M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

本科０期２月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

４章－１　整数（２）

問題

【1】与式の左辺を因数分解し，右辺を素因数分解すると

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$217=7\cdot 31$

であるから，まず，$a-b$，a^2+ab+b^2 の値の組を考える．

ここで，$a^3-b^3>0$ であり

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\geqq 0$$

であるから，$a-b>0$ である．また

$$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)-(a-b)&=a^2+(b-1)a+b^2+b\\&=\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b+1)^2-1\geqq -1\end{aligned}$$

であるから

$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(1,\ 217),\ (7,\ 31)$

の場合を考えれば十分．

ここで

$a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab$

であるから

$(a-b,\ 3ab)=(1,\ 216),\ (7,\ -18)$

$(a-b,\ ab)=(1,\ 72),\ (7,\ -6)$

$\therefore\quad (a-b,\ -ab)=(1,\ -72),\ (7,\ 6)$

である．

(i) $(a-b,\ -ab)=(1,\ -72)$ のとき，a，$-b$ は方程式

$t^2-t-72=0 \iff (t-9)(t+8)=0$

の 2 解であるから

$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9)$

(ii) $(a-b,\ -ab)=(7,\ 6)$ のとき，a，$-b$ は方程式

$t^2-7t+6=0 \iff (t-1)(t-6)=0$

の 2 解であるから

$(a,\ b)=(1,\ -6),\ (6,\ -1)$

以上より，求める a，b の値は

$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9),\ (1,\ -6),\ (6,\ -1)$　　**(答)**

【2】α を整数とする.

(i) $\alpha \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \\ &\equiv d \pmod 3 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \neq 0$ である.

(ii) $\alpha \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \\ &\equiv a + b + c + d \pmod 3 \\ &= f(1) \end{aligned}$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \neq 0$ である.

(iii) $\alpha \equiv -1 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \\ &\equiv -a + b - c + d \pmod 3 \\ &= f(-1) \end{aligned}$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \neq 0$ である.

以上から，任意の整数 α に対して $f(\alpha) \neq 0$. すなわち，方程式 $f(x) = 0$ は整数解をもたない. ［証明終］

【3】n を自然数とするとき
$$A = 2n+1, \quad B = n^3+1$$
とおく.

ここで
$$B = (n+1)(n^2-n+1)$$
と因数分解されることに注目すると
$$2(n+1)-(2n+1) = 1$$
となるので，$n+1$ と A の公約数は 1 の約数，すなわち，$n+1$ と A は互いに素である.

したがって，A と B が互いに素でないとすれば，その 1 以外の正の公約数は
$$A,\ n^2-n+1$$
の 1 以外の正の公約数であり，それを $g\ (\geqq 2)$ とおく.

すると
$$(n^2-n+1)-(2n+1) = n(n-3)$$
であるから，g は $n(n-3)$ の約数でなくてはいけない.

ところが
$$(2n+1)-2n = 1$$
だから，前と同様にして，A と n は互いに素であるから，g は A と $n-3$ の公約数でなくてはいけない.

よって
$$(2n+1)-2(n-3) = 7$$
であるから，A と $n-3$ の公約数は 7 の約数であり，g は 1 より大きい正の公約数だから
$$g = 7$$
よって，$n-3$ は 7 の倍数であるから
$$n-3 \equiv 0 \pmod 7 \qquad \therefore \quad n \equiv 3 \pmod 7$$
逆に，このとき
$$A \equiv 2\cdot 3+1 = 7 \equiv 0 \pmod 7$$
$$B \equiv 3^3+1 = 28 \equiv 0 \pmod 7$$
となり，$A,\ B$ は公約数 7 をもつので，$A,\ B$ は互いに素でない.

ゆえに，A と B が互いに素でないならば，n は「7 で割ると，3 余る自然数」である.

(答)

【4】正整数 $a,\ b$ について，a と b の最大公約数を g とおく．

(i) $g=1$ のとき

$a,\ 2a,\ 3a, \dots,\ ba$ を b で割った余りはすべて異なるから，ka を b で割った余りが 1 であるような整数 k $(1 \leqq k \leqq b)$ が存在する ($cf.$ 補足).

このとき，$ak-1$ は b で割り切れるから，$l=\dfrac{ak-1}{b}$ とおくと，l は整数であり

$$ak-bl=ak-(ak-1)=1$$

であるから，$am+bn=1$ をみたす整数 $m,\ n$ が存在する．

(ii) $g \geqq 2$ のとき

$$a=a_0 g, \quad b=b_0 g \quad (a_0,\ b_0 \text{は互いに素な整数})$$

とかける．このとき

$$\begin{aligned} & am+bn=1 \\ \iff \quad & g(a_0 m+b_0 n)=1 \ \cdots ① \end{aligned}$$

となる．ここで，① の左辺は g で割り切れるが，右辺は g $(\geqq 2)$ で割り切れないので，① は成り立たない．

すなわち，$am+bn=1$ をみたす整数 $m,\ n$ は存在しない．

以上より，$am+bn=1$ をみたす整数 $m,\ n$ が存在するための必要十分条件は $g=1$ である． ［証明終］

補足

正整数 $a,\ b$ について a と b が互いに素なとき，$a,\ 2a,\ 3a, \dots,\ ba$ を b で割った余りがすべて異なることを示す．

(証明)

a と b は互いに素な正整数であるとする．

$a,\ 2a,\ 3a, \dots,\ ba$ を b で割った余りが等しい組があるとし，

その組を $ka,\ la$ $(1 \leqq k < l \leqq b)$ とおくと

$$\begin{aligned} & la-ka=(l-k)a \text{ は } b \text{ の倍数} \\ \implies \quad & l-k \text{ は } b \text{ の倍数} \quad (\because\ a \text{ と } b \text{ は互いに素}) \end{aligned}$$

となるが，これは $0<l-k<b$ に反する．

よって，$a,\ 2a,\ 3a, \dots,\ ba$ を b で割った余りはすべて異なる． ［証明終］

問題

【1】(1) $y' = (4x^3+1)'(2x^2+1) + (4x^3+1)(2x^2+1)'$

$= 12x^2(2x^2+1) + (4x^3+1)\cdot 4x$

$= 4x(10x^3+3x+1)$　　(答)

(2) $y' = \dfrac{(5-4x)'(2x+3)-(5-4x)(2x+3)'}{(2x+3)^2}$

$= \dfrac{-4(2x+3)-(5-4x)\cdot 2}{(2x+3)^2}$

$= \dfrac{-22}{(2x+3)^2}$　　(答)

(3) $y' = \dfrac{(x^2-2x-4)'\sqrt{x}-(x^2-2x-4)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$

$= \dfrac{(2x-2)\sqrt{x}-(x^2-2x-4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \dfrac{3x^2-2x+4}{2x\sqrt{x}}$　　(答)

(4) $y' = \dfrac{(x^2+2x-1)'}{2\sqrt{x^2+2x-1}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$　　(答)

(5) $y' = -\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+4x+1}\right)^2}\left(\sqrt{x^2+4x+1}\right)'$

$= -\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+4x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+1}}$

$= -\dfrac{x+2}{\left(\sqrt{x^2+4x+1}\right)^3}$　　(答)

(6) $y' = (\sin^2 x)'\cos^3 x + \sin^2 x(\cos^3 x)'$

$= 2\sin x\cos x\cdot\cos^3 x + \sin^2 x\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)$

$= \sin x\cos^2 x(5\cos^2 x - 3)$　　(答)

(7) $y' = 2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\sin x$　　(答)

【別解】

$y = \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$ より，

$y' = \dfrac{1}{2}\sin x$　　(答)

(8) $y' = \tan^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{-\sin 2x\cdot 2}{2\sqrt{\cos 2x}}$

$= \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$　　(答)

(9) $y' = e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}$　　(答)

(10) $$y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \qquad \text{(答)}$$

(11) $$y' = a^{\sin x} \log a (\sin x)' = a^{\sin x} \log a \cdot \cos x \qquad \text{(答)}$$

(12) $$y' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x \qquad \text{(答)}$$

(13) $$y' = \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{(答)}$$

(14) $$y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\tan x \qquad \text{(答)}$$

(15) $$y' = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x \log x} \qquad \text{(答)}$$

(16) $y = \sqrt[x]{x}$ $(x > 0)$ の対数をとると,

$$\begin{aligned} \log y &= \log \sqrt[x]{x} \\ &= \frac{1}{x} \log x \end{aligned}$$

両辺を x で微分して,

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

よって,

$$y' = \frac{1}{x^2}(1 - \log x) y = \frac{(1 - \log x) \sqrt[x]{x}}{x^2} \qquad \text{(答)}$$

【2】I. 導関数の定義から,

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}+\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}\right)$$

ここで, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ であり, また,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}$$
$$= \lim_{h\to 0}-\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cdot\frac{h}{\cos h+1} = -1^2\cdot\frac{0}{2}=0$$

であるから,

$(\sin x)' = \cos x\cdot 1+\sin x\cdot 0=\cos x$ (答)

II. 点 $\mathrm{P}(t,\ t\cos t)$ における接線を求めると, $y=x\cos x$ より,

$y'=\cos x - x\sin x$

であるから,

$y-t\cos t=(\cos t-t\sin t)(x-t)$

となる. これが, 原点を通るので, $x=y=0$ を代入して,

$-t\cos t=-t(\cos t-t\sin t)\quad \therefore\quad t^2\sin t=0$

これより,

$t=n\pi\quad (n:$ 整数$)$

となるから, 求める接線は

$$y-n\pi\cos n\pi=(\cos n\pi-n\pi\sin n\pi)(x-n\pi)$$
$$\Longleftrightarrow\quad y=(-1)^n(x-n\pi)+(-1)^n n\pi\quad (\because\quad \cos n\pi=(-1)^n)$$
$$\therefore\quad y=(-1)^n x$$

ここで, $(-1)^n$ は ± 1 の値しか取らないので,

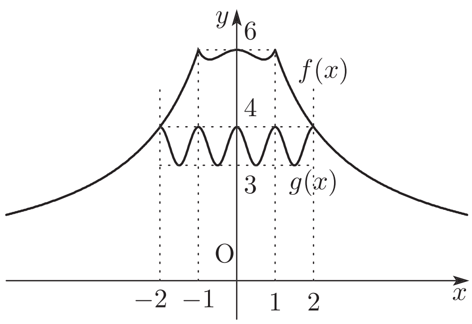
$y=x,\quad y=-x$ (答)

【3】$f(x)$ は偶関数であり，$x > 1$ において減少することは明らかである．よって，$0 \leqq x \leqq 1$ で増減を調べる．

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 4x\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	$\frac{23}{4}$	↗	6

$g(x)$ も偶関数で，周期 1 の関数 $y = \cos 2\pi x$ を y 方向に $1/2$ 倍して平行移動したものである．よって，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは下のようになる．　　(答)



【4】(1) $y=f(x)$ のグラフが $x=a$ に関して対称であるから

$$f(a+h)=f(a-h)$$

$$\therefore\quad f(a+h)-f(a)=f(a-h)-f(a)$$

$$\therefore\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

a を固定して $h\to 0$ の極限をとると

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

よって，微分の定義より

$$f'(a)=-f'(a)\qquad\therefore\quad f'(a)=0$$ (証明終)

(2) $y=f(x)$ のグラフが点 $(a,\ f(a))$ に関して対称であるので

$$f(a+b)-f(a)=f(a)-f(a-b)$$

$$f(a+b+h)-f(a)=f(a)-f(a-(b+h))$$

が成り立つ．2 式の辺々ひいて

$$f(a+b+h)-f(a+b)=-\{f(a-b-h)-f(a-b)\}$$

$$\therefore\quad \frac{f(a+b+h)-f(a+b)}{h}=\frac{f(a-b-h)-f(a-b)}{-h}$$

a，b を固定して $h\to 0$ の極限をとると

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+b+h)-f(a+b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-b-h)-f(a-b)}{-h}$$

よって，微分の定義より

$$f'(a+b)=f'(a-b)$$

任意の b について上式が成り立つから，$y=f'(x)$ のグラフは $x=a$ に関して対称である．よって (1) より

$$f''(a)=0$$ (証明終)

添削課題

【1】(1) すべての整数 N について，

$N \equiv 0, \quad N \equiv \pm 1, \quad N \equiv \pm 2, \quad N \equiv \pm 3 \pmod 7$

のいずれかが成り立つ．これらの両辺を 2 乗すると，

$$\begin{cases} N^2 \equiv 0 & \pmod 7 \\ N^2 \equiv 1 & \pmod 7 \\ N^2 \equiv 4 & \pmod 7 \\ N^2 \equiv 9 \equiv 2 & \pmod 7 \end{cases}$$

よって，平方数を 7 で割った余りは，0，1，2，4 のいずれかである．

［証明終］

(2) 背理法による．すなわち，

$[A$ に属するすべての数の積$] = [B$ に属するすべての数の積$]$ ……①

が成り立つと仮定して矛盾を導く．

まず，6 数の中に 7 の倍数があるとする．連続する 6 数の中に 7 の倍数は高々 1 つしかないから，このとき ① の両辺において，一方は 7 の倍数となり，他方は 7 の倍数ではないので矛盾が生じる．よって，6 数の中に 7 の倍数は存在しない．

このとき，6 数が連続する整数であることに注意すると，これらを 7 で割った余りは，それぞれ 1，2，3，4，5，6 である．よって，これらすべての積を考えると，

$[6$ 数の積$] \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \equiv 720 \equiv 6 \pmod 7$

一方，① の両辺の値を p とすると，$(6$ 数の積$) = p^2$ であるから，上式より，

$p^2 \equiv 6 \pmod 7$

これは p^2 を 7 で割った余りが 6 であることを意味するが，このことは，(1) の結果に矛盾する．したがって，背理法により題意が示された．［証明終］

5章－1　図形と方程式

問題

【1】(1) 円 C の方程式を変形して

$$x^2+y^2-10-2a(x+2y-5)=0$$

より，円 C は，a の値にかかわらず

$$\begin{cases} x^2+y^2-10=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

をみたす点 $(x,\ y)$ を通る．これらを連立して解いて，求める 2 定点は

$(3,\ 1),\ (-1,\ 3)$　　**(答)**

(2) 円 C の方程式を変形して

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-2a)^2 &= 5a^2-10a+10 \\ &= 5(a-1)^2+5 \geqq 5\end{aligned}$$

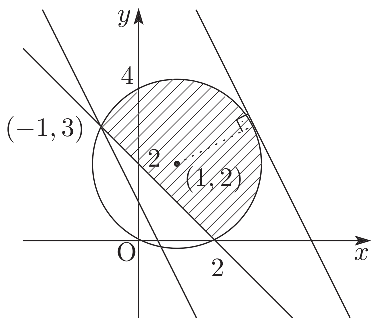
等号は $a=1$ のとき成立．よって，求める a の値は 1.　　**(答)**

(3) (2) より，題意の領域は

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y \leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2+(y-2)^2 \leqq 5 \\ x+y \geqq 2 \end{cases}$$

である．ここで，$2x+y=k$ とおき，以下の円 C_1 と直線 ℓ を考える．

図 1



$$C_1 : (x-1)^2+(y-2)^2=5$$
$$\ell : y=-2x+k$$

図 1 より，直線 ℓ が円 C_1 と $x>0$ の範囲で接するとき，k の値は最大となる．このとき，直線 ℓ と円 C_1 の中心との距離を考えて

$$\frac{|2\cdot 1+2-k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$|k-4|=5$$

$$\therefore \quad k=-1,\ 9$$

図 1 より $k>0$ であるから，求める最大値は 9.　　**(答)**

また，図 1 より，直線 ℓ が点 $(-1,\ 3)$ を通るときに k の値は最小となる．このとき

$$k=2\cdot(-1)+3=1$$

より，求める最小値は 1.　　**(答)**

【2】(1) 2 つの接点の座標をそれぞれ

$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$

とおくと，この 2 点における C の接線の方程式はそれぞれ

$x_1x + y_1y = 1,\ x_2x + y_2y = 1$

P はこの 2 つの接線上の点だから

$x_1\alpha + y_1\alpha^2 = 1,\ x_2\alpha + y_2\alpha^2 = 1$

ここで，直線 $\alpha x + \alpha^2 y = 1$ を考えると，この 2 式より 2 点 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$ はともにこの直線上にある．したがって，求める直線 ℓ の方程式は

$\alpha x + \alpha^2 y = 1$　　**(答)**

(2) (1) で求めた ℓ の方程式を，α についての方程式

$y\alpha^2 + x\alpha - 1 = 0$

とみて，これが $\alpha \geqq 1$ となる実数解をもつための $x,\ y$ の条件を求める．

まず，$y = 0$ のとき与えられた方程式は

$x\alpha - 1 = 0$

これが，$\alpha \geqq 1$ となる解を持つためには，$x \fallingdotseq 0$ であり

$\alpha = \dfrac{1}{x} \geqq 1 \qquad \therefore \quad 0 < x \leqq 1$

次に，$y \fallingdotseq 0$ のとき，与えられた方程式は

$\alpha^2 + \dfrac{x}{y}\alpha - \dfrac{1}{y} = 0$

となるので，この左辺を $f(\alpha)$ とおき，$f(\alpha) = 0$ が $\alpha \geqq 1$ で解をもつ条件を求める．

図 2

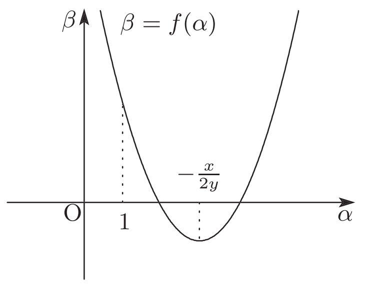
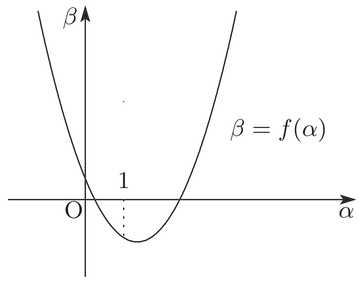


図 3



(i) $\alpha \geqq 1$ で解を 2 つ (重解を含む) もつとき (図 2 参照)

$f(\alpha) = 0$ の判別式 D について

$D = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 4 \cdot \dfrac{1}{y} \geqq 0$

また，$\beta = f(\alpha)$ の軸について

$-\dfrac{x}{2y} \geqq 1$

さらに，端点における β 座標の符号について

$f(1) = 1 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{y} \geqq 0$

3 つの不等式の両辺に $y^2\ (> 0)$ をかけて整理すると

$x^2 + 4y \geqq 0,\ y(x + 2y) \leqq 0,\ y(x + y - 1) \geqq 0$

よって

$$y \geqq -\frac{x^2}{4}$$

かつ

$$y > 0,\ x+2y \leqq 0,\ x+y-1 \geqq 0$$

または　$y < 0,\ x+2y \geqq 0,\ x+y-1 \leqq 0$

となる.

(ii) $\alpha \geqq 1$ で解を 1 つもつとき (図 3 参照)

$$f(1) = 1 + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} \leqq 0$$

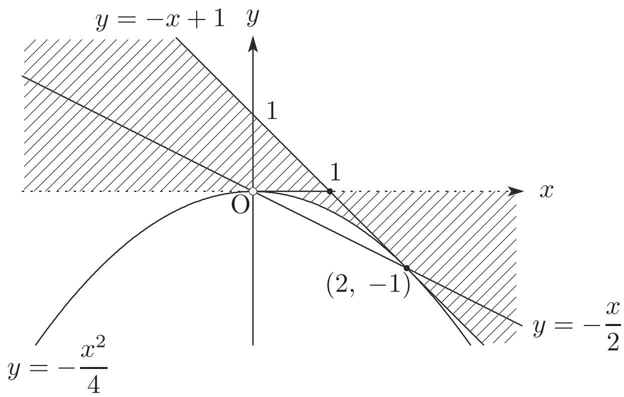
$$\therefore\quad y(x+y-1) \leqq 0$$

よって

$$y > 0,\ x+y-1 \leqq 0$$

または　$y < 0,\ x+y-1 \geqq 0$

以上より，条件をみたす点 $(x,\ y)$ の存在範囲，すなわち直線 ℓ の通過領域は次の図の斜線部のようになる．ただし，境界は実線部分を含み，破線部分を含まない．また，黒丸の点を含み，白丸の点を含まない.



【3】(1) P$(\alpha,\ \beta)$ とおく．直線 $x+y=2$ の方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

であるから，この直線に垂直なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ は，t を適当な実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

とかける．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+t\\\beta+t\end{pmatrix}$$

H は直線 $x+y=2$ 上の点だから

$$(\alpha+t)+(\beta+t)=2 \qquad \therefore\quad t=\frac{2-\alpha-\beta}{2}$$

ゆえに

$$\mathrm{H}\left(\frac{2+\alpha-\beta}{2},\ \frac{2-\alpha+\beta}{2}\right)$$

ところで，A$(\alpha,\ 0)$, B$(0,\ \beta)$ であり，3 点 H，A，B が同一直線上にあるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (k \text{ は定数})$$

となることであるから

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-\alpha-\beta\\2-\alpha+\beta\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \beta(2-\alpha-\beta)=-\alpha(2-\alpha+\beta)$$

$$\alpha^2-2\alpha+\beta^2-2\beta=0$$

$$\therefore\quad (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=2$$

したがって，点 P は

点 $(1,\ 1)$ を中心とし半径 $\sqrt{2}$ の円　　**(答)**

上にある．

(2) Q$(X,\ Y)$ とおくと，Q は半直線 OP 上にあり，かつ

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$$

$$=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

一方，P$(\alpha,\ \beta)$ は $\alpha^2-2\alpha+\beta^2-2\beta=0$ をみたすから

$$\alpha=\frac{X}{X^2+Y^2},\ \beta=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

を代入して

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2-2\cdot\frac{X+Y}{X^2+Y^2}=0$$

$$X^2+Y^2-2(X+Y)(X^2+Y^2)=0 \qquad \therefore\quad X+Y=\frac{1}{2}$$

したがって，点 Q は直線 $x+y=\frac{1}{2}$ 上にある．　　**(答)**

【4】角を 0° 以上 180° 未満にとることにより，条件 $\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ は，条件

$\cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}$ $\cdots$①

と同値である．$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1-X,\ -Y)$,

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-X,\ -Y)$,

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-X,\ -1-Y)$

となる．P は A，B，C と異なる点なので，これらは $\vec{0}$ ではない．したがって，①より，点 P がみたすべき必要十分条件は

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|}$$

である．また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|\fallingdotseq 0$ なので

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|$$

となる．これを成分で書くと

$$\begin{aligned}&\{(1-X)(-X)+(-1-Y)(-Y)\}\sqrt{(1+X)^2+Y^2}\\=&\{(-1-X)(-X)+(-1-Y)(-Y)\}\sqrt{(1-X)^2+Y^2}\end{aligned}$$

計算して

$$(X^2+Y^2+Y-X)\sqrt{X^2+Y^2+1+2X}=(X^2+Y^2+Y+X)\sqrt{X^2+Y^2+1-2X}$$

この両辺が同符号である条件

$(X^2+Y^2+Y-X)(X^2+Y^2+Y+X)\geqq 0$ $\cdots$②

の下で両辺を 2 乗することにより，条件①は

$$(X^2+Y^2+Y-X)^2(X^2+Y^2+1+2X)=(X^2+Y^2+Y+X)^2(X^2+Y^2+1-2X)$$

と同値である．つまり

$$\begin{aligned}&\{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2-2X(X^2+Y^2+Y)\}(X^2+Y^2+1+2X)\\=&\{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2+2X(X^2+Y^2+Y)\}(X^2+Y^2+1-2X)\end{aligned}$$

これを展開して，整理すると次式を得る．

$$X\{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2\}-X(X^2+Y^2+Y)(X^2+Y^2+1)=0$$

$$\therefore\quad XY(X^2+Y^2-1)=0$$

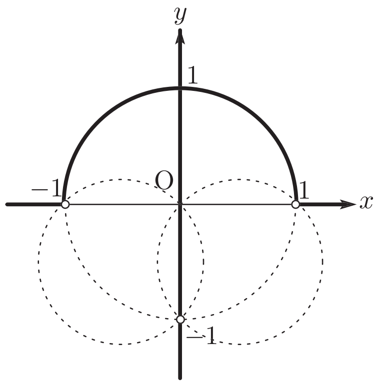
条件②は中心が $\left(\pm\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ で原点を通る 2 つの円の共通の外部か共通の内部 (と周) である．よって，求める軌跡は

$x=0$ または $y=0$ または $x^2+y^2=1$

かつ

$$\left\{\begin{array}{c}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq\dfrac{1}{2}\ \text{かつ}\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq\dfrac{1}{2}\\ \text{または}\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2}\ \text{かつ}\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

ただし，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$ は除く．　**(答)**



y
1
O
−1
1
x
−1

５章－２　微分積分２（数 III）

問題

【1】(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の両辺を x で微分して,

$$\frac{x}{2}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$$ (答)

(2) $y^2-3xy+x^2=5$ の両辺を x で微分して,

$$2y\frac{dy}{dx}-3y-3x\frac{dy}{dx}+2x=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3y-2x}{2y-3x}$$ (答)

(3) $x=\sin y\ \left(0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ (答)

(4) $\dfrac{dx}{dt}=-2\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$ より,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{2\cos t}=\frac{1}{2}\tan t$$ (答)

(5)
$$\frac{dx}{dt}=\frac{3a(1+t^3)-3at\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{6at(1+t^3)-3at^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

よって,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$ (答)

【2】(1) $y=f(x)=e^{-x^2}$ とする．

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

点 $(t,\ e^{-t^2})$ における接線は

$y-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(x-t)$

これが点 $(a,\ 0)$ を通るとき

$-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(a-t)$

$e^{-t^2}>0$ であるから

$2t^2-2at+1=0$ ……………………………………………… ①

①の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-2$

「異なる 2 本の接線が引ける」ためには，①の異なる実数解の個数が 2 個であればよいので，$a^2-2>0$ より

$a<-\sqrt{2},\ a>\sqrt{2}$　　(答)

(2) 「接線が 1 本引ける」ためには，①の実数解の個数が 1 個であればよいので

$a=\pm\sqrt{2}$, 接点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$　　(答)

【3】(1) $\angle \mathrm{AOQ} = \theta$ より，

$$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}} = a\theta$$

一方，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{\{a(\cos\theta + \theta\sin\theta) - a\cos\theta\}^2 + \{a(\sin\theta - \theta\cos\theta) - a\sin\theta\}^2} \\ &= \sqrt{(a\theta\sin\theta)^2 + (a\theta\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2\theta^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \\ &= a\theta\end{aligned}$$

よって，

$$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}} = \mathrm{PQ}$$

が成り立つ．　　(証明終)

(2) $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$，$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ より，

$$\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta + \sin\theta + \theta\cos\theta) = a\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta) = a\theta\sin\theta$$

であるから，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

よって，点 P における法線の傾きは，

$$-\frac{1}{\tan\theta} \quad (\theta \fallingdotseq n\pi : n \text{ は整数})$$

ここで，線分 OQ の傾きは，

$$\tan\theta \quad \left(\theta \fallingdotseq \frac{(2n+1)\pi}{2} : n \text{ は整数}\right)$$

であるから，点 P における法線と線分 OQ は垂直である．

一方，点 P における法線の方程式は，

$$y - a(\sin\theta - \theta\cos\theta) = -\frac{1}{\tan\theta}\{x - a(\cos\theta + \theta\sin\theta)\}$$

であるから，$x = a\cos\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}y - a(\sin\theta - \theta\cos\theta) &= -\frac{1}{\tan\theta}\{a\cos\theta - a(\cos\theta + \theta\sin\theta)\} \\ &= a\theta\cos\theta\end{aligned}$$

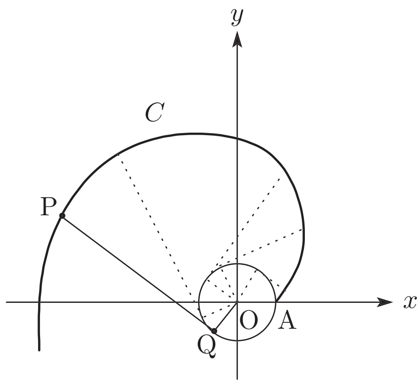
$$\therefore \quad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) + a\theta\cos\theta = a\sin\theta$$

したがって，点 P における法線は，点 $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ すなわち点 Q を通る．

これは，$\theta = n\pi$ および $\theta = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ のときも成り立つ．

以上より，点 P における曲線の法線は，点 Q で円 O に接する．　　(証明終)

《注意》(1)，(2) の結果より，点 P の軌跡は，円 O に巻かれた糸を引っ張りながら点 A から解いていったときに描かれる曲線である (右図参照).



この曲線は「円の伸開線」と呼ばれている.

一般に，ある曲線に巻きついた糸を 1 点から引っ張りながら解いていったときに描かれる曲線 C を，もとの曲線の「伸開線 (involute)」という.

逆に考えると，曲線 C 上の任意の点で法線を引いたとき，円 O はこれらの法線すべてに接する曲線である．この場合の円 O を曲線 C の「縮閉線 (evolute)」という.

【4】(1) $f(x)=x^be^{ax}$ より，

$$f'(x)=bx^{b-1}e^{ax}+x^b\cdot ae^{ax}$$
$$=(ax+b)x^{b-1}e^{ax}$$
$$f''(x)=ax^{b-1}e^{ax}+(ax+b)(b-1)x^{b-2}e^{ax}+(ax+b)x^{b-1}ae^{ax}$$
$$=x^{b-2}e^{ax}\{ax+(ax+b)(ax+b-1)\}$$

$f'(1)=0$ であるから，

$$(a+b)e^a=0 \iff a+b=0 \qquad \therefore\ a=-b$$

このとき，

$$f'(x)=b(1-x)x^{b-1}e^{-bx}$$
$$f''(x)=x^{b-2}e^{-bx}b(bx^2-2bx+b-1)$$

となる．$x>0$ において変曲点を 2 つもつので，$b\fallingdotseq 0$ に注意すれば，

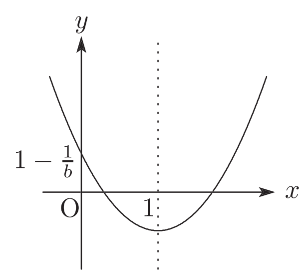
$$bx^2-2bx+b-1=0$$

が異なる 2 つの正の実数解をもてばよい．

$$bx^2-2bx+b-1=0 \iff x^2-2x+1-\frac{1}{b}=0$$
$$\iff (x-1)^2-\frac{1}{b}=0$$

であるから，軸：$x=1>0$ より，条件を満たすには右図のようになればよいから，

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{b}>0 \\ (\text{判別式})=b^2-b(b-1)>0 \end{cases}$$



$$\iff b(b-1)>0 \quad \text{かつ} \quad b>0$$
$$\therefore\ b>1$$

したがって，求める a，b の条件は，

$a+b=0$　かつ　$b>1$　　(答)

《注意》

$f''(x)$ を計算するときには，関数 f，g，h に対して，

$$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$$

となることを用いている．これは積の微分を 2 回用いれば求めることができる (各自確かめてみよ).

(2) $bx^2-2bx+b-1=0$ を解くと，

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b}}{b}$$

よって，2 つの変曲点の x 座標の差の絶対値が 1 であるから，

$$\frac{2}{b}\sqrt{b}=1 \qquad \therefore\ b=4\ (>1)$$　(答)

さらに，$a+b=0$ より，

$a=-4$　　(答)

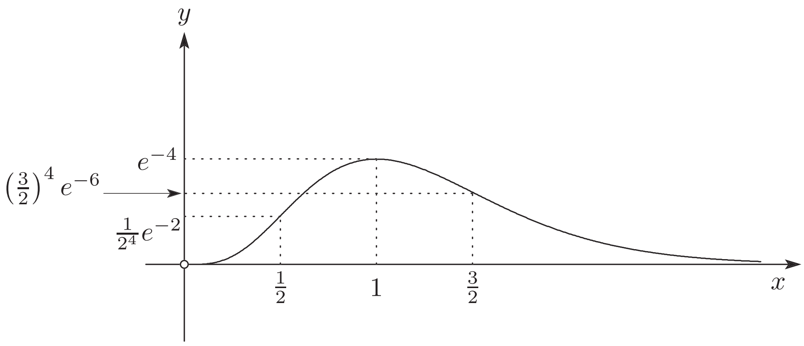
また，このときの $f(x)$ のグラフを考えると，

$$f(x)=x^4e^{-4x},$$
$$f'(x)=4(1-x)x^3e^{-4x}$$
$$f''(x)=x^2e^{-4x}\cdot 4(4x^2-8x+3)$$
$$=4x^2e^{-4x}(2x-1)(2x-3)$$

より，増減凹凸表は以下のようになる．

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	⤴		↗	e^{-4}	↘		⤵

したがって，グラフは以下のようになる．



添削課題

【1】求めるべき曲線を C とすると, 平面上のある点 $(x,\ y)$ が C 上にある条件は,

$$\begin{cases} (x-t)^2+y^2=t^2 & \cdots ① \\ y=tx & \cdots ② \\ t>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

をみたす t が存在することである.

(i) $x=0$ のとき

②は, $0\cdot t=y$ となるので, これをみたす t が存在する条件は,

$y=0$ (このとき, ②は任意の t で成立する.)

そして, $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき, ①は $t^2=t^2$ なる恒等式となるから, 結局, ①, ②, ③をみたす t が無数に存在する. よって,

$(0,\ 0)\in C$

である.

(ii) $x\neqq 0$ のとき

②は,

$$t=\frac{y}{x} \quad \cdots ②'$$

と解けるので, ①, ②, ③をみたす t が存在する条件は,

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{y}{x}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \cdots ①' \\ \dfrac{y}{x}>0 & \cdots ③' \end{cases}$$

である.

$$\begin{aligned} ①' &\iff \frac{(x^2-y)^2}{x^2}+y^2=\frac{y^2}{x^2} \\ &\iff (x^2-y)^2+x^2y^2=y^2 \text{ かつ } x^2\neqq 0 \\ &\iff x^2(x^2-2y+y^2)=0 \text{ かつ } x\neqq 0 \\ &\iff x^2-2y+y^2=0 \text{ かつ } x\neqq 0 \\ &\iff x^2+(y-1)^2=1 \text{ かつ } x\neqq 0 \end{aligned}$$

よって,

$xy>0$ かつ $x^2+(y-1)^2=1$

(i), (ii) より, C は,

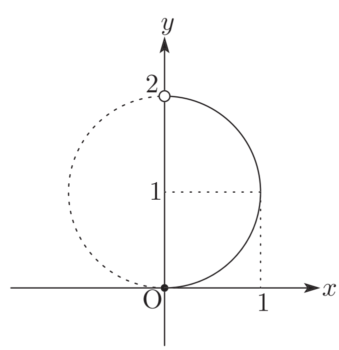
$(0,\ 0)$ または

$xy>0$ かつ $x^2+(y-1)^2=1$

である. これを図示すると, 右図のようになる.

ただし, 境界は黒丸は含み, 白丸は含まない.

(答)



問題

【1】(1) ∠A の 2 等分線と BC の交点を D とすると，∠B の 2 等分線と AD との交点が内心 I である．このとき

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}$$

また，BD : DC $= c : b$ より

$$\mathrm{BD}=\frac{c}{b+c}a$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AI}:\mathrm{ID}&=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}\\&=c:\frac{ca}{b+c}=(b+c):a\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{a+(b+c)}\\&=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\cdot\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}}{a+b+c}\\&=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}\end{aligned}$$

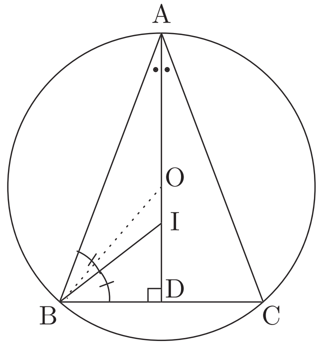
となる．［証明終］

(2) (1) で得た式の右辺において，始点を A に取り直して考える．すると，$b=c$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{1}{a+2b}\left\{-a\overrightarrow{\mathrm{AO}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})+b(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})\right\}\\&=\frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\end{aligned}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すことを考える．3 角形 ABC は AB $=$ AC の 2 等辺 3 角形であるから，∠A の 2 等分線は BC の垂直 2 等分線である．

図 1



すなわち，点 A, I, O は同一直線上にあり，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくことができる．すると $\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2$ より

$$\mathrm{AD}^2=b^2-\frac{a^2}{4}\qquad \therefore\quad \mathrm{AO}=k\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

また，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ だから

$$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OD}^2+\mathrm{BD}^2$$

$$\therefore\quad k^2\left(b^2-\frac{a^2}{4}\right)=(1-k)^2\left(b^2-\frac{a^2}{4}\right)+\frac{a^2}{4}$$

よって

$$k=\frac{2b^2}{4b^2-a^2}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\frac{2b^2}{4b^2-a^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\frac{2b^2}{4b^2-a^2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\\&=\left(\frac{b}{a+2b}-\frac{b^2}{4b^2-a^2}\right)(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{b(a-b)}{a^2-4b^2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

【2】QR の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{MQ}})=\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right|^2$$

ここで，円の中心を O とし，$\mathrm{OM}=h$ とすると，3 平方の定理より

$$\mathrm{MQ}^2=r^2-h^2$$

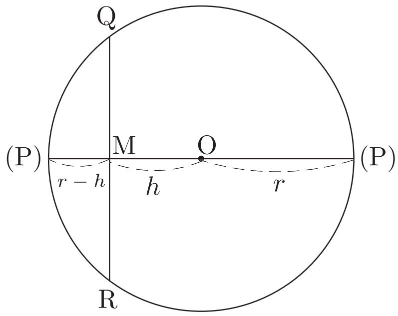
また

$\mathrm{PM}\geqq r-h$　(等号は，P，M，Oがこの順で一直線上にあるときに成立)

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\geqq(r-h)^2-(r^2-h^2)=2h^2-2rh$$

図 2



$$= 2\left(h - \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{r^2}{2} \geqq -\frac{r^2}{2}$$

P，M，O がこの順で一直線上にあり，かつ PM $=$ MO のとき，それぞれの等号は成立する．また

PM $\leqq r + h$　(等号は，P，O，Mがこの順で一直線上にあるときに成立)

であるから

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} \leqq (r+h)^2 - (r^2 - h^2) = 2h(h+r) \leqq 2r(r+r) = 4r^2$

P，O，M がこの順で一直線上にあり，かつ Q $=$ M $=$ R のとき，それぞれの等号は成立する．

以上から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の最大値は $4r^2$，最小値は $-\dfrac{r^2}{2}$.　　　(答)

【3】 題意より，C$(x,\ y,\ 0)$ とおくことができるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ b-2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ -2 \end{pmatrix} \ \cdots ①$$

S が正方形となるための必要条件は

BA $=$ BC　かつ　BA $\perp$ BC

題意より，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \neq \vec{0}$ だから，これは

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ $\cdots\cdots(*)$

と同値である．

そして，$(*)$ をみたすような点 A，B，C が存在すれば，点 D は

$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

と定まる．

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ から

$$a^2 + 1 + (b-2)^2 = x^2 + (y-3)^2 + 4$$

$$\therefore\ x^2 + (y-3)^2 = a^2 + (b-2)^2 - 3 \ \cdots ②$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ から

$$ax - (y-3) - 2(b-2) = 0$$

$$\therefore\ y - 3 = ax - 2(b-2) \ \cdots ③$$

③ を ② に代入し，x について整理すると

$$(a^2+1)x^2 - 4a(b-2)x - \{a^2 - 3(b-2)^2 - 3\} = 0 \ \cdots ④$$

ここで ④ をみたす実数 x が存在すれば，③ より y も実数となる．

したがって，求める条件は任意の実数 b に対して x の 2 次方程式 ④ が実数解をもつことである．

すなわち，④ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 4a^2(b-2)^2 + (a^2+1)\{a^2 - 3(b-2)^2 - 3\} \geqq 0$$

$$\therefore \quad (a^2-3)(b-2)^2 + (a^2+1)(a^2-3) \geqq 0$$

$$\therefore \quad (a^2-3)\{(b-2)^2 + a^2 + 1\} \geqq 0 \ \cdots ⑤$$

であり，⑤ が任意の実数 b に対して成り立つためには

$a^2 - 3 \geqq 0 \quad (\because\ (b-2)^2 + a^2 + 1 > 0)$

ゆえに，求める a の値の範囲は

$a \leqq -\sqrt{3}$ 　または　 $\sqrt{3} \leqq a$ 　　**(答)**

【4】 (1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$, $\mathrm{Q}(X,\ Y,\ Z)$ とおくと，P は AQ の中点だから

$$x = \frac{1+X}{2},\ y = \frac{1+Y}{2},\ z = \frac{1+Z}{2}$$

$$\therefore \quad X = 2x-1,\ Y = 2y-1,\ Z = 2z-1$$

Q は β 上の点なので

$X + 3Y + Z = 3 \qquad \therefore \quad (2x-1) + 3(2y-1) + (2z-1) = 3$

よって

$x + 3y + z = 4 \ \cdots ①$

一方 P は α 上の点でもあるから

$x - y - z = 1 \ \cdots ②$

2 平面 ①, ② は平行でないから，P は平面 ①, ② の交線上の点となり，これを g とすれば，P は常に定直線 g 上にある．　**[証明終]**

(2) まず，g の方程式を求める．①, ② を連立させて $y,\ z$ を x を用いて表すと

$$y = \frac{5}{2} - x,\ z = 2x - \frac{7}{2}$$

よって，g の方程式は t をパラメータとして

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \cdots ③$$

となる．すると，g に垂直で A を通る平面を考えると，この平面の法線ベクトルは $(1,\ -1,\ 2)$

で，A を通ることから，この平面の方程式は

$$(x-1) - (y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\therefore \quad x - y + 2z = 2 \ \cdots ④$$

よって，この平面と g の交点を H とすると，H の座標は，④ に ③ を代入すれば

$$t - \left(\frac{5}{2} - t\right) + 2\left(2t - \frac{7}{2}\right) - 2 = 0$$

$$6t = \frac{23}{2} \qquad \therefore \quad t = \frac{23}{12}$$

ゆえに H の座標は

$$\mathrm{H}\left(\frac{23}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{3}\right)$$

H は A から g に下ろした垂線の足に他ならないから，A から g に下ろした垂線の長さを h とおくと

$$h=\mathrm{AH}=\sqrt{\left(1-\frac{23}{12}\right)^2+\left(1-\frac{7}{12}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{210}}{12}$$

したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{210}}{12}=\frac{\sqrt{21}}{24}\qquad\text{(答)}$$

(3) R は △ABC からの距離が一定であるような点の集合だから，γ は 3 点 A，B，C を通る平面，すなわち，直線 g を含み，点 A を通る平面に平行である．そこで，この平面の方程式を求める．

まず，g を含む平面の方程式は，①，② より，k を実数として

$$(x+3y+z-4)+k(x-y-z-1)=0$$

とかける．これが A を通るから

$$1-2k=0\qquad\therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

よって，この平面の方程式は

$$(x+3y+z-4)+\frac{1}{2}(x-y-z-1)=0$$

$$\therefore\quad 3x+5y+z=9$$

γ はこの平面に平行なので，γ の方程式は

$$3x+5y+z=d$$

とかける．このとき，A と γ との距離は

$$\frac{|3+5+1-d|}{\sqrt{3^2+5^2+1^2}}=\frac{|9-d|}{\sqrt{35}}$$

これが R から △ABC に下ろした垂線の長さに一致するから，4 面体 RABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{24}\cdot\frac{|9-d|}{\sqrt{35}}=\frac{1}{24}$$

$$|9-d|=\sqrt{15}\qquad\therefore\quad d=9\pm\sqrt{15}$$

したがって，γ の方程式は

$$3x+5y+z=9\pm\sqrt{15}\qquad\text{(答)}$$

問題

【1】(1) $\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{x^2}$ より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{2}{x^3}\qquad\text{(答)}$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=e^{x^2}2x\cdot\sin 2x+e^{x^2}\cos 2x\cdot 2$$
$$=2e^{x^2}(x\sin 2x+\cos 2x)$$

より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2e^{x^2}2x(x\sin 2x+\cos 2x)+2e^{x^2}(\sin 2x+x\cos 2x\cdot 2-\sin 2x\cdot 2)$$
$$=2e^{x^2}(2x^2\sin 2x+4x\cos 2x-\sin 2x)\qquad\text{(答)}$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$ より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin x\sqrt{1+\sin x}-\cos x\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}}{1+\sin x}$$
$$=\frac{-2\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{4(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}$$
$$=\frac{-2\sin x(1+\sin x)-(1+\sin x)(1-\sin x)}{4(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}$$
$$=\frac{-(1+\sin x)^2}{4(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}=-\frac{\sqrt{1+\sin x}}{4}\qquad\text{(答)}$$

(4) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$
$$=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$$
$$=(-\tan\theta)'\cdot\frac{1}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}$$
$$=-\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{3a\cos^4\theta\sin\theta}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1) $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと

$$f'(x)=e^x-x,\qquad f''(x)=e^x-1>0\qquad (x>0)$$

より，$f'(x)$ は $x>0$ において単調増加であり，$f'(0)=1>0$ とから，

$$f'(x)>0\qquad (x>0)$$

よって，$f(x)$ は $x>0$ において単調増加であり，$f(0)=1>0$ とから，

$$f(x)>0\qquad (x>0)$$

$$\therefore\quad e^x>\frac{x^2}{2}\qquad (x>0)$$ (証明終)

(2) $x>0$ のとき

$$0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{x}\qquad (\because\ (1))$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ より，はさみうちの原理から，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$ (答) $\cdots\cdots$①

次に，① において $e^x=t$ とおくと，$x=\log t$ であり，$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$ となるから，

$$①=\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}\qquad \therefore\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$ (答) $\cdots\cdots$②

さらに，②において $\dfrac{1}{x}=u$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $u\to+0$ であるから，

$$②=\lim_{u\to+0}u\log\frac{1}{u}=\lim_{u\to+0}-u\log u=-\lim_{u\to+0}u\log u=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}x\log x=0$$ (答)

(3) $g(x)=x\log x\ (x>0)$ とおくと，

$$g'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

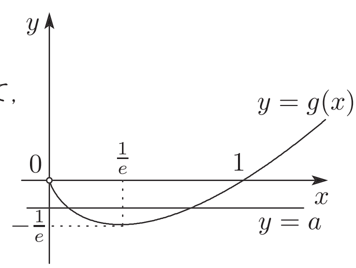
より，増減表は以下のようになる.

x	0		$\frac{1}{e}$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

また，

$$\lim_{x\to+0}g(x)=0\qquad (\because\ (2)),\qquad \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

であるから，グラフは右図.



よって，$y=g(x)$ と直線 $y=a$ の交点の個数を考えて，方程式 $g(x)=a$ の実数解の個数は

$$\begin{cases} a<-\dfrac{1}{e}\text{のとき}\quad 0\text{ 個}\\ a=-\dfrac{1}{e},\ a\geqq 0\text{ のとき}\quad 1\text{ 個}\\ -\dfrac{1}{e}<a<0\text{ のとき}\quad 2\text{ 個}\end{cases}$$

(答)

【3】(1) $\sqrt{50}=\sqrt{49+1}=\sqrt{49\left(1+\frac{1}{49}\right)}=7\sqrt{1+\frac{1}{49}}$

そこで，$f(x)=\sqrt{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，

$$f(1+h)\fallingdotseq f(1)+f'(1)\cdot h \iff \sqrt{1+h}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}h \quad (|h|\fallingdotseq 0)$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\sqrt{50}=7\sqrt{1+\frac{1}{49}}&\fallingdotseq 7\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}\right) \qquad \left(\because\ \frac{1}{49}\fallingdotseq 0\right)\\ &=7+\frac{1}{14}\\ &\fallingdotseq 7.071 \qquad (答)\end{aligned}$$

(2) $f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より，

$$f(1+h)\fallingdotseq f(1)+f'(1)\cdot h \iff \log(1+h)\fallingdotseq h \quad (|h|\fallingdotseq 0)$$

よって，

$$\begin{aligned}\log 1.01&=\log(1+0.01)\\ &\fallingdotseq 0.010 \qquad (答) \qquad (\because\ 0.01\fallingdotseq 0)\end{aligned}$$

(3) $f(x)=\sin x$ とおくと，$f'(x)=\cos x$ より，

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)\cdot h \iff \sin(a+h)\fallingdotseq \sin a+\cos a\cdot h \quad (|h|\fallingdotseq 0)$$

よって，

$$\begin{aligned}\sin 31^\circ&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\\ &\fallingdotseq \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \left(\because\ \frac{\pi}{180}\fallingdotseq 0\right)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\\ &\fallingdotseq 0.5+0.015=0.515 \qquad (答)\end{aligned}$$

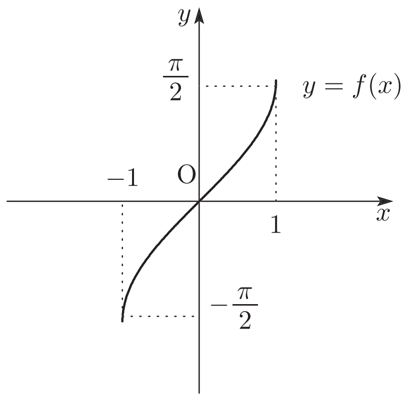
(4) $f(x)=\tan x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ より，

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)\cdot h \iff \tan(a+h)\fallingdotseq \tan a+\frac{1}{\cos^2 a}\cdot h \quad (|h|\fallingdotseq 0)$$

よって，

$$\begin{aligned}\tan 29^\circ&=\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\\ &\fallingdotseq \tan\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \qquad \left(\because\ \left|-\frac{\pi}{180}\right|\fallingdotseq 0\right)\\ &=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{180}\\ &\fallingdotseq 0.554 \qquad (答)\end{aligned}$$

【4】(1)



(2) $y = f(x)$ に対して $x = \sin y$ であり，$-1 < x < 1$ より

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \quad \cos y > 0$

であることを考慮すると

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{答})$$

(3) $y = \sin x$ において $x = 0$ のとき $y = 0$.

$\therefore \quad f(0) = 0 \qquad$ (答)

(2) の結果より

$$f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1 \qquad (\text{答})$$

また

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$\therefore \quad f''(0) = 0 \qquad \cdots\cdots$ (答)

$$f'''(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x\left\{-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x)\right\}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$\therefore \quad f'''(0) = 1 \qquad$ (答)

(4)
$$f(x) - \sum_{j=0}^{3} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j$$

$$= f(x) - \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 - \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 - \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 - \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

$$= f(x) - x - \frac{1}{6}x^3 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

① において，$f(x) = y$，$x = \sin y$ より

$$y - \sin y - \frac{1}{6}\sin^3 y = 0$$

ここで，$g(y) = y - \sin y - \frac{1}{6}\sin^3 y$ とおくと

$$g'(y) = 1 - \cos y - \frac{1}{2}\sin^2 y \cos y$$

$$= 1 - \cos y - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 y)\cos y$$
$$= \frac{1}{2}(\cos y - 1)^2(\cos y + 2) \geqq 0$$

y	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(y)$		$+$	0	$+$	
$g(y)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

よって，解の個数は 1 個．　　(答)

添削課題

【1】(1) 点 P は，円 $x^2+y^2=25$ 上の点より

$$\mathrm{P}(x,\ y)=(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)\quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$$

とおける．このとき

$$\begin{aligned} k=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= (5\cos\theta-4,\ 5\sin\theta)\cdot(5\cos\theta,\ 5\sin\theta-2)\\ &= 5\cos\theta(5\cos\theta-4)+5\sin\theta(5\sin\theta-2)\\ &= 25(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-20\cos\theta-10\sin\theta\\ &= 25-10(2\cos\theta+\sin\theta)\\ &= 25-10\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\\ &\quad \left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0^\circ<\alpha<90^\circ\right)\end{aligned}$$

$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より

$$\begin{cases} 最大値\quad 25+10\sqrt{5}\quad (\sin(\theta+\alpha)=-1 のとき)\\ 最小値\quad 25-10\sqrt{5}\quad (\sin(\theta+\alpha)=1 のとき)\end{cases}$$ **(答)**

(2) $\sin(\theta+\alpha)=-1$ のとき

$$\theta+\alpha=270^\circ \qquad \therefore\quad \theta=-\alpha+270^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= (5\cos(-\alpha+270^\circ),\ 5\sin(-\alpha+270^\circ))\\ &= (-5\sin\alpha,\ -5\cos\alpha)=\left(-2\sqrt{5},\ -\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき

$$\theta+\alpha=90^\circ \qquad \therefore\quad \theta=-\alpha+90^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= (5\cos(-\alpha+90^\circ),\ 5\sin(-\alpha+90^\circ))\\ &= (5\sin\alpha,\ 5\cos\alpha)=\left(2\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{CD}^2=\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)^2=100 \qquad \therefore\quad \mathrm{CD}=10$$ **(答)**

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(2\sqrt{5}-4,\ \sqrt{5}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-2\sqrt{5}-4,\ -\sqrt{5}\right)$$

よって

$$\begin{aligned} S=\triangle\,\mathrm{ADB}+\triangle\,\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|(2\sqrt{5}-4)\cdot 2+4\sqrt{5}\right|+\frac{1}{2}\left|(-2\sqrt{5}-4)\cdot 2-4\sqrt{5}\right|\\ &= 8\sqrt{5}\end{aligned}$$ **(答)**

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA
選抜東大・医学部理系数学
東大理系数学ⅠＡⅡＢ
東大理系数学Ⅲ
東大理系数学
難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	