M3MB

本科０期２月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学ⅠＡⅡＢ

難関大理系数学Ｍ

難関大文系数学Ｍ

４章　整数（２）

問題

【1】以下，(mod 7) で考える．

$m \equiv 3$，$n \equiv 4$ であるので，

(1) $m + 2n \equiv 3 + 2 \cdot 4 \equiv 11 \equiv 4$　　**(答)**

(2) $mn \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 5$　　**(答)**

(3) $n^3 \equiv 4^3 \equiv 16 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \equiv 1$　　**(答)**

(4) $n^3 \equiv 1$ に注目する．

$n^{2004} \equiv (n^3)^{668} \equiv 1^{668} \equiv 1$　　**(答)**

【2】(1) $13 \equiv -1 \pmod 7$ であるので，

$$\begin{aligned}与式 &\equiv (-1)^{2n} + 6 \\ &\equiv 1 + 6 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7\end{aligned}$$

よって，$13^{2n} + 6$ は 7 で割り切れる．［証明終］

(2) 与式を変形すると，

$$\begin{aligned}与式 &= 3^{n+1} + 4 \cdot 4^{2n-2} \\ &= 3^{n+1} + 4 \cdot 16^{n-1}\end{aligned}$$

$16 \equiv 3 \pmod{13}$ であるので，

$$\begin{aligned}与式 &\equiv 3^{n+1} + 4 \cdot 3^{n-1} \\ &\equiv 3^2 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} \\ &\equiv 13 \cdot 3^{n-1} \equiv 0 \pmod{13}\end{aligned}$$

よって，$3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 で割り切れる．［証明終］

【3】(1) 10 を法とする合同式で考えると,

$$53^{99} \equiv 3^{99} \pmod{10}$$

$3^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10}$ が成り立つことに注意して,

$$53^{99} \equiv \left(3^4\right)^{24} \cdot 3^3 \equiv 1^{24} \cdot 3^3 \equiv 27 \equiv 7 \quad \pmod{10}$$

したがって,53^{99} の一の位の数字は 7.　　**(答)**

(2) 下 2 桁の数字は,100 で割った余りと考えることができるので,100 を法とする合同式で考える.

$7^4 \equiv 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ が成り立つことに注意して,

$$\begin{aligned} 7^{1991} &\equiv \left(7^4\right)^{497} \cdot 7^3 \\ &\equiv 1^{497} \cdot 7^3 \\ &\equiv 343 \equiv 43 \quad \pmod{100} \end{aligned}$$

したがって,7^{1991} の下 2 桁の数字は 43.　　**(答)**

(3) (2) と同様に,100 を法とする合同式で考える.

$$2^7 \equiv 128 \equiv 28 \quad \pmod{100}$$

両辺に $2^2 = 4$ をかけて,

$$2^9 \equiv 112 \equiv 12 \quad \pmod{100}$$

両辺に $2^3 = 8$ をかけて,

$$2^{12} \equiv 96 \equiv -2^2 \quad \pmod{100}$$

よって,

$$\begin{aligned} 2^{100} - 1 &\equiv \left(2^{12}\right)^8 \cdot 2^4 - 1 \\ &\equiv \left(-2^2\right)^8 \cdot 2^4 - 1 \\ &\equiv 2^{20} - 1 \\ &\equiv 2^{12} \cdot 2^8 - 1 \\ &\equiv -2^2 \cdot 2^8 - 1 \\ &\equiv -2^{10} - 1 \\ &\equiv -1024 - 1 \\ &\equiv -25 \quad \pmod{100} \end{aligned}$$

したがって,

$$\left(2^{100} - 1\right)^{999} \equiv (-25)^{999} \equiv -25^{999} \quad \pmod{100}$$

ここで,

$$25^2 = 625 \equiv 25 \quad \pmod{100}$$

であるから,任意の正の整数 n に対して,

$$25^n \equiv 25 \pmod{100}$$

となり,

$$\left(2^{100} - 1\right)^{999} \equiv -25^{999} \equiv -25 \equiv 75 \quad \pmod{100}$$

すなわち,$\left(2^{100} - 1\right)^{999}$ の下 2 桁の数字は 75 である.　　**(答)**

＜注意＞最初の $2^{12} \equiv -2^2 \pmod{100}$ までの計算は，100 を法として 2^n の絶対値がなるべく小さいものを探している．

【4】(1) すべての整数 N について，

$$N \equiv 0, \quad N \equiv \pm 1, \quad N \equiv \pm 2, \quad N \equiv \pm 3 \pmod{7}$$

のいずれかが成り立つ．これらの両辺を 2 乗すると，

$$\begin{cases} N^2 \equiv 0 & \pmod{7} \\ N^2 \equiv 1 & \pmod{7} \\ N^2 \equiv 4 & \pmod{7} \\ N^2 \equiv 9 \equiv 2 & \pmod{7} \end{cases}$$

よって，平方数を 7 で割った余りは，0，1，2，4 のいずれかである．

[証明終]

(2) 背理法による．すなわち，

$$[A \text{ に属するすべての数の積}] = [B \text{ に属するすべての数の積}] \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つと仮定して矛盾を導く．

まず，6 数の中に 7 の倍数があるとする．連続する 6 数の中に 7 の倍数は高々 1 つしかないから，このとき ① の両辺において，一方は 7 の倍数となり，他方は 7 の倍数ではないので矛盾が生じる．よって，6 数の中に 7 の倍数は存在しない．

このとき，6 数が連続する整数であることに注意すると，これらを 7 で割った余りは，それぞれ 1，2，3，4，5，6 である．よって，これらすべての積を考えると，

$$[6 \text{ 数の積}] \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \equiv 720 \equiv 6 \pmod{7}$$

一方，① の両辺の値を p とすると，$(6 \text{ 数の積}) = p^2$ であるから，上式より，

$$p^2 \equiv 6 \pmod{7}$$

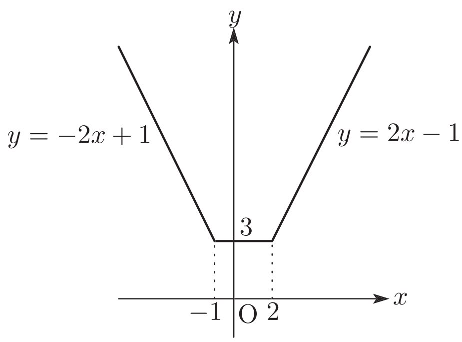
これは p^2 を 7 で割った余りが 6 であることを意味するが，このことは，(1) の結果に矛盾する．したがって，背理法により題意が示された． [証明終]

問題

【1】(1) $\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$, $\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$ より

$$y=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+1 & (x<-1)\\ 3 & (-1\leqq x<2)\\ 2x-1 & (2\leqq x)\end{cases}$$

グラフは下図のようになる.　　(答)



(2) 直線 $(2k+1)x+(k+1)y-5(k+1)=0$ は

$$k(2x+y-5)+x+y-5=0$$

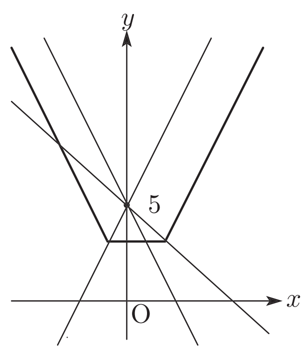
とかけるから, k の値にかかわらず, 2 直線 $2x+y-5=0$, $x+y-5=0$ の交点 (0, 5) を通る.　［証明終］

(3) $k=-1$ のとき, $x=0$ となり, 題意をみたさないので, $k\neq-1$ である.

このとき, (1) のグラフと (2) の直線とで三角形ができるためには, 右図より, その傾きが -2 より大きく -1 以下であればよい. すなわち

$$-2<-\frac{2k+1}{k+1}\leqq-1$$

$$\frac{1}{k+1}>0,\ \frac{k}{k+1}\geqq 0$$



すなわち

$$k+1>0,\ k\geqq 0$$

よって, 求める k の範囲は

$$k\geqq 0$$　(答)

【2】(1) 円 C_1 上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は

$\alpha x+\beta y=4$

これが点 P(5, 8) を通るので

$5\alpha+8\beta=4$

2 つの接点 $(\alpha_1,\ \beta_1)$，$(\alpha_2,\ \beta_2)$ はこの式をみたすので

$$\begin{cases} 5\alpha_1+8\beta_1=4 \\ 5\alpha_2+8\beta_2=4 \end{cases}$$

これは，2 つの接点 $(\alpha_1,\ \beta_1)$，$(\alpha_2,\ \beta_2)$ がともに，直線 $5x+8y=4$ 上にあることを意味する．

よって，直線 QR の方程式 l は

$l : 5x+8y=4$　　**(答)**

(2) 円 C_2 と 3 点 P，S，T をそれぞれ x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 平行移動した円と点を ${C_2}'$，P$'$，S$'$，T$'$ とする．

${C_2}' : x^2+y^2=6$，　P$'(2,\ 10)$

(1) と同様にして，直線 S$'$T$'$ の方程式は

$2x+10y=6 \quad \Leftrightarrow \quad x+5y=3$

これを x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 平行移動すると，求める直線 ST の方程式 m となるので

$m : (x-3)+5(y+2)=3 \quad \Leftrightarrow \quad x+5y=-4$　　**(答)**

(3) (1)，(2) より，2 直線 l，m の交点を通る直線は

$(5x+8y-4)+k(x+5y+4)=0$　(k は実数)

とおける．これが O(0, 0) を通るので

$-4+4k=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=1$

よって，求める直線の方程式は

$(5x+8y-4)+(x+5y+4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x+13y=0$　　**(答)**

【3】求めるべき曲線を C とすると, 平面上のある点 $(x,\ y)$ が C 上にある条件は,

$$\begin{cases} (x-t)^2+y^2=t^2 & \cdots ① \\ y=tx & \cdots ② \\ t>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

をみたす t が存在することである.

(i) $x=0$ のとき

②は, $0 \cdot t = y$ となるので, これをみたす t が存在する条件は,

$y=0$ (このとき, ②は任意の t で成立する.)

そして, $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき, ①は $t^2=t^2$ なる恒等式となるから, 結局, ①, ②, ③をみたす t が無数に存在する. よって,

$(0,\ 0) \in C$

である.

(ii) $x \fallingdotseq 0$ のとき

②は,

$$t=\frac{y}{x} \quad \cdots ②'$$

と解けるので, ①, ②, ③をみたす t が存在する条件は,

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{y}{x}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \cdots ①' \\ \dfrac{y}{x}>0 & \cdots ③' \end{cases}$$

である.

$$\begin{aligned} ①' &\Longleftrightarrow \frac{(x^2-y)^2}{x^2}+y^2=\frac{y^2}{x^2} \\ &\Longleftrightarrow (x^2-y)^2+x^2y^2=y^2 \text{ かつ } x^2 \fallingdotseq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2(x^2-2y+y^2)=0 \text{ かつ } x \fallingdotseq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2-2y+y^2=0 \text{ かつ } x \fallingdotseq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2+(y-1)^2=1 \text{ かつ } x \fallingdotseq 0 \end{aligned}$$

よって,

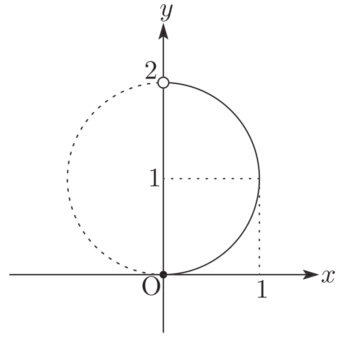
$xy>0$ かつ $x^2+(y-1)^2=1$

(i), (ii) より, C は,

$(0,\ 0)$ または

$xy>0$ かつ $x^2+(y-1)^2=1$

である. これを図示すると, 右図のようになる.



(答)

【4】点 $(p,\ q)$ は $x^2+y^2 \leqq 8,\ y \geqq 0$ で表される領域を動くから

$$p^2+q^2 \leqq 8,\ q \geqq 0 \quad \cdots①$$

$(x,\ y)=(p+q,\ pq)$ とおくと，$p,\ q$ は t に関する 2 次方程式

$$t^2-xt+y=0 \quad \cdots②$$

の 2 解であるから，②が①をみたす実数解 $p,\ q$ をもつような $x,\ y$ の条件を求めればよい．まず，実数解条件から，②の判別式を D とすると

$$D=x^2-4y \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \leqq \frac{1}{4}x^2 \quad \cdots③$$

$p^2+q^2 \leqq 8 \iff (p+q)^2-2pq \leqq 8$ より

$$x^2-2y \leqq 8 \quad \Longleftrightarrow \quad y \geqq \frac{1}{2}x^2-4 \quad \cdots④$$

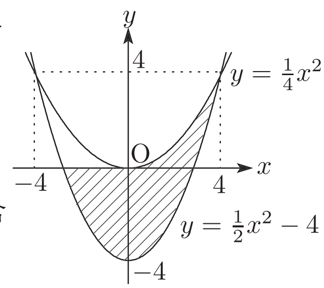
条件 $q \geqq 0$ は，少なくとも 1 つの解が 0 以上ということであるから，2 解とも負である条件

$$x=p+q<0,\ y=pq>0$$

を否定して

$$x \geqq 0 \text{ または } y \leqq 0 \quad \cdots⑤$$

③，④，⑤より，図の斜線部となる．境界はすべて含む．　　**(答)**



問題

【1】(1)

$$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{OA}=\vec{0}$$

$$\therefore\ \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)-2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)-4\overrightarrow{OA}=\vec{0}$$

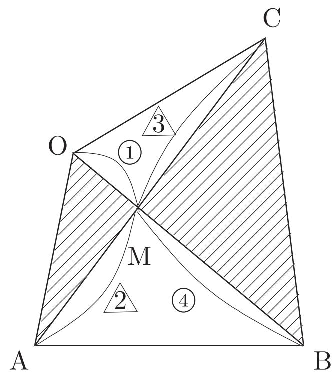
$$\therefore\ \overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}$$ (答)

(2) $\overrightarrow{OB}=5\cdot\dfrac{3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{5}$ より，

M が直線 AC 上の点であることから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{5}$$

である．



よって

$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=1:4,\quad \mathrm{AM}:\mathrm{MC}=2:3$

より，$\triangle\mathrm{OMA}=2S$ とおくと

$$\triangle\mathrm{OMC}=\frac{3}{2}\triangle\mathrm{OMA}=\frac{3}{2}\cdot 2S=3S$$

$$\triangle\mathrm{CMB}=4\triangle\mathrm{OMC}=4\cdot 3S=12S$$

よって

$$\triangle\mathrm{OMA}:\triangle\mathrm{CMB}=2S:12S=1:6$$ (答)

(3)

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2&=\left|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=9\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+4\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=9\cdot 1+12\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 1\qquad\left(\because\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\right)\\&=19\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{19}$$ (答)

【2】(1)

$s=t=0$ のとき　$r=1$　　πとの交点　$\overrightarrow{OA}$

$r=t=0$ のとき　$s=\dfrac{1}{2}$　　πとの交点　$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$　　(答)

$r=s=0$ のとき　$t=\dfrac{1}{3}$　　πとの交点　$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

(2) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OL},\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$ とする．求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AL}|^2|\overrightarrow{AM}|^2-(\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AM})^2}$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=12\cdot 12\cdot\cos 60^\circ=72$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AL}|^2&=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\frac{1}{4}\cdot 12^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 72+12^2\ =\ 108\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AM}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}\cdot 12^2 - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 72 + 12^2 \ = \ 112$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 72 - \frac{1}{3}\cdot 72 - \frac{1}{2}\cdot 72 + 144 \ = \ 96$$

よって，求める面積は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{108\cdot 112 - 96^2} \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{2^6\cdot 3^3\cdot 7 - 2^{10}\cdot 3^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^3\cdot 3\sqrt{21-16} \ = \ 12\sqrt{5} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=5,\ \mathrm{OC}=6,\ \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=7$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}{2} = 6 \qquad \text{(答)}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ である．

(2) H は平面 ABC 上にあるから，$l+m+n=1 \ \cdots$① をみたす実数 $l,\ m,\ n$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおくことができる．OH と平面 ABC が直交することから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

であるから

$$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$$

$$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$$

展開して

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 5,\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 6,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$$

をあてはめると

$$l\left(\frac{1}{2} - 25\right) + m\left(25 - \frac{1}{2}\right) + n(6-6) = 0$$

$$l(6-25) + m\left(6 - \frac{1}{2}\right) + n(36-6) = 0$$

より

$$l = m,\ -19l + \frac{11}{2}m + 30n = 0$$

これと①より

$$l = m = \frac{20}{49},\ n = \frac{9}{49}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{20}{49}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{20}{49}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{9}{49}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\triangle$ ABC は 1 辺が 7 の正三角形であるから，その面積は

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 7^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

また

$$\begin{aligned}|20\overrightarrow{\mathrm{OA}}+20\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 &= 20^2\cdot 5^2+20^2\cdot 5^2+9^2\cdot 6^2\\ &\quad +2\left(20^2\cdot\frac{1}{2}+20\cdot 9\cdot 6+9\cdot 20\cdot 6\right)\\ &= 2\cdot 20^2\cdot 5^2+9^2\cdot 6^2+20^2+4\cdot 20\cdot 9\cdot 6\\ &= (2\cdot 20+9\cdot 6)^2+47\cdot 20^2\\ &= 47\cdot 4(47+100)\\ &= 47\cdot 4\cdot 7^2\cdot 3\end{aligned}$$

よって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{49\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{47\cdot 4\cdot 7^2\cdot 3}}{49}=\frac{7\sqrt{47}}{2}\qquad\text{(答)}$$

【4】(1) $\angle$A の 2 等分線と BC の交点を D とすると，$\angle$B の 2 等分線と AD との交点が内心 I である．このとき

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}$$

また，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$ より

$$\mathrm{BD}=\frac{c}{b+c}a$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AI}:\mathrm{ID}&=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}\\ &=c:\frac{ca}{b+c}=(b+c):a\end{aligned}$$

したがって

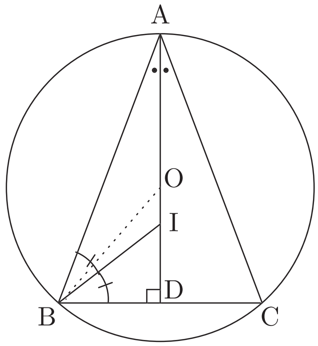
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{a+(b+c)}\\ &=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\cdot\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}}{a+b+c}\\ &=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}\end{aligned}$$

となる． [証明終]

(2) (1) で得た式の右辺において，始点を A に取り直して考える．すると，$b=c$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{1}{a+2b}\left\{-a\overrightarrow{\mathrm{AO}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})+b(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})\right\}\\ &=\frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\end{aligned}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すことを考える．3 角形 ABC は AB = AC の 2 等辺 3 角形であるから，$\angle$A の 2 等分線は BC の垂直 2 等分線である．



すなわち，点 A, I, O は同一直線上にあり，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくことができる．すると $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2$ より

$$\mathrm{AD}^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \qquad \therefore \quad \mathrm{AO} = k\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

また，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ だから

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{BD}^2$$

$$\therefore \quad k^2\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) = (1-k)^2\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{4}$$

よって

$$k = \frac{2b^2}{4b^2 - a^2}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) - \frac{2b^2}{4b^2 - a^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) - \frac{2b^2}{4b^2 - a^2} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} \\
&= \left(\frac{b}{a+2b} - \frac{b^2}{4b^2 - a^2}\right)(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\
&= \frac{b(a-b)}{a^2 - 4b^2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \qquad \textbf{(答)}
\end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) 点 P は，円 $x^2+y^2=25$ 上の点より

$$\mathrm{P}(x,\ y)=(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)\quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$$

とおける．このとき

$$\begin{aligned} k=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= (5\cos\theta-4,\ 5\sin\theta)\cdot(5\cos\theta,\ 5\sin\theta-2) \\ &= 5\cos\theta(5\cos\theta-4)+5\sin\theta(5\sin\theta-2) \\ &= 25(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-20\cos\theta-10\sin\theta \\ &= 25-10(2\cos\theta+\sin\theta) \\ &= 25-10\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha) \\ &\quad \left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0^\circ<\alpha<90^\circ\right) \end{aligned}$$

$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より

$$\begin{cases} \text{最大値}\quad 25+10\sqrt{5} \quad (\sin(\theta+\alpha)=-1\ \text{のとき}) \\ \text{最小値}\quad 25-10\sqrt{5} \quad (\sin(\theta+\alpha)=1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

(答)

(2) $\sin(\theta+\alpha)=-1$ のとき

$$\theta+\alpha=270^\circ \qquad \therefore\quad \theta=-\alpha+270^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= (5\cos(-\alpha+270^\circ),\ 5\sin(-\alpha+270^\circ)) \\ &= (-5\sin\alpha,\ -5\cos\alpha)=\left(-2\sqrt{5},\ -\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき

$$\theta+\alpha=90^\circ \qquad \therefore\quad \theta=-\alpha+90^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= (5\cos(-\alpha+90^\circ),\ 5\sin(-\alpha+90^\circ)) \\ &= (5\sin\alpha,\ 5\cos\alpha)=\left(2\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{CD}^2=\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)^2=100 \qquad \therefore\quad \mathrm{CD}=10$$

(答)

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(2\sqrt{5}-4,\ \sqrt{5}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-2\sqrt{5}-4,\ -\sqrt{5}\right)$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \triangle\,\mathrm{ADB}+\triangle\,\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|(2\sqrt{5}-4)\cdot 2+4\sqrt{5}\right|+\frac{1}{2}\left|(-2\sqrt{5}-4)\cdot 2-4\sqrt{5}\right| \\ &= 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

(答)

M3MB

難関大数学Ⅰ A Ⅱ B

難関大理系数学 M

難関大文系数学 M

Z-KAI

会員番号	

氏　名	