aligned}
$$

したがって，必要な積み立て額は，

80129 円　　(答)

【9】 $a_n = pn+q \quad \cdots①$ より，n を $n+1$ で置き換えて

$$a_{n+1} = p(n+1)+q \quad \cdots②$$

② − ① より

$$a_{n+1}-a_n = p(n+1)+q-(pn+q) = p$$

p は定数であるから，数列 $\{a_n\}$ は公差 p の等差数列である．　　〔証明終〕

＜コメント＞

等差数列の一般項は，n の 1 次以下の整式になる．逆に，一般項が n の 1 次以下の整式で表される数列は等差数列となる．

【10】初項 1，公差 3 の等差数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項は

$$a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

また初項 1，公差 2 の等差数列を $\{b_n\}$ とすると，一般項は

$$b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

$\{a_n\}$ の第 n 項 a_n と，$\{b_n\}$ の第 m 項 b_m が等しいとすると

$$3n - 2 = 2m - 1$$
$$\therefore \quad 3n = 2m + 1$$

$2m+1$ は奇数より，n は奇数でなければならない．すなわち k を正の整数として

$$n = 2k - 1 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおける．
この k $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して，$\{a_n\}$ と $\{b_m\}$ の共通項 $\{c_k\}$ が決定される．
したがって，$\{c_k\}$ の一般項は

$$c_k = 3 \cdot (2k-1) - 2 = 6k - 5$$

よって

$$c_n = \boldsymbol{6n - 5} \qquad (\text{答})$$

＜別解＞

初項 0，公差 3 の等差数列を $\{A_n\}$ とすると，

$$\{A_n\}:\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ \cdots$$

初項 0，公差 2 の等差数列を $\{B_n\}$ とすると，

$$\{B_n\}:\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \cdots$$

その共通項を順に並べたものを $\{C_n\}$ とすると，

$$\{C_n\}:\ 0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ \cdots$$

$\{A_n\}$ は 3 の倍数の列，$\{B_n\}$ は 2 の倍数の列であるから，$\{C_n\}$ は 2 と 3 の最小公倍数である 6 の倍数の列である．それぞれの一般項は

$$A_n = 3n - 3,\quad B_n = 2n - 2,\quad C_n = 6n - 6$$

となる．
ここで，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ は，$\{A_n\}$，$\{B_n\}$，$\{C_n\}$ の各項にそれぞれ 1 ずつ加えた数列であるから，その一般項は

$$a_n = 3n - 2,\ b_n = 2n - 1,\ c_n = \boldsymbol{6n - 5} \qquad (\text{答})$$

【11】等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，条件 (i) より

$$\begin{aligned} |a_1| &= |a_{2k-1}| \\ |a| &= |a+(2k-1-1)d| \\ |a| &= |a+2(k-1)d| \end{aligned}$$

$$a+2(k-1)d = \pm a$$
$$\therefore \quad (k-1)d = 0,\ -a \quad \cdots ①$$

また条件 (ii) より，和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2k-1)(a_1+a_{2k-1}) \\ &= (2k-1)\{a+(k-1)d\} = 0 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

ここで

(I) $(k-1)d=0$ のとき.

これが k によらず成り立つから $d=0$. ② に代入して，$a=0$. ゆえに

$$a_k = 0+(k-1)\cdot 0 = 0$$

(II) $(k-1)d=-a$ のとき.

これは ② をみたすから

$$a_k = a+(k-1)d = a-a = 0$$

以上より，求める第 k 項は，$a_k = \mathbf{0}$ (答)

【12】(1) 条件より $a_{n+2}=a_n+4$. ゆえに

$$a_3 = a_1+4 = 2+4 = \mathbf{6} \quad (答)$$
$$a_4 = a_2+4 = 3+4 = \mathbf{7} \quad (答)$$
$$a_5 = a_3+4 = 6+4 = \mathbf{10} \quad (答)$$
$$a_6 = a_4+4 = 7+4 = \mathbf{11} \quad (答)$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の奇数番目の項は，初項 2，公差 4 の等差数列. 偶数番目の項は，初項 3，公差 4 の等差数列.

(i) n が奇数，すなわち $n=2k-1$ (k は正整数) のとき.

$$n=2k-1 \iff k=\frac{n+1}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= 2+(k-1)\cdot 4 \\ &= 4k-2 \\ &= 4\left(\frac{n+1}{2}\right)-2 = 2n \end{aligned}$$

(ii) n が偶数，すなわち $n=2k$ (k は正整数) のとき．

$$n=2k \iff k=\frac{n}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 3+(k-1)\cdot 4 \\ &= 4k-1 \\ &= 4\left(\frac{n}{2}\right)-1=2n-1 \end{aligned}$$

以上より，

$$a_n=\begin{cases} \boldsymbol{2n} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき}) \\ \boldsymbol{2n-1} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき}) \end{cases} \qquad (答)$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 n 項までの和を S_n，数列 $\{a_{2k-1}\}$ の，初項から第 $2k-1$ 項までの和を T_k，数列 $\{a_{2k}\}$ の，初項から第 $2k$ 項までの和を U_k とおく．

(i) n が奇数のとき，すなわち $n=2k-1$ のとき．

$$\begin{aligned} S_n &= T_k+U_{k-1} \\ &= \frac{1}{2}\cdot k\cdot\{2+(4k-2)\}+\frac{1}{2}\cdot(k-1)\cdot\{3+4(k-1)-1\} \\ &= 2k^2+(k-1)(2k-1) \\ &= 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)(n+1-1) \qquad \left(\because k=\frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(n^2+2n+1\right)+\frac{n^2-n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(2n^2+n+1\right) \end{aligned}$$

(ii) n が偶数のとき，すなわち $n=2k$ のとき．

$$\begin{aligned} S_n &= T_k+U_k \\ &= \frac{1}{2}\cdot k\cdot\{2+(4k-2)\}+\frac{1}{2}\cdot k\cdot(3+4k-1) \\ &= 2k^2+k(2k+1) \\ &= 2\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n}{2}(n+1) \qquad \left(\because k=\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2n^2+n\right) \\ &= \frac{1}{2}n(2n+1) \end{aligned}$$

以上より，求める和は

$$S_n=\begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(2n^2+n+1\right)} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき}) \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}n\left(2n+1\right)} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき}) \end{cases} \qquad (答)$$

３２章　数列（２）ー和の記号$\sum$ー

問題

【1】(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_{k+1} = \boldsymbol{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}$ (答)

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} = \boldsymbol{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9}$ (答)

(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} a_k = \boldsymbol{a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}$ (答)

(4)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_{k+1} - a_k) &= (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_4} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_5} - \cancel{a_4}) + (a_6 - \cancel{a_5}) \\ &= \boldsymbol{-a_1 + a_6} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= \boldsymbol{n^2} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3k(2k-1) &= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(4n+2-3) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)(4n-1)} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^3 - k) &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n+2)} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = \boldsymbol{2(2^n - 1)} \quad \text{(答)}$$

(5)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2^k}{4^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=\mathbf{2-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\boldsymbol{n}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}}}\qquad\text{(答)}$$

(6)
$$\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{5}\left(k^2+2k+1\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$$
$$=\frac{1}{6}\cdot5\cdot6\cdot11+2\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot6+5$$
$$=\mathbf{90}\qquad\text{(答)}$$

＜別解＞

$l=k+1$ とおくと

k	1	$\longrightarrow$	5
l	2	$\longrightarrow$	6

より
$$\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2=\sum_{l=2}^{6}l^2$$
$$=\sum_{l=1}^{6}l^2-\sum_{l=1}^{1}l^2$$
$$=\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot13-1^2$$
$$=\mathbf{90}\qquad\text{(答)}$$

【3】(1)
$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)=(0+1)(0+2)+\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$$
$$=1\cdot2+\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$
$$=\frac{1}{6}\{12+n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)+12n\}$$
$$=\frac{1}{6}\{n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)+12(n+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+10n+12\right)$$
$$=\frac{1}{3}(n+1)\left(n^2+5n+6\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)}\qquad\text{(答)}$$

＜コメント＞

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ である.

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2&=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\&=\frac{1}{3}n\left(4n^2+6n+2-6n-6+3\right)\\&=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n^2}k&=\sum_{k=1}^{2n^2}k-\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{2}\cdot 2n^2\cdot\left(2n^2+1\right)-\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{2}n\left\{2n\left(2n^2+1\right)-(n+1)\right\}\\&=\frac{1}{2}n\left(4n^3+2n-n-1\right)\\&=\frac{1}{2}n\left(4n^3+n-1\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(2n-1)\left(2n^2+n+1\right)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)&=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}k&=\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)\\&=\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{l}m^3+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l}m^2+\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{l}m\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}l^2(l+1)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l(l+1)\\&=\frac{1}{24}l(l+1)\{l(l+1)+2(2l+1)+4\}\\&=\frac{1}{24}l(l+1)\left(l^2+5l+6\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{24}l(l+1)(l+2)(l+3)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

<コメント>

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}l(l+1)(l+2)(l+3)\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24}l(l+1)(l+2)(l+3)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} ki\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{i\left(\sum_{k=1}^{i} k\right)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\left\{i\cdot\frac{1}{2}i(i+1)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&= \frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}\\
&= \frac{1}{24}n(n+1)\left(3n^2+7n+2\right)\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【4】

$$S_n = 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1}$$

とおく.

(i) $x=1$ のとき.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n = n^2$$

(ii) $x \neq 1$ のとき.

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1}\\
-)\ xS_n &= \qquad x + 3x^2 + \cdots\cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n\\
\hline
(1-x)S_n &= 1 + 2(x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1}) - (2n-1)x^n\\
&= 1 + 2\cdot\frac{x\cdot(1-x^{n-1})}{1-x} - (2n-1)x^n\\
&= \frac{(1-x) + 2x(1-x^{n-1}) - (1-x)(2n-1)x^n}{1-x}\\
&= \frac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{1-x}\\
\therefore\ S_n &= \frac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

以上より，求める和は

$$S_n = \begin{cases} \boldsymbol{n^2} & \textbf{(}\boldsymbol{x = 1}\ \textbf{のとき)} \\ \dfrac{\boldsymbol{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}}{\boldsymbol{(1-x)^2}} & \textbf{(}\boldsymbol{x \fallingdotseq 1}\ \textbf{のとき)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【5】問題の数列の第 k 項は

$$(2k-1)\cdot(n-k+1)$$

と表される．項数は n であるから，求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot(n-k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\} \\ &= -2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n+3)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\cdot n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【6】(1) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(\text{第 } n \text{ 項})$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\} = \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 第 k 項は

$$\begin{aligned} &1\cdot10^{k-1}+1\cdot10^{k-2}+\cdots+1\cdot10^0 \\ &= \sum_{i=1}^{k}10^{i-1} \\ &= \frac{1\cdot(10^k-1)}{10-1} \\ &= \frac{10^k-1}{9} \end{aligned}$$

と表される．よって，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{9}&=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}1\\&=\frac{1}{9}\cdot\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1}-\frac{1}{9}n\\&=\boldsymbol{\frac{1}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)}\qquad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

【7】(1)

$$\begin{aligned}S_n&=1+(-2)+3+(-4)+5+(-6)+\cdots+(\text{第 }n\text{ 項})\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{array}{rl}S_n=&1+(-2)+3+(-4)+5+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n\\-)\ -S_n=&\qquad(-1)+2+(-3)+4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(n-1)+(-1)^n\cdot n\\\hline 2S_n=&\{1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}\}-(-1)^n\cdot n\end{array}$$

ここで

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}$$

は初項 1，公比 -1 の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから

$$\begin{aligned}2S_n&=\frac{1\cdot\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}-(-1)^n\cdot n\\&=\frac{1-(-1)^n}{2}-(-1)^n\cdot n\\&=\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2}\cdot(-1)^n\\\therefore\ S_n&=\boldsymbol{\frac{1}{4}-\frac{2n+1}{4}\cdot(-1)^n}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$S_n=1^2\cdot3^0+2^2\cdot3^1+3^2\cdot3^2+\cdots+n^2\cdot3^{n-1}$$

とおくと

$$\begin{array}{rl}S_n=&1^2\cdot3^0+2^2\cdot3^1+3^2\cdot3^2+4^2\cdot3^3+\cdots+n^2\cdot3^{n-1}\\-)\ 3S_n=&\qquad 1^2\cdot3^1+2^2\cdot3^2+3^2\cdot3^3+\cdots+(n-1)^2\cdot3^{n-1}+n^2\cdot3^n\\\hline -2S_n=&1^2\cdot3^0+(2^2-1^2)\cdot3^1+(3^2-2^2)\cdot3^2\\&\qquad+\cdots+\left\{n^2-(n-1)^2\right\}\cdot3^{n-1}-n^2\cdot3^n\\=&1\cdot3^0+3\cdot3^1+5\cdot3^2+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}-n^2\cdot3^n\\=&\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot3^{k-1}-n^2\cdot3^n\\=&\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n}k\cdot3^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}-n^2\cdot3^n\end{array}$$

ここで

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{k-1} = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$$

とおくと,

$$\begin{array}{rl} T_n &= 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} \\ -)\ 3T_n &= \qquad\quad 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n \\ \hline -2T_n &= 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + \cdots + 1 \cdot 3^{n-1} - n \cdot 3^n \\ &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{k - (k-1)\} \cdot 3^{k-1} - n \cdot 3^n \\ &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n \cdot 3^n \end{array}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} -2S_n &= -\left(\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n \cdot 3^n\right) - \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n^2 \cdot 3^n \\ &= -2\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - (n^2 - n) \cdot 3^n \\ &= -2 \cdot \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} - (n^2 - n) \cdot 3^n \\ &= -(n^2 - n + 1) \cdot 3^n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S_n = \boldsymbol{\frac{(n^2 - n + 1) \cdot 3^n - 1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】上から k 段目，左から第 i 項の数は

$$k \cdot i$$

であるから，k 段目にある n 個の数の和は

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot i = k \sum_{i=1}^{n} i = k \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

よって，1 段目から n 段目までの n^2 個の数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{2} n(n+1) &= \frac{1}{2} n(n+1) \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

＜コメント＞

左上から対角線上にある各項は，$k^2 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ の形で表される．

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & \cdots\cdots & 1 \cdot k & \cdots\cdots & 1 \cdot n \\
2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & \cdots\cdots & 2 \cdot k & \cdots\cdots & 2 \cdot n \\
3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & \cdots\cdots & 3 \cdot k & \cdots\cdots & 3 \cdot n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
k \cdot 1 & k \cdot 2 & k \cdot 3 & \cdots\cdots & k \cdot k & \cdots\cdots & k \cdot n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
n \cdot 1 & n \cdot 2 & n \cdot 3 & \cdots\cdots & n \cdot k & \cdots\cdots & n \cdot n
\end{array}$$

その k にしたがって放射状に広がるまとまりを考えると，k 番目 $(k \geqq 2)$ の和は

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \{k \cdot 1 + k \cdot 2 + k \cdot 3 + \cdots\cdots + k \cdot (k-1)\} + k \cdot k \\ & = 2k \sum_{i=1}^{k-1} i + k^2 \\ & = 2k \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2} + k^2 \\ & = (k^3 - k^2) + k^2 \\ & = k^3 \end{aligned}$$

となる．これは $k = 1$ でも成り立つので，求める和は,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boldsymbol{\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2} \qquad \text{(答)}$$

となる．

【9】 求める和は

$$\begin{aligned}
1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \cdots + 1\cdot n \\
+2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + 2\cdot n \\
+3\cdot 4 + \cdots + 3\cdot n \\
+\cdots \\
+(n-1)n
\end{aligned}$$

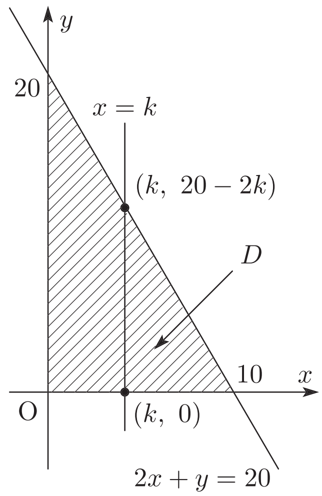
である．これを S とおく．ここで

$$(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)$$

を展開すると，異なる 2 つの数の積が 2 個ずつ，同じ数の積が 1 個ずつ現れるから，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left\{(1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n)-(1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+n\cdot n)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}n(n+1)\left\{3n(n+1)-2(2n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{24}n(n+1)\left(3n^2-n-2\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【10】(1) 問題の領域は図のようになる．この領域を D とおく．



D 内に含まれる格子点のうち，直線 $x=k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$ 上にあるものは

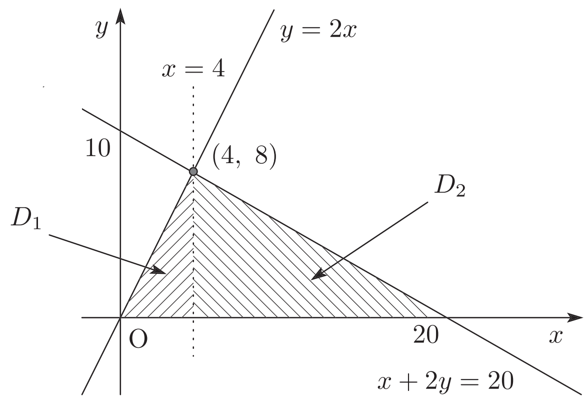
$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ -2k+20)$$

の $-2k+20+1=-2k+21$ 個.

ゆえに求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10}(-2k+21) &= 21+\sum_{k=1}^{10}(-2k+21)\\ &= 21-2\sum_{k=1}^{10}k+21\sum_{k=1}^{10}1\\ &= 21-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+21\cdot 10\\ &= \mathbf{121}\ \textbf{個} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 問題の領域は図のようになる.



この領域を D とし，領域 D を以下のように 2 つの領域 D_1，D_2 に分ける.

$$D_1:\ y \geqq 0,\ \ 0 \leqq x < 4,\ \ y \leqq 2x$$
$$D_2:\ y \geqq 0,\ \ 4 \leqq x \leqq 20,\ \ x+2y \leqq 20$$

また D_1，D_2 に含まれる格子点の個数をそれぞれ N_1，N_2 とする.

D_1 内の格子点のうち，直線 $x=k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 上にあるものは

$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ 2k)$$

の $2k+1$ 個．ゆえに

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \sum_{k=0}^{3}(2k+1)\\
&= 1+\sum_{k=1}^{3}(2k+1)\\
&= 1+2\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}1\\
&= 1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4+3=16 \text{ 個}
\end{aligned}
$$

また D_2 内の格子点のうち，直線 $y=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,8)$ 上にあるものは

$$(4,\ k),\ (5,\ k),\ (6,\ k),\ \cdots,\ (-2k+20,\ k)$$

の $(-2k+20)-4+1=-2k+17$ 個．ゆえに

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \sum_{k=0}^{8}(-2k+17)\\
&= 17+\sum_{k=1}^{8}(-2k+17)\\
&= 17-2\sum_{k=1}^{8}k+17\sum_{k=1}^{8}1\\
&= 17-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9+17\cdot 8=81 \text{ 個}
\end{aligned}
$$

よって求める個数は

$$N_1+N_2=16+81=\mathbf{97\ 個} \qquad \text{(答)}$$

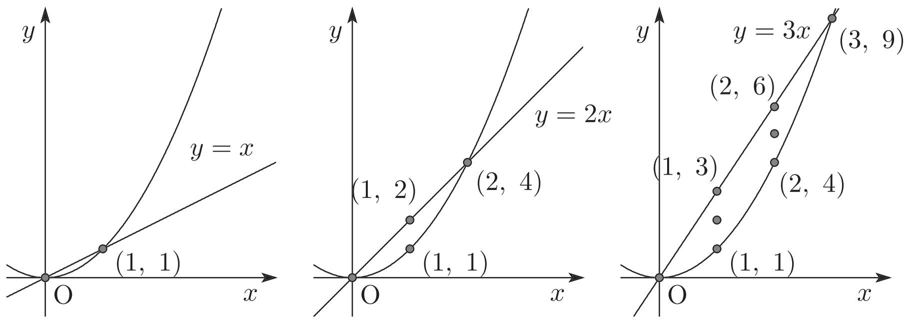
【11】 $C:\ y=x^2 \qquad l:\ y=mx$

とおく．C と l の交点の x 座標は

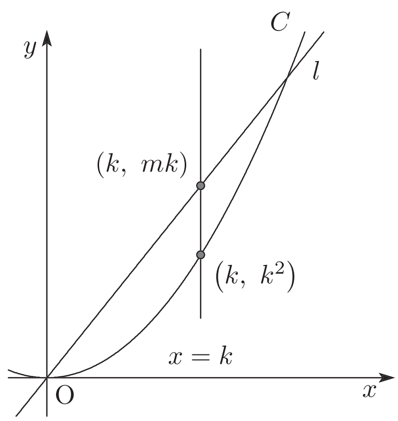
$$x^2=mx \iff x=0,\ m$$

(1) 図より

$d_1=\mathbf{2}$ (答)
$d_2=\mathbf{4}$ (答)
$d_3=\mathbf{8}$ (答)



(2) 図より，$\boldsymbol{mk-k^2+1}$ **個** (答)



(3) 求める格子点の個数は，(2) の結果の $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ にわたる和をとって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\left(mk-k^2+1\right)&=-\sum_{k=0}^{m}k^2+m\sum_{k=0}^{m}k+\sum_{k=0}^{m}1\\&=-\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+m\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+(m+1)\\&=\frac{1}{6}(m+1)\left\{-m(2m+1)+3m^2+6\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}(m+1)\left(m^2-m+6\right)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) 初項 1，公差 3 の等差数列だから，一般項 a_n は

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = \boldsymbol{3n-2} \qquad (答)$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(3k-2)} \qquad (答)$$

(2) 初項 2，公比 -3 の等比数列だから，一般項 a_n は

$$a_n = \boldsymbol{2 \cdot (-3)^{n-1}} \qquad (答)$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (-3)^{k-1}} \qquad (答)$$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{5} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k^2+1) &= (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1) + (4^2+1) + (5^2+1) \\ &= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 \\ &= \boldsymbol{60} \qquad (答)\end{aligned}$$

【2】(1) ① $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \boldsymbol{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}$ 　(答)

② $\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k = \boldsymbol{c\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$ 　(答)

(2) ① $\sum\limits_{k=1}^{n} c = \boldsymbol{cn}$ 　(答)

② $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(n+1)}$ 　(答)

③ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$ 　(答)

④ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2}$ 　(答)

⑤ $\sum\limits_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \boldsymbol{\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$ 　(答)

【3】(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k-2) &= 3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}2 \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n \\ &= \frac{3n^2-n}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n-1)} \qquad (答)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)} \qquad (答)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}k &= \sum_{k=1}^{2n}k-\sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= n(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n\{2(2n+1)-(n+1)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n+1)} \qquad (答)\end{aligned}$$

【4】一般項は，$a_n = n(n+1) = n^2+n$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)} \qquad (答)\end{aligned}$$

【5】求める和を S とおく.

$$S = 2 + (-4) + 6 + (-8) + 10 + \cdots + 2n \cdot (-1)^{n-1} \quad \cdots ①$$

① の両辺を -1 倍して

$$-S = (-2) + 4 + (-6) + 8 + \cdots + 2(n-1) \cdot (-1)^{n-1} + 2n \cdot (-1)^n \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$2S = 2 + (-2) + 2 + (-2) + 2 + \cdots + 2 \cdot (-1)^{n-1} - 2n \cdot (-1)^n$$

よって

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (-1)^{k-1} - 2n \cdot (-1)^n \\ &= 2 \cdot \frac{1 \cdot \{1 - (-1)^n\}}{1 - (-1)} - 2n \cdot (-1)^n \\ &= 1 - (-1)^n - 2n \cdot (-1)^n \\ &= 1 - (2n+1) \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

$$\therefore\ S = \boldsymbol{\frac{1 - (2n+1) \cdot (-1)^n}{2}} \qquad \text{(答)}$$

M1JK

高１東大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号		氏　名	