M1TK

本科 3 期 2 月度

解答

Z 会東大進学教室

# 高 1 難関大数学 K

## 問題

【1】(1) $$4xy+2x+6y+3=3$$

$$\therefore\quad (2x+3)(2y+1)=3$$

であるから

$$(2x+3,\ 2y+1)=(-3,\ -1),\ (-1,\ -3),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(-3,\ -1),\ (-2,\ -2),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 0)}\quad \textbf{(答)}$$

(2) $$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$$

$$\therefore\quad 2y+3x=xy \text{ すなわち } (x-2)(y-3)=6$$

$x\geqq 1,\ y\geqq 1$ より，$x-2\geqq -1,\ \ y-3\geqq -2$ であるから

$$(x-2,\ y-3)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 9),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (8,\ 4)}\quad \textbf{(答)}$$

(3) $$4xy-2x-2y+1=63$$

$$\therefore\quad (2x-1)(2y-1)=63$$

$x$ は素数より，$x\geqq 2$ であるから

$$2x-1\geqq 3$$

$$\therefore\quad (2x-1,\ 2y-1)=(3,\ 21),\ (7,\ 9),\ (9,\ 7),\ (21,\ 3),\ (63,\ 1)$$

このうち，$x$ が素数であるものは

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 11),\ (5,\ 4),\ (11,\ 2)}\quad \textbf{(答)}$$

(4) $$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=2$$

$$\therefore\quad y+3x=2xy \text{ すなわち } (2x-1)(2y-3)=3$$

$x\geqq y>0$ より，$2x-1\geqq 1,\ 2y-3\geqq -1,\ 2x-1>2y-3$ であるから

$$(2x-1,\ 2y-3)=(3,\ 1)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 2)}\quad \textbf{(答)}$$

【2】(1) $x=-1$ のとき

$$-13-5y=2\qquad \therefore\quad \boldsymbol{y=-3}\quad \textbf{(答)}$$

(2) $$13(x+1)=5(y+3)$$

13 と 5 は互いに素だから，$k$ を整数として

$$x+1=5k,\ y+3=13k$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(5k-1,\ 13k-3)\ (k \text{ は整数})}\quad \textbf{(答)}$$

【3】(1) $$21-5y^2=x^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad y=0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

$y=0$ のとき

$$x^2=21$$

これを満たす整数 $x$ は存在しない.

$y=\pm 1$ のとき

$$x^2=16 \qquad \therefore \quad x=\pm 4$$

$y=\pm 2$ のとき

$$x^2=1 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

以上より

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(\pm 4,\ \pm 1),\ (\pm 1,\ \pm 2)}$$ **(複号任意)　(答)**

(2) $$10-y^2=(x+2y)^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad y=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$$

$y=0$ のとき

$$x^2=10$$

これを満たす整数 $x$ は存在しない.

$y=\pm 1$ のとき

$$(x\pm 2)^2=9,\ y=\pm 1 \text{ (複号同順)}$$

$$\therefore \quad (x,\ y)=(-1,\ -1),\ (5,\ -1),\ (1,\ 1),\ (-5,\ 1)$$

$y=\pm 2$ のとき

$$(x\pm 4)^2=6$$

これを満たす整数 $x$ は存在しない.

$y=\pm 3$ のとき

$$(x\pm 6)^2=1,\ y=\pm 3 \text{ (複号同順)}$$

$$\therefore \quad (x,\ y)=(-7,\ 3),\ (-5,\ 3),\ (7,\ -3),\ (5,\ -3)$$

以上より

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(\pm 1,\ \pm 1),\ (\pm 5,\ \mp 1),\ (\pm 5,\ \mp 3),\ (\pm 7,\ \mp 3)}$$

**(複号同順)　(答)**

(3) $$8-\frac{7}{4}y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad y=0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

$y=0$ のとき

$$x^2=8$$

これを満たす整数 $x$ は存在しない.

$y=\pm 1$ のとき

$$x^2\mp x-6=0$$

$$\therefore \quad (x,\ y)=(3,\ 1),\ (-2,\ 1),\ (-3,\ -1),\ (2,\ -1)$$

$y=\pm 2$ のとき

$$x^2\mp 2x=0$$

$$\therefore \quad (x,\ y)=(0,\ \pm 2),\ (2,\ 2),\ (-2,\ -2)$$

以上より

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(\pm 2,\ \mp 1),\ (\pm 3,\ \pm 1),\ (0,\ \pm 2),\ (\pm 2,\ \pm 2)}$$

**(複号同順)　(答)**

【4】(1) $k=1$ のとき

$$11x+7y=1$$

$x=2,\ y=-3$ のとき，上式は成り立つので

$$11(x-2)+7(y+3)=0$$

11 と 7 は互いに素であるから，$m$ を整数として

$$x-2=7m,\ -y-3=11m$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=7m+2,\ y=-11m-3}\ (\boldsymbol{m}\ \textbf{は整数})\qquad \textbf{(答)}$$

(2) $k=2$ のとき

$$11x+7y=2=1+11\cdot 2+7\cdot(-3)$$

$$\therefore\quad 11(x-2)+7(y+3)=1$$

であるから，(1) より

$$x-2=7m+2,\ y+3=-11m-3$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=7m+4,\ y=-11m-6}\ (\boldsymbol{m}\ \textbf{は整数})\qquad \textbf{(答)}$$

(3) $x=2k,\ y=-3k$ は与式を満たすので

$$11(x-2k)+7(y+3k)=0$$

11 と 7 は互いに素であるから，$k$ が整数のとき，$m$ を整数として

$$x-2k=7m,\ -y-3k=11m$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=7m+2k,\ y=-11m-3k}\ (\boldsymbol{m,\ k}\ \textbf{は整数})\qquad \textbf{(答)}$$

【5】(1) $5x^2-2(6y+3)x+10y^2-4y+13=0\cdots\cdots$① を，$x$ の 2 次方程式とみて，判別式を $D$ とすると，整数解 $x$ をもつので

$$\frac{D}{4}=(6y+3)^2-5(10y^2-4y+13)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -14(y-2)^2\geqq 0 \text{ すなわち } y=2$$

①より

$$(x-3)^2=0\qquad \therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 2)}\qquad \textbf{(答)}$$

(2) $2x^2-(y+4)x+3y^2-5y-6=0$ を，$x$ の 2 次方程式とみて，判別式を $D$ とすると，整数解 $x$ をもつので

$$D=(y+4)^2-4\cdot 2(3y^2-5y-6)\geqq 0$$

$$\therefore\quad 23y^2-48y-64\leqq 0$$

$y>0$ に注意して

$$0<y\leqq\frac{24+\sqrt{2048}}{23}\qquad \therefore\quad y=1,\ 2,\ 3$$

(i) $y=1$ のとき

$$2x^2-5x-8=0\qquad \therefore\quad x=\frac{5\pm\sqrt{89}}{4}$$

$x$ は整数より，不適.

(ii) $y=2$ のとき

$$2x^2-6x-4=0\qquad \therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

$x$ は整数より，不適.

(iii) $y=3$ のとき

$$2x^2-7x+6=0 \qquad \therefore \quad x=2$$

(i) 〜 (iii) より

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 3)} \quad \textbf{(答)}$$

【6】(1) $$M=17x+3=13y+4 \ (x,\ y \text{ は整数})$$

と表せる．

$$17x+3=13y+4 \qquad \therefore \quad 17x-13y=1$$

について，$(x,\ y)=(-3,\ -4)$ はこの方程式を満たすので

$$17(x+3)=13(y+4)$$

17 と 13 は互いに素だから，$x+3=13k,\ y+4=17k$ ($k$ は整数) とおけて

$$M=17x+3=17(13k-3)+3=221k-48>0$$

$$\therefore \quad k>\frac{48}{221}$$

これを満たす最小の $k$ の値は 1 であるから

$$M=221-48=\mathbf{173} \quad \textbf{(答)}$$

(2) (1) を利用して

$$N=221k-48=11\ell+5 \quad (k,\ \ell \text{ は整数})$$

と表せる．

$$221k-48=11\ell+5 \qquad \therefore \quad 221k-11\ell=53$$

について，$(k,\ \ell)=(-2,\ -45)$ はこの方程式を満たすので

$$221(k+2)=11(\ell+45)$$

221 と 11 は互いに素だから，$k+2=11m,\ \ell+45=221m$ ($m$ は整数) とおけて

$$N=11(221m-45)+5=2431m-490>0$$

$$\therefore \quad m>\frac{490}{2431}$$

これを満たす最小の $m$ の値は 1 であるから

$$N=2431-490=\mathbf{1941} \quad \textbf{(答)}$$

【7】(1) (i) $a$ が最大辺のとき

$$24 = a + b + c \leqq 3a \qquad \therefore \quad a \geqq 8 \cdots\cdots ①$$

三角形の成立条件より

$$a < b + c = 24 - a \qquad \therefore \quad a < 12 \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$8 \leqq a < 12$$

これを満たす整数 $a$ は

$$a = 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

(ii) $a$ が最小辺のとき，$c$ を最大辺とすると

$$8 \leqq c = 24 - (a + b) \leqq 11 \qquad \therefore \quad 13 \leqq a + b \leqq 16$$

$b\,(\leqq c) \leqq 11$ より

$$a \geqq 2 \cdots\cdots ③$$

$a \leqq b$ より

$$2a \leqq a + b \leqq 16 \qquad \therefore \quad a \leqq 8 \cdots\cdots ④$$

③，④より

$$2 \leqq a \leqq 8$$

これを満たす整数 $a$ は

$$a = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

(i)，(ii) より

**最大値 11，最小値 2　(答)**

(2) $a \geqq b \geqq c$ のもとで $(a,\ b,\ c)$ の組を考えればよい．

(i) $a = 11$ のとき

$$b + c = 24 - 11 = 13$$

$c \leqq b \leqq 11$ より

$$13 = b + c \leqq 2b \qquad \therefore \quad \frac{13}{2} \leqq b \leqq 11$$

これを満たす自然数 $b$ は

$$b = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

$$\therefore \quad (b,\ c) = (7,\ 6),\ (8,\ 5),\ (9,\ 4),\ (10,\ 3),\ (11,\ 2) \qquad 5\text{ 組}$$

(ii) $a = 10$ のとき

$$b + c = 14$$

$c \leqq b \leqq 10$ より

$$14 \leqq 2b \qquad \therefore \quad 7 \leqq b \leqq 10$$

これを満たす自然数 $b$ は

$$b = 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

$$\therefore \quad (b,\ c) = (7,\ 7),\ (8,\ 6),\ (9,\ 5),\ (10,\ 4) \qquad 4\text{ 組}$$

(iii) $a = 9$ のとき

$$b + c = 15$$

$c \leqq b \leqq 9$ より

$$15 \leqq 2b \qquad \therefore \quad \frac{15}{2} \leqq b \leqq 9$$

これを満たす自然数 $b$ は

$$b = 8,\ 9$$

$$\therefore \quad (b,\ c) = (8,\ 7),\ (9,\ 6) \qquad 2\text{組}$$

(iv) $a = 8$ のとき

$$b + c = 16$$

$c \leqq b \leqq 8$ より

$$16 \leqq 2b$$

$$\therefore \quad 8 \leqq b \leqq 8 \text{ すなわち } (b,\ c) = (8,\ 8) \qquad 1\text{組}$$

(i) ～ (iv) より

$5 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{12}$ **(通り)**　　**(答)**

【8】(1)

$$(ab-1)(bc-1)(ca-1) = (abc)^2 - abc(a+b+c) + \{(ab+bc+ca) - 1\}$$

左辺と，右辺の第 1，2 項は $abc$ で割り切れるから，$ab + bc + ca - 1$ は $abc$ で割り切れる．　**(証明終)**

(2) (1) より

$$ab + bc + ca - 1 = kabc \ (k \text{ は正の整数})$$

とおける．$1 < a < b < c$ より，$ab + bc + ca - 1 < bc + bc + bc - 1 < 3bc$ だから

$$kabc < 3bc \qquad \therefore \quad (1 <)\, ak < 3 \text{ すなわち } ak = 2$$

$k$ は正の整数で，$a > 1$ なので

$$a = 2,\ k = 1$$

このとき，$2b + bc + 2c - 1 = 2bc$ だから

$$bc - 2b - 2c + 1 = 0 \qquad \therefore \quad (b-2)(c-2) = 3$$

$0 < b - 2 < c - 2$ だから

$$(b-2,\ c-2) = (1,\ 3) \qquad \therefore \quad b = 3,\ c = 5$$

以上より

$\boldsymbol{a = 2,\ \ b = 3,\ \ c = 5}$　　**(答)**

## 添削課題

【1】**(1)**

$$2x(y-3)+(y-3)=6$$

$$\therefore \quad (2x+1)(y-3)=6$$

$x$, $y$ は正の整数より，$2x+1 \geqq 3$, $y-3 \geqq -2$ であるから

$$(2x+1,\ y-3)=(3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

$$\therefore \quad (x,\ y)=(1,\ 5),\ \left(\frac{5}{2},\ 4\right)$$

よって

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 5)} \quad \textbf{(答)}$$

**(2)**

$$x(2y-1)+\frac{3}{2}(2y-1)=\frac{15}{2}$$

$$\therefore \quad (2x+3)(2y-1)=15$$

$x$, $y$ は正の整数より，$2x+3 \geqq 5$, $2y-1 \geqq 1$ であるから

$$(2x+3,\ 2y-1)=(5,\ 3),\ (15,\ 1)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 2),\ (6,\ 1)} \quad \textbf{(答)}$$

【2】$x \leqq y \leqq z$ より，$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{z} > 0$ であるから

$$3=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=\frac{6}{x}$$

$\therefore \quad x \leqq 2$ すなわち $x=1,\ 2$

(i) $x=1$ のとき

$$\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=2 \qquad \therefore \quad 2yz-3y-2z=0 \text{ すなわち } (y-1)(2z-3)=3$$

$y$, $z$ は正の整数より，$y-1 \geqq 0$, $2z-3 \geqq -1$ であるから

$$(y-1,\ 2z-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1) \qquad \therefore \quad (y,\ z)=(2,\ 3),\ (4,\ 2)$$

$y \leqq z$ より

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$$

(ii) $x=2$ のとき

$$\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{5}{2} \qquad \therefore \quad 5yz-6y-4z=0 \text{ すなわち } (5y-4)(5z-6)=24$$

$y$, $z$ は 2 以上の整数より，$5y-4 \geqq 6$, $5z-6 \geqq 4$ であるから

$$(5y-4,\ 5z-6)=(6,\ 4) \qquad \therefore \quad (y,\ z)=(2,\ 2)$$

これは $y \leqq z$ を満たすので

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 2)$$

(i), (ii) より

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2)} \quad \textbf{(答)}$$

【3】$(x,\ y)=(1,\ 0)$ のとき

$$2\cdot 1+3\cdot 0=2$$

が成り立つから，$2x+3y=2$ と辺々をひいて

$$2(x-1)+3y=0$$

2 と 3 は互いに素であるから，$y$ は 2 の倍数であり

$$y=2k\ (k \text{ は整数})$$

と書ける．このとき

$$2(x-1)+6k=0 \qquad \therefore \quad x=1-3k$$

であるから，求める整数の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(1-3k,\ 2k)\ (k \text{ は整数})} \qquad \textbf{(答)}$$

【4】**(1)** $m=-1,\ n=1$ とすると

$$14m+16n=2 \qquad \therefore \quad 2\in S$$

（証明終）

**(2)** 偶数全体の集合を $D$ とおく．

$$14m+16n=2(7m+8n)$$

$7m+8n$ は整数なので

$$S\subset D$$

また，$2\ell\in D$ に対して

$$\ell=-7\ell+8\ell \qquad \therefore \quad 2\ell=2(-7\ell+8\ell)=14\cdot(-\ell)+16\ell$$

$-\ell,\ \ell$ は整数なので

$$D\subset S$$

以上より

$$S=D$$

（証明終）

【5】**(1)**

$$2x^2+(2x-y)^2=9 \qquad \therefore \quad 9-2x^2=(2x-y)^2\geqq 0$$

$x$ は正の整数なので

$$x=1,\ 2$$

このうち，$9-2x^2$ が平方数となる場合を考えると

$$x=2,\ 2x-y=\pm 1 \qquad \therefore \quad x=2,\ y=3,\ 5$$

よって，条件を満たす正の整数 $x,\ y$ の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 3),\ (2,\ 5)} \qquad \textbf{(答)}$$

**(2)** $$(2x-5)y = 4x^2 - 12x + 11$$

$$\therefore \quad y = \frac{4x^2 - 12x + 11}{2x-5} = 2x - 1 + \frac{6}{2x-5}$$

$y$ は正の整数より，$\dfrac{6}{2x-5}$ は整数なので，$x$ が正の整数であることに注意して

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

(i) $x = 1$ のとき

$$y = -1 < 0 \quad \text{不適}$$

(ii) $x = 2$ のとき

$$y = -3 < 0 \quad \text{不適}$$

(iii) $x = 3$ のとき

$$y = 11$$

(iv) $x = 4$ のとき

$$y = 9$$

(i) ～ (iv) より

**$(x,\ y) = (3,\ 11),\ (4,\ 9)$ (答)**

## 問題

【1】(1) $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{4+1}{2}\right) = \left(\mathbf{-1,\ \dfrac{5}{2}}\right)$　　(答)

(2) $\left(\dfrac{1\times(-3)+2\times 1}{2+1}, \dfrac{1\times 4+2\times 1}{2+1}\right) = \left(\mathbf{-\dfrac{1}{3},\ 2}\right)$　　(答)

(3) $\left(\dfrac{-2\times(-3)+3\times 1}{3-2}, \dfrac{-2\times 4+3\times 1}{3-2}\right) = \mathbf{(9,\ -5)}$　　(答)

(4) $\left(\dfrac{-4\times(-3)+1\times 1}{1-4}, \dfrac{-4\times 4+1\times 1}{1-4}\right) = \left(\mathbf{-\dfrac{13}{3},\ 5}\right)$　　(答)

(5) T は AB を $1:2$ に内分する点だから

$$\mathrm{T}\left(\frac{-3\times 2+1\times 1}{1+2}, \frac{4\times 2+1\times 1}{1+2}\right) = \left(\mathbf{-\frac{5}{3}, 3}\right) \quad \text{(答)}$$

【2】$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ とおくと，それぞれの条件より，

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\ \frac{y_1+y_2}{2}=0$$
$$\frac{x_1+x_3}{2}=3,\ \frac{y_1+y_3}{2}=1$$
$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=3,\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0$$

すなわち，

$$x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=0 \quad \cdots ①$$
$$x_1+x_3=6,\ y_1+y_3=2 \quad \cdots ②$$
$$x_1+x_2+x_3=9,\ y_1+y_2+y_3=0 \quad \cdots ③$$

③ − ① より，

$$x_3=5,\ y_3=0$$

③ − ② より，

$$x_2=3,\ y_2=-2$$

これを ① に代入して，

$$x_1=1,\ y_1=2$$

以上より，

**A(1, 2), B(3, − 2), C(5, 0)**　　(答)

【3】 $a=1$ のとき，A(0, $-1$)，B(0, 5)，C($-3$, 4) は同一直線上になく，
$a=4$ のとき，A(0, $-1$)，B(3, 5)，C(3, 1) は同一直線上にない．
よって，$a \fallingdotseq 1$, 4 のもとで考える．
AB の傾きは，

$$\frac{5-(-1)}{(a-1)-0}=\frac{6}{a-1}$$

BC の傾きは，

$$\frac{(-a+5)-5}{(2a-5)-(a-1)}=\frac{-a}{a-4}$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあることより，

$$\frac{6}{a-1}=\frac{-a}{a-4} \qquad \therefore\ 6(a-4)=-a(a-1)$$

整理して，

$$a^2+5a-24=0$$
$$\therefore\ (a+8)(a-3)=0$$

より，

$$\boldsymbol{a=-8,\ 3} \qquad \textbf{(答)}$$

＜別解＞

$a \fallingdotseq 1$ であることをことわってから，次のように, 直線 AB を求め, それが点 C を通るとして解いてもよい．

直線 AB は，

$$y=\frac{6}{a-1}x-1$$

これが C を通るので，

$$-a+5=\frac{6}{a-1}(2a-5)-1$$

整理して，

$$a^2+5a-24=0$$

(以下同様)

【4】 (1) 直線の傾きは, $x$ 軸の正の向きと直線のなす角を $\theta$ として, $\tan\theta$ と表される．
よって, 傾きは $\tan 135^\circ=-1$ だから，

$$y=-1(x+1)+3$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=-x+2} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 2 点 $(3,\ 5),\ (-6,\ 2)$ を通るから, 求める直線の傾きは

$$\frac{5-2}{3-(-6)} = \frac{1}{3}$$

である．よって, 求める直線の方程式は,

$$y = \frac{1}{3}(x-3)+5$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + 4} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 2 点の $x$ 座標がともに $-3$ だから，求める直線の方程式は,

$$\boldsymbol{x = -3} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) 2 点 $(3,\ 0),\ (0,\ -2)$ を通るから, 求める直線の傾きは,

$$\frac{0-(-2)}{3-0} = \frac{2}{3}$$

である．よって, 求める直線の方程式は,

$$y = \frac{2}{3}(x-3)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - 2} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】(1) $x-2y+3=0$ より，$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

よって, 求める直線は, 傾きが $\frac{1}{2}$ で, 点 $(-1, 2)$ を通るので,

$$y = \frac{1}{2}(x+1)+2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $2x-y+3=0$ より，$y = 2x+3$

よって, 求める直線の傾きを $m$ とすると,

$$2m = -1 \quad \text{より，} \quad m = -\frac{1}{2}$$

点 $(-1, 2)$ を通るので,

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)+2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) AB の中点を通り, 直線 AB に垂直な直線を求めればよい. AB の中点は

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 2)$$

直線 AB の傾きは,

$$\frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$$

よって, 求める直線の傾きを $m$ とすると,

$$\frac{1}{3}m = -1 \text{ より, } m = -3$$

したがって, 点 $(1, 2)$ を通るので,

$$y = -3(x-1) + 2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = -3x + 5} \qquad \textbf{(答)}$$

＜別解＞

線分 AB の垂直二等分線 $\iff$ 2 点 A, B から等距離にある点の集合

つまり, 求める直線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は, PA=PB を満たす.

$$\therefore\ \mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2 \text{ より, } (x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2$$

整理して, $\boldsymbol{3x + y = 5}$ **(答)**

(4) $5(x+2) + 3(y-3) = 10$

$$\therefore\ \boldsymbol{5x + 3y = 9} \qquad \textbf{(答)}$$

【6】$\mathrm{Q}(a, b)$ とおくと, 2 点 P, Q を通る直線は, 直線 $l: y = -3x$ と垂直であるから,

$$\frac{b-11}{a-5} = \frac{1}{3}$$

整理して,

$$a - 3b + 28 = 0 \ \cdots ①$$

また, 2 点 P, Q の中点 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+11}{2}\right)$ は, 直線 $l$ 上にあるので,

$$3 \times \frac{a+5}{2} + \frac{b+11}{2} = 0$$

$$\therefore\ 3a + b + 26 = 0 \ \cdots ②$$

①, ② より,

$$a = -\frac{53}{5},\ b = \frac{29}{5}$$

したがって,

$$\mathbf{Q}\left(-\boldsymbol{\frac{53}{5}},\ \boldsymbol{\frac{29}{5}}\right) \qquad \textbf{(答)}$$

【7】点 A の $\ell$ に関する対称点を $\mathrm{A}'(a,\ b)$ とすると，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{A}'\mathrm{P}+\mathrm{PB}$$

であるので，AP+PB が最小になるのは，A′P+PB が最小，すなわち P が直線 A′B と $\ell$ の交点になるときである．
ここで，A′ について，

(i) $\mathrm{A}'\mathrm{A}\perp\ell$

(ii) A′A の中点は $\ell$ 上に存在する

(i) より，A′A の傾きは $\dfrac{b}{a-1}$ であるので，

$$\begin{aligned}&\frac{b}{a-1}\cdot 2=-1\\ &\quad a+2b=1 \quad \cdots①\end{aligned}$$

(ii) より，A′A の中点は，$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ であるので，

$$\begin{aligned}&\frac{b}{2}=2\cdot\frac{a+1}{2}+3\\ &2a-b=-8 \quad \cdots②\end{aligned}$$

①,② を連立して解いて，$(a,\ b)=(-3,\ 2)$
よって，$\mathrm{A}'(-3,\ 2)$ より，直線 A′B の方程式は，

$$\begin{aligned}y&=\frac{0-2}{3-(-3)}(x-3)\\ &=-\frac{1}{3}x+1 \quad \cdots③\end{aligned}$$

これと，$\ell: y=2x+3$ との交点は ③ と連立させて

$$\begin{aligned}&2x+3=-\frac{1}{3}x+1\\ &\quad \therefore\ x=-\frac{6}{7},\quad y=\frac{9}{7}\end{aligned}$$

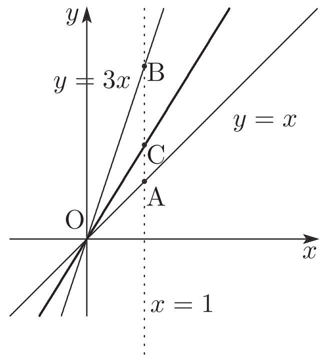
よって，

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}\right) \quad \textbf{(答)}$$

また，AP+BP の最小値は，

$$\begin{aligned}\mathrm{A}'\mathrm{B}&=\sqrt{(-3-3)^2+(2-0)^2}\\ &=\mathbf{2\sqrt{10}} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

【8】 求める直線は明らかに原点 O を通る．
また，$y=x$，$y=3x$ と直線 $x=1$ との交点をそれぞれ A，B とすれば，A(1, 1)，B(1, 3) であり，求める直線は ∠AOB の二等分線と AB との交点 C を通る．
ここで，OC は ∠AOB の二等分線なので，




$$
\begin{aligned}
\mathrm{AC}:\mathrm{BC} &= \mathrm{AO}:\mathrm{BO} \\
&= \sqrt{1^2+1^2}:\sqrt{1^2+3^2} \\
&= \sqrt{2}:\sqrt{10} \\
&= 1:\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

よって，C は線分 AB を $1:\sqrt{5}$ の比に内分する点なので，C$(1,\ y_0)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{\sqrt{5}\cdot 1+1\cdot 3}{1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

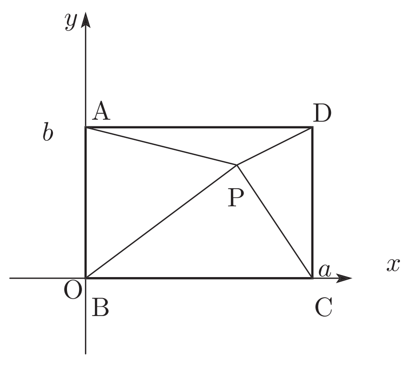
よって，求める直線は，O(0, 0)，C$\left(1,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ を結ぶ直線なので，

$$\boldsymbol{y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} \qquad \textbf{(答)}$$

【9】 右の図のように座標軸を設定し，

A$(0,b)$，B$(0,0)$，C$(a,0)$，D$(a,b)$，P$(x,y)$

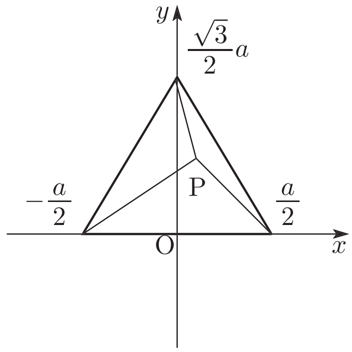
とすると，




$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}^2+\mathrm{PC}^2 &= x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2 \\
&= x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2 \\
&= \mathrm{PB}^2+\mathrm{PD}^2 \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}
$$

【10】 右図のように $A\left(-\frac{a}{2},0\right)$, $B\left(\frac{a}{2},0\right)$, $C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,

$P(x,y)$ とすると,




$$AP^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2$$
$$BP^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2$$
$$CP^2=x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

だから

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=3x^2+\left(\sqrt{3}y-\frac{a}{2}\right)^2\geqq 0$$

よって示された.　　〔証明終〕

【11】

$$\begin{aligned}
x^2-y^2+4x-2y+3&=0\\
x^2+4x-y^2-2y+3&=0\\
x^2+4x-(y+3)(y-1)&=0\\
(x+y+3)\{x-(y-1)\}&=0\\
(x+y+3)(x-y+1)&=0
\end{aligned}$$

より，与式は 2 直線

$$\begin{cases} x+y+3=0 & \cdots① \\ x-y+1=0 & \cdots② \end{cases}$$

を表す．よって①＋②より

$2x+4=0$

$\therefore\ x=-2$

これと①より

$y=-1$

したがって，求める交点の座標は

$(-\mathbf{2},-\mathbf{1})$　　**(答)**

## 添削課題

【1】(1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{3+2} = 0$$
$$y = \frac{2 \times 9 + 3 \times 4}{3+2} = 6$$

したがって，$\mathbf{P(0,\ 6)}$　　(答)

(2) 点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{-1 \times 3 + 2 \times (-2)}{2-1} = -7$$
$$y = \frac{-1 \times 9 + 2 \times 4}{2-1} = -1$$

したがって，$\mathbf{Q(-7,\ -1)}$　　(答)

(3) 点 R の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 C は 2 点 B，R の中点であるから

$$\frac{-2+x}{2} = 2, \qquad \frac{4+y}{2} = 1$$

よって，$x=6$，$y=-2$
したがって，$\mathbf{R(6,\ -2)}$　　(答)

【2】(1) 求める直線は $y$ 軸に平行ではないので，

$$y = \frac{3-(-3)}{1-(-2)}(x-1)+3$$
$$\boldsymbol{y = 2x + 1} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $x$ 軸の正の向きとなす角が $60^\circ$ より，求める直線の傾きは $\sqrt{3}$ である．
また，(3，6) を通るので

$$y = \sqrt{3}(x-3)+6$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \sqrt{3}x + 6 - 3\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める直線は $x+5y+c=0$　(ただし，$c$ は定数) とおける．
また，点 (5，$-3$) を通るので，

$$5 + 5 \cdot (-3) + c = 0 \qquad\qquad \therefore c = 10$$

したがって

$$\boldsymbol{x + 5y + 10 = 0} \qquad \textbf{(答)}$$

【3】(1) 2 直線が一致するためには，平行であることが必要なので

$$\begin{aligned} 2k\cdot(-k)-(k+2)(k-1)&=0\\ -3k^2-k+2&=0\\ 3k^2+k-2&=0\\ (3k-2)(k+1)&=0\\ \therefore\ k&=\frac{2}{3},\ -1 \end{aligned}$$

ここで，$k=-1$ のとき，2 直線は,

$$\begin{cases} -2x-2y+1=0 \iff x+y+\dfrac{1}{2}=0\\ x+y+2=0 \end{cases}$$

となり一致しない.

また，$k=\dfrac{2}{3}$ のとき，2 直線は,

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}y+1=0 \iff 4x-y+3=0\\ \\ \dfrac{8}{3}x-\dfrac{2}{3}y+2=0 \iff 4x-y+3=0 \end{cases}$$

より一致する.

以上より，$\boldsymbol{k=\dfrac{2}{3}}$　**(答)**

(2) (1) の議論より，$\boldsymbol{k=-1}$　**(答)**

(3) 2 直線が垂直であるので

$$\begin{aligned} 2k(k+2)+(k-1)(-k)&=0\\ k^2+5k&=0\\ k(k+5)&=0 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{k=0,\ -5}$　(答)

【4】(1) $\mathrm{C}(a,\ b)$ とすると，$l : y = \dfrac{1}{3}x + 1$ に対して，

AC $\perp$ $l$ より，

$$\frac{b}{a+1} \cdot \frac{1}{3} = -1 \iff 3a + b = -3 \ \cdots ①$$

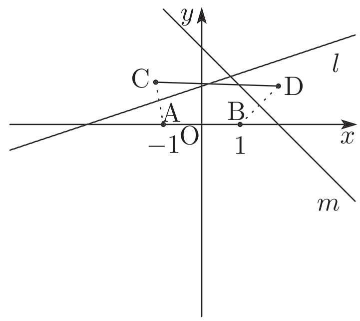
線分 AC の中点 $\left(\dfrac{a-1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ は $l$ 上に存在するので，

$$\frac{a-1}{2} - 3 \cdot \frac{b}{2} + 3 = 0 \iff a - 3b = -5 \ \cdots ②$$

①，② より，$(a,\ b) = \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$ $\quad\therefore$ $\mathbf{C}\left(-\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right)$ **(答)**

(2) B の $m$ に関する対称点を D とすると，

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PC},\ \mathrm{QB} = \mathrm{QD}$$




より，AP+PQ+QB=CP+PQ+QD となる．
これが最小となるのは，CD と $l$，$m$ との交点をそれぞれ P，Q としたときである．
$\mathrm{D}(c,\ d)$ とすると，$m : y = -x + 2$ に対して，BD $\perp$ $m$ より，$\dfrac{b}{a-1} \cdot (-1) = -1$

$$a - b = 1 \ \cdots ③$$

線分 BD の中点 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ は，$m$ 上に存在するので，

$$\frac{a+1}{2} + \frac{b}{2} = 2$$
$$a + b = 3 \ \cdots ④$$

③，④ より，$(a,\ b) = (2,\ 1)$ よって，$\mathrm{D}(2,\ 1)$
これより，直線 CD の方程式は

$$y = \frac{1 - \frac{6}{5}}{2 - \left(-\frac{7}{5}\right)}(x-2) + 1$$
$$= -\frac{1}{17}x + \frac{19}{17} \qquad \therefore\ x + 17y = 19$$

これと $l$ との交点は $\begin{cases} x + 17y = 19 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ より，$(x,\ y) = \left(\dfrac{3}{10},\ \dfrac{11}{10}\right)$

$m$ との交点は $\begin{cases} x + 17y = 19 \\ x + y = 2 \end{cases}$ より，$(x,\ y) = \left(\dfrac{15}{16},\ \dfrac{17}{16}\right)$

よって，$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}},\ \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{10}}\right)$，$\mathbf{Q}\left(\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{16}},\ \dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{16}}\right)$ **(答)**

# ３２章　図形と方程式（２）

## 問題

【1】(1) 求める長さを $d$ とすると

$$d = \frac{|2 \times (-2) - 3 \times 1 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \boldsymbol{\sqrt{13}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 求める長さを $d$ とすると

$$d = \frac{|2 \times (-4) - 1 \times (-3) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{9\sqrt{5}}{5}} \qquad \textbf{(答)}$$

【2】平行な 2 直線間の距離は, 一方の直線上の点から他方の直線に引いた垂線の長さに等しい. $2x - 3y - 2 = 0$ 上の点 $(1, 0)$ から, $2x - 3y + 6 = 0$ までの距離は,

$$\frac{|2 \times 1 - 3 \times 0 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{8\sqrt{13}}{13}} \qquad \textbf{(答)}$$

【3】

$$(2k+1)x - (k-2)y + 7k - 4 = 0 \quad \cdots ①$$

$k$ について整理すると,

$$x + 2y - 4 + k(2x - y + 7) = 0$$

$k$ がどのような値をとっても成り立つので, $k$ についての恒等式と考えると,

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

これを解くと, $x = -2$, $y = 3$.

このとき, ① はつねに成り立つ.

よって, 定点 $(-2,\ 3)$ を通ること, つまり題意は示された.　　〔証明終〕

<注>

① は, 2 直線 $x + 2y - 4 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ の交点, つまり, $(-2, 3)$ を通る直線を表している.

【4】直線 $x-2y-2=0$ は，点 $(6,-4)$ を通らないので，求める直線は,

$$4x+3y+12+k(x-2y-2)=0$$

とおける.

点 $(6,-4)$ を通ることによって,

$$\begin{aligned} 4\times 6+3\times(-4)+12+k\{6-2\times(-4)-2\}&=0\\ 24+12k&=0\\ \therefore\ k&=-2 \end{aligned}$$

したがって,

$$4x+3y+12-2(x-2y-2)=0$$

整理して,

$$\mathbf{2x+7y+16=0} \qquad \text{(答)}$$

＜注＞

2 直線 $4x+3y+12=0$ と $x-2y-2=0$ の交点を求めると,

$$\left(-\frac{18}{11},-\frac{20}{11}\right)$$

この点と, $(6,-4)$ の 2 点を通る直線としてもできるが, この場合計算がかなり手間である.

【5】$\mathrm{A}(2,5)$，$\mathrm{B}(-4,-1)$ を通る直線の方程式は

$$y=x+3$$
$$\therefore\ x-y+3=0$$

であり，これと $\mathrm{C}(6,-3)$ との距離 $d$ は

$$d=\frac{|6-(-3)+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{12}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad d=6\sqrt{2}$$

そして，AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{5-(-1)\}^2}=6\sqrt{2}$$

だから，AB を底辺とし，$d$ を高さとすると，求める面積は

$$\frac{1}{2}d\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=\mathbf{36} \qquad \text{(答)}$$

【6】①, ② の交点 A の座標を求めると, A$(1,5)$

②, ③ の交点 B の座標を求めると, B$(5,-1)$

③, ① の交点 C の座標を求めると, C$(-3,-3)$

よって,

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(5-(-3))^2+(-1-(-3))^2}=2\sqrt{17}$$

さらに，A と BC の距離 $d$ は，A と直線 ③ の距離であるから

$$d=\frac{|1\cdot 1+5\cdot(-4)-9|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{28}{\sqrt{17}}$$

よって,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot\frac{28}{\sqrt{17}}=\mathbf{28}\quad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

【7】求める直線は原点を通るので,

$$y=mx\quad\cdots①$$

とおける.

① 上の点を P$(k,\ mk)$ $\ (k\fallingdotseq 0)$ とすると, ① は $y=x$ と $y=3x$ のなす角の 2 等分線であるから, P から 2 直線に引いた垂線の足をそれぞれ H, K とすると,

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PK}$$

ここで, $y=x$ より, $x-y=0$ だから,

$$\mathrm{PH}=\frac{|k-mk|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k||1-m|}{\sqrt{2}}$$

また, $y=3x$ より, $3x-y=0$ だから,

$$\mathrm{PK}=\frac{|3k-mk|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k||3-m|}{\sqrt{10}}$$

したがって,

$$\frac{|k||1-m|}{\sqrt{2}}=\frac{|k||3-m|}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{5}|1-m|=|3-m|$$

$$\therefore\ 5(1-m)^2=(3-m)^2$$

整理して,

$$m^2-m-1=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって,

$$\boldsymbol{y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x} \qquad \textbf{(答)}$$

【8】 点 P と直線 AB との距離を $d$ とすると,

$$\triangle \mathrm{ABP} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times d$$

ここで, AB は一定であるから, △ABP の面積が最小となるには $d$ を最小にすればよい.

点 P の $x$ 座標を $t$ とおくと, $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ で, さらに, 直線 AB の方程式は

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

つまり, $2x - y - 4 = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} d = \frac{|2t - t^2 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} &= \frac{|t^2 - 2t + 4|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|(t-1)^2 + 3|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

したがって, $t = 1$ のとき, $d$ は最小となる.
よって, 求める点 P の座標は,

$$\mathbf{P(1, 1)} \qquad \text{(答)}$$

また, そのときの △ABP の面積 $S$ は,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

より,

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞
直線 AB：$y = 2x - 4$ に平行な直線 $y = 2x + k$ が放物線 $y = x^2$ と接するとき, 方程式

$$x^2 = 2x + k \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - k = 0$$

は重解をもつので, 判別式を $D$ とすると,

$$D/4 = (-1)^2 - 1 \times (-k) = 0 \qquad \therefore\ k = -1$$

このとき, 接点の座標が求める点 P の座標となり,

$$x^2 = 2x - 1 \qquad \therefore\ x = 1$$

よって，$\mathbf{P(1,1)}$　　(答)

また, そのときの $\triangle$ABP の面積は,

$$S = 10 - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 4\right) = \mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$

【9】 AB を底辺とみると $\triangle$PAB が最小となるのは点 P と直線 AB との距離 $d$ が最小となるときである．ここで

$$y = x^2 + 4x + 11$$

より P の $x$ 座標を $p$ とすると

$$\mathrm{P}(p,\ p^2 + 4p + 11)$$

と表せる．そして，直線 AB の方程式は

$$y = 2x - 1$$
$$\therefore 2x - y - 1 = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|2p - (p^2 + 4p + 11) - 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\left|-p^2 - 2p - 12\right|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left|-(p+1)^2 - 11\right|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(p+1)^2 + 11}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

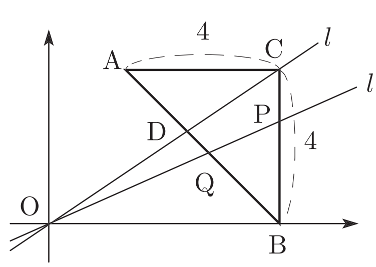
であり，この最小値は $p = -1$ のとき，$\dfrac{11}{\sqrt{5}}$ である．よって，$\triangle$PAB の面積の最小値は，AB=$\sqrt{5}$ より

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{11}{\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{11}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【10】 A(2，4)，B(6，0)，C(6，4) とすると,

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

である．原点を通る直線の方程式を $l$ とする．直線 $l$ が C を通過するときの辺 AB と直線 $l$ との交点を D とすると




$$\triangle \mathrm{ADC} < \triangle \mathrm{DBC}$$

であるから，直線 $l$ が $\triangle$ABC を二等分するとき，$l$ は BC と交わり，その交点を P とすると，点 P の座標は

$$(6,\, m) \qquad (\text{ただし}, 0 \leqq m \leqq 4)$$

とおける．このとき，$l$ の方程式は

$$y = \frac{m}{6}x$$

である．また，直線 AB の方程式は

$$y - 0 = \frac{0-4}{6-2}(x-6) \qquad \therefore\ y = -x + 6$$

であるから，辺 AB と $l$ との交点を Q とし，$m \fallingdotseq -6$ であることに注意して，その座標は

$$\left(\frac{36}{m+6},\ \frac{6m}{m+6}\right)$$

となる．したがって，$\triangle$PQB の面積は

$$\frac{1}{2} \times m \times \left(6 - \frac{36}{m+6}\right) = \frac{3m^2}{m+6}$$

と表され，これが，$\triangle$ABC の面積の半分に等しいことから

$$\frac{3m^2}{m+6} = 4 \qquad \therefore\ 3m^2 - 4m - 24 = 0$$

$$\therefore\ m = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 3 \times 24}}{3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{3}$$

ここで，$0 \leqq m \leqq 4$ であるから，題意に適する $m$ の値は

$$m = \frac{2 + 2\sqrt{19}}{3}$$

である．
したがって，求める直線の方程式は

$$y = \frac{1}{6} \times \frac{2 + 2\sqrt{19}}{3}x$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1+\sqrt{19}}{9}x} \qquad (\text{答})$$

## 添削課題

【1】(1) 点 $(4,\ 4)$ と直線 $x-3y+3=0$ との距離を求めればよいから

$$\frac{|4-3\times4+3|}{\sqrt{1+9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(2) 点 $(1,\ 2)$ と直線 $x-3y+3=0$ との距離を求めればよいから

$$\frac{|1-3\times2+3|}{\sqrt{1+9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{5}}\qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 与えられた直線の式を $k$ について整理すると

$$4x+y-8+k(3x+5y-6)=0$$

これを $k$ についての恒等式とみると

$$\begin{cases} 4x+y-8=0 & \cdots\cdots ① \\ 3x+5y-6=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より

$$y=-4x+8 \quad \cdots\cdots ①'$$

①′ を ② に代入して

$$3x+5(-4x+8)-6=0 \qquad \therefore\ x=2$$

この $x$ の値を ①′ に代入して

$$y=-4\cdot2+8=0$$

よって，求める定点の座標は，**(2, 0)**　(答)

(2) $2x+5y+1=0$ は $(-1, 5)$ を通らないので，求める直線の方程式は

$$2x-3y+5+k(2x+5y+1)=0$$

とおける．これが，$(-1, 5)$ を通ることから

$$-2-15+5+k(-2+25+1)=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{2}$$

よって，求める直線の方程式は

$$2x-3y+5+\frac{1}{2}(2x+5y+1)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{6x-y+11=0}\qquad \text{(答)}$$

(3) $2x+3y-1=0$ は $4x-y+2=0$ に垂直ではないので，求める直線の方程式は

$$4x+y+3+k(2x+3y-1)=0$$

すなわち

$$(4+2k)x+(1+3k)y+3-k=0$$

とおける．これが，$4x-y+2=0$ に垂直であるから

$$4\cdot(4+2k)+(-1)\cdot(1+3k)=0$$

$$\therefore\ 5k=-15 \qquad \therefore\ k=-3$$

よって，求める直線の方程式は

$$4x+y+3-3(2x+3y-1)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x+4y-3=0}\qquad \text{(答)}$$

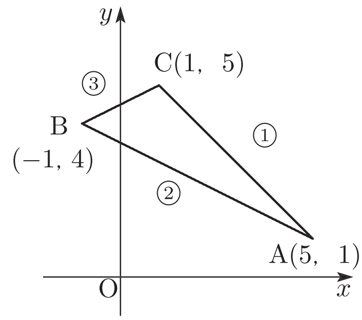
【3】与えられた3直線

$$x+y-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x+2y-7=0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$x-2y+9=0 \quad \cdots\cdots ③$$

について

①，② の交点Aの座標は，(5，1)

②，③ の交点Bの座標は，(−1, 4)




したがって

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-5)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{5}$$

また，①，③ の交点Cは(1，5)であり，点Cから直線AB（すなわち②）までの距離は

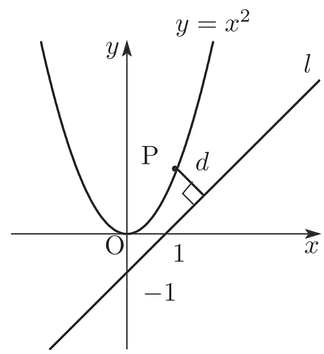
$$\frac{|1+2\cdot 5-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

よって，求める三角形の面積は

$$3\sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{6} \qquad \text{(答)}$$

【4】放物線 $y=x^2$ 上の点Pの座標を $(t,\ t^2)$ とおく．Pと $l$ との距離を $d$ とすると

$$d=\frac{|t-t^2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|t^2-t+1|}{\sqrt{2}}$$




ここで

$$t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

はつねに正であるから，$t=\dfrac{1}{2}$ のときに $d$ は最小となる．

よって，求める点Pの座標は

$$\left(\mathbf{\frac{1}{2}},\mathbf{\frac{1}{4}}\right) \qquad \text{(答)}$$

また，このときのPと $l$ との距離は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{3}{8}\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

M1TK
高 1 難関大数学 K

Z-KAI

| 会員番号 | | 氏　名 | |
|---|---|---|---|