M3JSB/M3JB/M3TB

本科 0 期 2 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大数学ⅠＡⅡＢ

東大文系数学

難関大文系数学Ｔ

４章　整数（２）

問題

【1】以下，(mod 7) で考える．

$m \equiv 3$，$n \equiv 4$ であるので，

(1) $m+2n \equiv 3+2\cdot 4 \equiv 11 \equiv 4$　　**(答)**

(2) $mn \equiv 3\cdot 4 \equiv 12 \equiv 5$　　**(答)**

(3) $n^3 \equiv 4^3 \equiv 16\cdot 4 \equiv 2\cdot 4 \equiv 8 \equiv 1$　　**(答)**

(4) $n^3 \equiv 1$ に注目する．

$n^{2004} \equiv (n^3)^{668} \equiv 1^{668} \equiv 1$　　**(答)**

【2】(1) $13 \equiv -1 \pmod 7$ であるので，

$$\begin{aligned} \text{与式} &\equiv (-1)^{2n}+6 \\ &\equiv 1+6 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

よって，$13^{2n}+6$ は 7 で割り切れる．　[証明終]

(2) 与式を変形すると，

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 3^{n+1}+4\cdot 4^{2n-2} \\ &= 3^{n+1}+4\cdot 16^{n-1} \end{aligned}$$

$16 \equiv 3 \pmod{13}$ であるので，

$$\begin{aligned} \text{与式} &\equiv 3^{n+1}+4\cdot 3^{n-1} \\ &\equiv 3^2\cdot 3^{n-1}+4\cdot 3^{n-1} \\ &\equiv 13\cdot 3^{n-1} \equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

よって，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 で割り切れる．　[証明終]

【3】(1) 10 を法とする合同式で考えると，

$$53^{99} \equiv 3^{99} \pmod{10}$$

$3^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10}$ が成り立つことに注意して，

$$53^{99} \equiv \left(3^4\right)^{24}\cdot 3^3 \equiv 1^{24}\cdot 3^3 \equiv 27 \equiv 7 \pmod{10}$$

したがって，53^{99} の一の位の数字は 7．　**(答)**

(2) 下 2 桁の数字は，100 で割った余りと考えることができるので，100 を法とする合同式で考える．

$7^4 \equiv 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ が成り立つことに注意して，

$$\begin{aligned} 7^{1991} &\equiv \left(7^4\right)^{497}\cdot 7^3 \\ &\equiv 1^{497}\cdot 7^3 \\ &\equiv 343 \equiv 43 \pmod{100} \end{aligned}$$

したがって，7^{1991} の下 2 桁の数字は 43．　**(答)**

(3) (2) と同様に，100 を法とする合同式で考える．

$$2^7 \equiv 128 \equiv 28 \pmod{100}$$

両辺に $2^2 = 4$ をかけて，

$$2^9 \equiv 112 \equiv 12 \pmod{100}$$

両辺に $2^3 = 8$ をかけて，

$$2^{12} \equiv 96 \equiv -2^2 \pmod{100}$$

よって，

$$\begin{aligned} 2^{100} - 1 &\equiv \left(2^{12}\right)^8 \cdot 2^4 - 1 \\ &\equiv \left(-2^2\right)^8 \cdot 2^4 - 1 \\ &\equiv 2^{20} - 1 \\ &\equiv 2^{12} \cdot 2^8 - 1 \\ &\equiv -2^2 \cdot 2^8 - 1 \\ &\equiv -2^{10} - 1 \\ &\equiv -1024 - 1 \\ &\equiv -25 \pmod{100} \end{aligned}$$

したがって，

$$\left(2^{100} - 1\right)^{999} \equiv (-25)^{999} \equiv -25^{999} \pmod{100}$$

ここで，

$$25^2 = 625 \equiv 25 \pmod{100}$$

であるから，任意の正の整数 n に対して，

$$25^n \equiv 25 \ (\mathrm{mod}\ 100)$$

となり，

$$\left(2^{100} - 1\right)^{999} \equiv -25^{999} \equiv -25 \equiv 75 \pmod{100}$$

すなわち，$\left(2^{100} - 1\right)^{999}$ の下 2 桁の数字は 75 である．　**(答)**

＜注意＞最初の $2^{12} \equiv -2^2$ (mod 100) までの計算は，100 を法として 2^n の絶対値がなるべく小さいものを探している．

【4】与式の左辺を因数分解し，右辺を素因数分解すると

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$217=7\cdot 31$$

であるから，まず，$a-b$，a^2+ab+b^2 の値の組を考える．

ここで，$a^3-b^3>0$ であり

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\geqq 0$$

であるから，$a-b>0$ である．また

$$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)-(a-b)&=a^2+(b-1)a+b^2+b\\&=\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b+1)^2-1\geqq -1\end{aligned}$$

であるから

$$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(1,\ 217),\ (7,\ 31)$$

の場合を考えれば十分．

ここで

$$a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab$$

であるから

$$(a-b,\ 3ab)=(1,\ 216),\ (7,\ -18)$$

$$(a-b,\ ab)=(1,\ 72),\ (7,\ -6)$$

$$\therefore\quad (a-b,\ -ab)=(1,\ -72),\ (7,\ 6)$$

である．

(i) $(a-b,\ -ab)=(1,\ -72)$ のとき，a，$-b$ は方程式

$$t^2-t-72=0 \iff (t-9)(t+8)=0$$

の 2 解であるから

$$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9)$$

(ii) $(a-b,\ -ab)=(7,\ 6)$ のとき，a，$-b$ は方程式

$$t^2-7t+6=0 \iff (t-1)(t-6)=0$$

の 2 解であるから

$$(a,\ b)=(1,\ -6),\ (6,\ -1)$$

以上より，求める a，b の値は

$$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9),\ (1,\ -6),\ (6,\ -1)$$ **(答)**

【5】α を整数とする．

(i) $\alpha \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \\ &\equiv d \pmod 3 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \neq 0$ である．

(ii) $\alpha \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \\ &\equiv a + b + c + d \pmod 3 \\ &= f(1) \end{aligned}$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \neq 0$ である．

(iii) $\alpha \equiv -1 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \\ &\equiv -a + b - c + d \pmod 3 \\ &= f(-1) \end{aligned}$$

より，$f(\alpha)$ は 3 で割り切れないので，$f(\alpha) \neq 0$ である．

以上から，任意の整数 α に対して $f(\alpha) \neq 0$．すなわち，方程式 $f(x) = 0$ は整数解をもたない．［証明終］

【6】 n を自然数とするとき
$$A=2n+1,\quad B=n^3+1$$
とおく.

ここで
$$B=(n+1)(n^2-n+1)$$
と因数分解されることに注目すると
$$2(n+1)-(2n+1)=1$$
となるので, $n+1$ と A の公約数は 1 の約数, すなわち, $n+1$ と A は互いに素である.

したがって, A と B が互いに素でないとすれば, その 1 以外の正の公約数は
$$A,\ n^2-n+1$$
の 1 以外の正の公約数であり, それを $g\ (\geqq 2)$ とおく.

すると
$$(n^2-n+1)-(2n+1)=n(n-3)$$
であるから, g は $n(n-3)$ の約数でなくてはいけない.

ところが
$$(2n+1)-2n=1$$
だから, 前と同様にして, A と n は互いに素であるから, g は A と $n-3$ の公約数でなくてはいけない.

よって
$$(2n+1)-2(n-3)=7$$
であるから, A と $n-3$ の公約数は 7 の約数であり, g は 1 より大きい正の公約数だから
$$g=7$$
よって, $n-3$ は 7 の倍数であるから
$$n-3\equiv 0 \pmod 7 \qquad \therefore\quad n\equiv 3 \pmod 7$$
逆に, このとき
$$A\equiv 2\cdot 3+1=7\equiv 0 \pmod 7$$
$$B\equiv 3^3+1=28\equiv 0 \pmod 7$$
となり, $A,\ B$ は公約数 7 をもつので, $A,\ B$ は互いに素でない.

ゆえに, A と B が互いに素でないならば, n は「7 で割ると, 3 余る自然数」である.

(答)

【7】正整数 $a,\ b$ について，a と b の最大公約数を g とおく．

(i) $g=1$ のとき

$a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ ba$ を b で割った余りはすべて異なるから，ka を b で割った余りが 1 であるような整数 k $(1 \leqq k \leqq b)$ が存在する ($cf.$ 補足)．

このとき，$ak-1$ は b で割り切れるから，$l=\dfrac{ak-1}{b}$ とおくと，l は整数であり

$$ak-bl=ak-(ak-1)=1$$

であるから，$am+bn=1$ をみたす整数 $m,\ n$ が存在する．

(ii) $g \geqq 2$ のとき

$$a=a_0g, \quad b=b_0g \quad (a_0,\ b_0 \text{は互いに素な整数})$$

とかける．このとき

$$\begin{aligned} & am+bn=1 \\ \Longleftrightarrow \quad & g(a_0m+b_0n)=1 \ \cdots ① \end{aligned}$$

となる．ここで，① の左辺は g で割り切れるが，右辺は g $(\geqq 2)$ で割り切れないので，① は成り立たない．

すなわち，$am+bn=1$ をみたす整数 $m,\ n$ は存在しない．

以上より，$am+bn=1$ をみたす整数 $m,\ n$ が存在するための必要十分条件は $g=1$ である． ［証明終］

補足

正整数 $a,\ b$ について a と b が互いに素なとき，$a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ ba$ を b で割った余りがすべて異なることを示す．

(証明)

a と b は互いに素な正整数であるとする．

$a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ ba$ を b で割った余りが等しい組があるとし，

その組を $ka,\ la$ $(1 \leqq k < l \leqq b)$ とおくと

$$\begin{aligned} & la-ka=(l-k)a \text{ は } b \text{ の倍数} \\ \Longrightarrow \quad & l-k \text{ は } b \text{ の倍数} \quad (\because\ a \text{ と } b \text{ は互いに素}) \end{aligned}$$

となるが，これは $0<l-k<b$ に反する．

よって，$a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ ba$ を b で割った余りはすべて異なる． ［証明終］

添削課題

【1】(1) すべての整数 N について,

$$N \equiv 0,\quad N \equiv \pm 1,\quad N \equiv \pm 2,\quad N \equiv \pm 3 \pmod 7$$

のいずれかが成り立つ．これらの両辺を 2 乗すると,

$$\begin{cases} N^2 \equiv 0 & \pmod 7 \\ N^2 \equiv 1 & \pmod 7 \\ N^2 \equiv 4 & \pmod 7 \\ N^2 \equiv 9 \equiv 2 & \pmod 7 \end{cases}$$

よって，平方数を 7 で割った余りは，0，1，2，4 のいずれかである．

［証明終］

(2) 背理法による．すなわち,

$$[A \text{ に属するすべての数の積}] = [B \text{ に属するすべての数の積}] \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つと仮定して矛盾を導く．

まず，6 数の中に 7 の倍数があるとする．連続する 6 数の中に 7 の倍数は高々 1 つしかないから，このとき ① の両辺において，一方は 7 の倍数となり，他方は 7 の倍数ではないので矛盾が生じる．よって，6 数の中に 7 の倍数は存在しない．

このとき，6 数が連続する整数であることに注意すると，これらを 7 で割った余りは，それぞれ 1，2，3，4，5，6 である．よって，これらすべての積を考えると,

$$[6 \text{ 数の積}] \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \equiv 720 \equiv 6 \pmod 7$$

一方，① の両辺の値を p とすると，$(6 \text{ 数の積}) = p^2$ であるから，上式より,

$$p^2 \equiv 6 \pmod 7$$

これは p^2 を 7 で割った余りが 6 であることを意味するが，このことは，(1) の結果に矛盾する．したがって，背理法により題意が示された．［証明終］

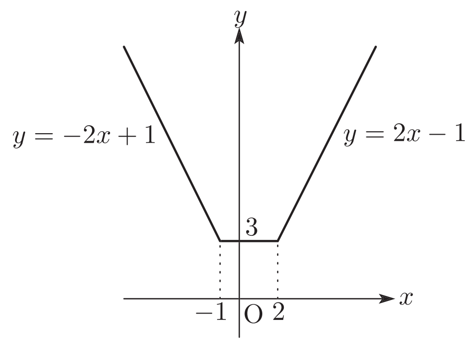
5章　図形と方程式

問題

【1】(1) $\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$, $\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$ より

$$y=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+1 & (x<-1)\\ 3 & (-1\leqq x<2)\\ 2x-1 & (2\leqq x)\end{cases}$$

グラフは下図のようになる．　　　**(答)**



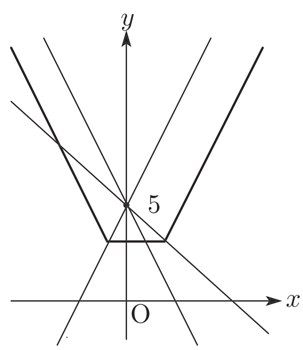
(2) 直線 $(2k+1)x+(k+1)y-5(k+1)=0$ は

$$k(2x+y-5)+x+y-5=0$$

とかけるから，k の値にかかわらず，2 直線 $2x+y-5=0$, $x+y-5=0$ の交点 (0, 5) を通る．　［証明終］

(3) $k=-1$ のとき，$x=0$ となり，題意をみたさないので，$k\fallingdotseq -1$ である．

このとき，(1) のグラフと (2) の直線とで三角形ができるためには，右図より，その傾きが -2 より大きく -1 以下であればよい．すなわち



$$-2<-\frac{2k+1}{k+1}\leqq -1$$

$$\frac{1}{k+1}>0,\ \frac{k}{k+1}\geqq 0$$

すなわち

$$k+1>0,\ k\geqq 0$$

よって，求める k の範囲は

$$k\geqq 0$$　　**(答)**

【2】(1) 円 C_1 上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は

$\alpha x+\beta y=4$

これが点 $\mathrm{P}(5,\ 8)$ を通るので

$5\alpha+8\beta=4$

2 つの接点 $(\alpha_1,\ \beta_1)$，$(\alpha_2,\ \beta_2)$ はこの式をみたすので

$$\begin{cases} 5\alpha_1+8\beta_1=4 \\ 5\alpha_2+8\beta_2=4 \end{cases}$$

これは，2 つの接点 $(\alpha_1,\ \beta_1)$，$(\alpha_2,\ \beta_2)$ がともに，直線 $5x+8y=4$ 上にあることを意味する．

よって，直線 QR の方程式 l は

$l:5x+8y=4$　　**(答)**

(2) 円 C_2 と 3 点 P，S，T をそれぞれ x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 平行移動した円と点を ${C_2}'$，P$'$，S$'$，T$'$ とする．

${C_2}':x^2+y^2=6$，　$\mathrm{P}'(2,\ 10)$

(1) と同様にして，直線 S$'$T$'$ の方程式は

$2x+10y=6 \iff x+5y=3$

これを x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 平行移動すると，求める直線 ST の方程式 m となるので

$m:(x-3)+5(y+2)=3 \iff x+5y=-4$　　**(答)**

(3) (1)，(2) より，2 直線 l，m の交点を通る直線は

$(5x+8y-4)+k(x+5y+4)=0$　(k は実数)

とおける．これが $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通るので

$-4+4k=0 \iff k=1$

よって，求める直線の方程式は

$(5x+8y-4)+(x+5y+4)=0 \iff 6x+13y=0$　　**(答)**

【3】点 $(p,\ q)$ は $x^2+y^2 \leqq 8,\ y \geqq 0$ で表される領域を動くから

$$p^2+q^2 \leqq 8,\ q \geqq 0 \quad \cdots ①$$

$(x,\ y)=(p+q,\ pq)$ とおくと，$p,\ q$ は t に関する 2 次方程式

$$t^2-xt+y=0 \quad \cdots ②$$

の 2 解であるから，②が①をみたす実数解 $p,\ q$ をもつような $x,\ y$ の条件を求めればよい．まず，実数解条件から，②の判別式を D とすると

$$D=x^2-4y \geqq 0 \iff y \leqq \frac{1}{4}x^2 \quad \cdots ③$$

$p^2+q^2 \leqq 8 \iff (p+q)^2-2pq \leqq 8$ より

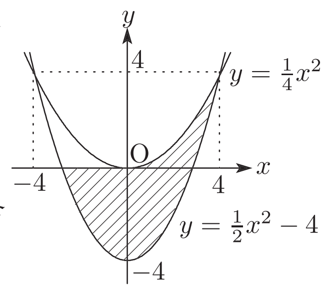
$$x^2-2y \leqq 8 \iff y \geqq \frac{1}{2}x^2-4 \quad \cdots ④$$

条件 $q \geqq 0$ は，少なくとも 1 つの解が 0 以上ということであるから，2 解とも負である条件

$$x=p+q<0,\ y=pq>0$$

を否定して

$$x \geqq 0 \text{ または } y \leqq 0 \quad \cdots ⑤$$



③，④，⑤より，図の斜線部となる．境界はすべて含む．　　**(答)**

【4】(1) 円 C の方程式を変形して

$$x^2+y^2-10-2a(x+2y-5)=0$$

より，円 C は，a の値にかかわらず

$$\begin{cases} x^2+y^2-10=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

をみたす点 $(x,\ y)$ を通る．これらを連立して解いて，求める 2 定点は

$(3,\ 1),\ (-1,\ 3)$ **(答)**

(2) 円 C の方程式を変形して

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-2a)^2 &= 5a^2-10a+10 \\ &= 5(a-1)^2+5 \geqq 5\end{aligned}$$

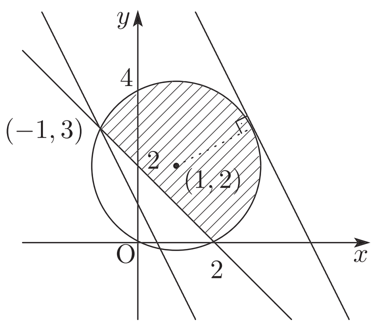
等号は $a=1$ のとき成立．よって，求める a の値は 1． **(答)**

(3) (2) より，題意の領域は

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y \leqq 0 \\ x+y \geqq 2 \end{cases} \iff \quad (x-1)^2+(y-2)^2 \leqq 5$$

である．

図 1



ここで，$2x+y=k$ とおき，以下の円 C_1 と直線 ℓ を考える．

$C_1 : (x-1)^2+(y-2)^2=5$

$\ell : y=-2x+k$

図 1 より，直線 ℓ が円 C_1 と $x>0$ の範囲で接するとき，k の値は最大となる．このとき，直線 ℓ と円 C_1 の中心との距離を考えて

$$\frac{\left|2\cdot 1+2-k\right|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\left|k-4\right|=5$$

$$\therefore \quad k=-1,\ 9$$

図 1 より $k>0$ であるから，求める最大値は 9． **(答)**

また，図 1 より，直線 ℓ が点 $(-1,\ 3)$ を通るときに k の値は最小となる．このとき

$k=2\cdot(-1)+3=1$

より，求める最小値は 1． **(答)**

【5】(1) 2つの接点の座標をそれぞれ

$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$

とおくと，この2点における C の接線の方程式はそれぞれ

$x_1x + y_1y = 1,\ x_2x + y_2y = 1$

P はこの2つの接線上の点だから

$x_1\alpha + y_1\alpha^2 = 1,\ x_2\alpha + y_2\alpha^2 = 1$

ここで，直線 $\alpha x + \alpha^2 y = 1$ を考えると，この2式より2点 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$ はともにこの直線上にある．したがって，求める直線 ℓ の方程式は

$\alpha x + \alpha^2 y = 1$　　**(答)**

(2) (1) で求めた ℓ の方程式を，α についての方程式

$y\alpha^2 + x\alpha - 1 = 0$

とみて，これが $\alpha \geqq 1$ となる実数解をもつための $x,\ y$ の条件を求める．

まず，$y = 0$ のとき与えられた方程式は

$x\alpha - 1 = 0$

これが，$\alpha \geqq 1$ となる解を持つためには，$x \neq 0$ であり

$\alpha = \dfrac{1}{x} \geqq 1 \qquad \therefore\quad 0 < x \leqq 1$

次に，$y \neq 0$ のとき，与えられた方程式は

$\alpha^2 + \dfrac{x}{y}\alpha - \dfrac{1}{y} = 0$

となるので，この左辺を $f(\alpha)$ とおき，$f(\alpha) = 0$ が $\alpha \geqq 1$ で解をもつ条件を求める．

図2

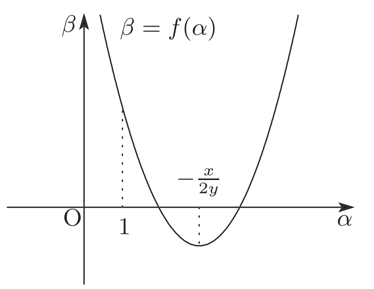
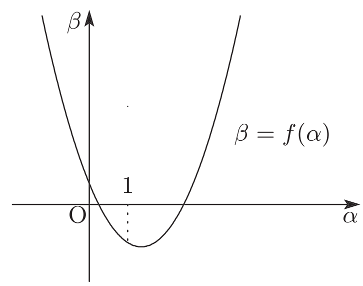


図3



(i) $\alpha \geqq 1$ で解を2つ (重解を含む) もつとき (図2参照)

$f(\alpha) = 0$ の判別式 D について

$D = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 4\cdot\dfrac{1}{y} \geqq 0$

また，$\beta = f(\alpha)$ の軸について

$-\dfrac{x}{2y} \geqq 1$

さらに，端点における β 座標の符号について

$f(1) = 1 + \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{y} \geqq 0$

3つの不等式の両辺に $y^2\ (>0)$ をかけて整理すると

$x^2 + 4y \geqq 0,\ y(x + 2y) \leqq 0,\ y(x + y - 1) \geqq 0$

よって

$$y \geqq -\frac{x^2}{4}$$

かつ

$$y > 0,\ x + 2y \leqq 0,\ x + y - 1 \geqq 0$$

または　$y < 0,\ x + 2y \geqq 0,\ x + y - 1 \leqq 0$

となる.

(ii) $\alpha \geqq 1$ で解を 1 つもつとき (図 3 参照)

$$f(1) = 1 + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} \leqq 0$$

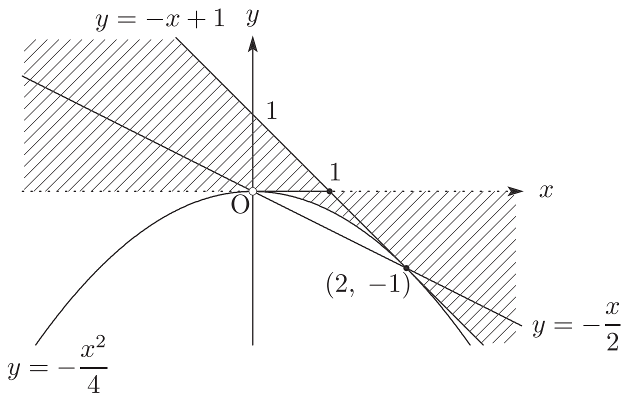
$$\therefore\quad y(x + y - 1) \leqq 0$$

よって

$$y > 0,\ x + y - 1 \leqq 0$$

または　$y < 0,\ x + y - 1 \geqq 0$

以上より，条件をみたす点 $(x,\ y)$ の存在範囲，すなわち直線 ℓ の通過領域は次の図の斜線部のようになる．ただし，境界は実線部分を含み，破線部分を含まない．また，黒丸の点を含み，白丸の点を含まない．



【6】(1) $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ とおく．直線 $x+y=2$ の方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるから，この直線に垂直なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ は，t を適当な実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかける．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PH}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+t \\ \beta+t \end{pmatrix}$$

H は直線 $x+y=2$ 上の点だから

$$(\alpha+t)+(\beta+t)=2 \qquad \therefore \quad t=\frac{2-\alpha-\beta}{2}$$

ゆえに

$$\mathrm{H}\left(\frac{2+\alpha-\beta}{2},\ \frac{2-\alpha+\beta}{2}\right)$$

ところで，$\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \beta)$ であり，3 点 H，A，B が同一直線上にあるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (k \text{ は定数})$$

となることであるから

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-\alpha-\beta \\ 2-\alpha+\beta \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \beta(2-\alpha-\beta) = -\alpha(2-\alpha+\beta)$$

$$\alpha^2-2\alpha+\beta^2-2\beta=0$$

$$\therefore \quad (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=2$$

したがって，点 P は

点 $(1,\ 1)$ を中心とし半径$\sqrt{2}$の円　　**(答)**

上にある．

(2) $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと，Q は半直線 OP 上にあり，かつ

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$$

$$= \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

一方，$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ は $\alpha^2-2\alpha+\beta^2-2\beta=0$ をみたすから

$$\alpha=\frac{X}{X^2+Y^2},\ \beta=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

を代入して

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2-2\cdot\frac{X+Y}{X^2+Y^2}=0$$

$$X^2+Y^2-2(X+Y)(X^2+Y^2)=0 \qquad \therefore \quad X+Y=\frac{1}{2}$$

したがって，点 Q は直線 $x+y=\dfrac{1}{2}$ 上にある．　　**(答)**

【7】角を 0° 以上 180° 未満にとることにより，条件 $\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ は，条件
$\cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}$ $\cdots$①
と同値である．$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1-X,\ -Y)$,
$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-X,\ -Y)$,
$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-X,\ -1-Y)$

となる．P は A，B，C と異なる点なので，これらは $\vec{0}$ ではない．したがって，①より，点 P がみたすべき必要十分条件は

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|}$$

である．また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|\neq 0$ なので

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|$$

となる．これを成分で書くと

$$\begin{aligned}&\{(1-X)(-X)+(-1-Y)(-Y)\}\sqrt{(1+X)^2+Y^2}\\=&\{(-1-X)(-X)+(-1-Y)(-Y)\}\sqrt{(1-X)^2+Y^2}\end{aligned}$$

計算して

$$(X^2+Y^2+Y-X)\sqrt{X^2+Y^2+1+2X}=(X^2+Y^2+Y+X)\sqrt{X^2+Y^2+1-2X}$$

この両辺が同符号である条件

$(X^2+Y^2+Y-X)(X^2+Y^2+Y+X)\geqq 0$ $\cdots$②

の下で両辺を 2 乗することにより，条件①は

$$(X^2+Y^2+Y-X)^2(X^2+Y^2+1+2X)=(X^2+Y^2+Y+X)^2(X^2+Y^2+1-2X)$$

と同値である．つまり

$$\begin{aligned}&\{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2-2X(X^2+Y^2+Y)\}(X^2+Y^2+1+2X)\\=&\{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2+2X(X^2+Y^2+Y)\}(X^2+Y^2+1-2X)\end{aligned}$$

これを展開して，整理すると次式を得る．

$$X\{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2\}-X(X^2+Y^2+Y)(X^2+Y^2+1)=0$$

$$\therefore\quad XY(X^2+Y^2-1)=0$$

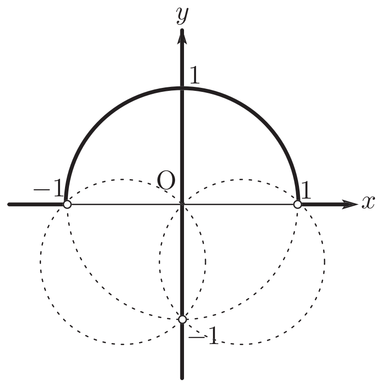
条件②は中心が $\left(\pm\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ で原点を通る 2 つの円の共通の外部か共通の内部 (と周) である．よって，求める軌跡は

$x=0$ または $y=0$ または $x^2+y^2=1$

かつ

$$\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq\dfrac{1}{2}\ \text{かつ}\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq\dfrac{1}{2}\\ \text{または}\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2}\ \text{かつ}\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

ただし，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$ は除く．　(答)



y
1
O
−1
1
x
−1

添削課題

【1】求めるべき曲線を C とすると, 平面上のある点 $(x,\ y)$ が C 上にある条件は,

$$\begin{cases} (x-t)^2+y^2=t^2 & \cdots① \\ y=tx & \cdots② \\ t>0 & \cdots③ \end{cases}$$

をみたす t が存在することである.

(i) $x=0$ のとき

②は, $0\cdot t=y$ となるので, これをみたす t が存在する条件は,

$y=0$ (このとき, ②は任意の t で成立する.)

そして, $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき, ①は $t^2=t^2$ なる恒等式となるから, 結局, ①, ②, ③をみたす t が無数に存在する. よって,

$(0,\ 0)\in C$

である.

(ii) $x\fallingdotseq 0$ のとき

②は,

$$t=\frac{y}{x} \quad \cdots②'$$

と解けるので, ①, ②, ③をみたす t が存在する条件は,

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{y}{x}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \cdots①' \\ \dfrac{y}{x}>0 & \cdots③' \end{cases}$$

である.

$$\begin{aligned} ①' &\iff \frac{(x^2-y)^2}{x^2}+y^2=\frac{y^2}{x^2} \\ &\iff (x^2-y)^2+x^2y^2=y^2 \text{ かつ } x^2\fallingdotseq 0 \\ &\iff x^2(x^2-2y+y^2)=0 \text{ かつ } x\fallingdotseq 0 \\ &\iff x^2-2y+y^2=0 \text{ かつ } x\fallingdotseq 0 \\ &\iff x^2+(y-1)^2=1 \text{ かつ } x\fallingdotseq 0 \end{aligned}$$

よって,

$xy>0$ かつ $x^2+(y-1)^2=1$

(i), (ii) より, C は,

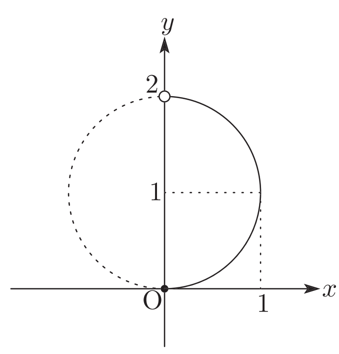
$(0,\ 0)$ または

$xy>0$ かつ $x^2+(y-1)^2=1$

である. これを図示すると, 右図のようになる.

ただし, 境界は黒丸は含み, 白丸は含まない.

(答)



問題

【1】(1)

$$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{OA}=\vec{0}$$

$$\therefore\quad \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)-2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)-4\overrightarrow{OA}=\vec{0}$$

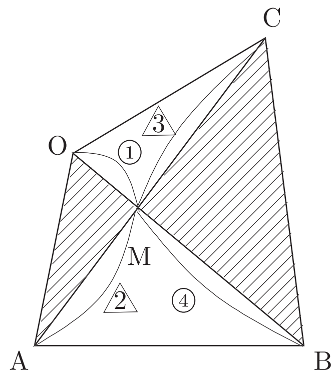
$$\therefore\quad \overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}$$ (答)

(2) $\overrightarrow{OB}=5\cdot\dfrac{3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{5}$ より，

M が直線 AC 上の点であることから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{5}$$

である．



よって

$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=1:4,\quad \mathrm{AM}:\mathrm{MC}=2:3$

より，$\triangle\,\mathrm{OMA}=2S$ とおくと

$$\triangle\,\mathrm{OMC}=\frac{3}{2}\triangle\,\mathrm{OMA}=\frac{3}{2}\cdot 2S=3S$$

$$\triangle\,\mathrm{CMB}=4\triangle\,\mathrm{OMC}=4\cdot 3S=12S$$

よって

$\triangle\,\mathrm{OMA}:\triangle\,\mathrm{CMB}=2S:12S=1:6$ (答)

(3)

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2&=\left|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=9\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+4\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=9\cdot1+12\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1\qquad\left(\because\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\right)\\&=19\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{19}$$ (答)

【2】(1)

$s=t=0$ のとき　$r=1$　　πとの交点　$\overrightarrow{OA}$

$r=t=0$ のとき　$s=\dfrac{1}{2}$　　πとの交点　$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$　　(答)

$r=s=0$ のとき　$t=\dfrac{1}{3}$　　πとの交点　$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

(2) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OL},\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$ とする．求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AL}|^2|\overrightarrow{AM}|^2-(\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AM})^2}$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=12\cdot12\cdot\cos60^\circ=72$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AL}|^2&=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\frac{1}{4}\cdot12^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot72+12^2\ =\ 108\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AM}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}\cdot 12^2 - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 72 + 12^2 \;=\; 112$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 72 - \frac{1}{3}\cdot 72 - \frac{1}{2}\cdot 72 + 144 \;=\; 96$$

よって，求める面積は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{108\cdot 112 - 96^2} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{2^6\cdot 3^3\cdot 7 - 2^{10}\cdot 3^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^3\cdot 3\sqrt{21-16} \;=\; 12\sqrt{5} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 5,\ \mathrm{OC} = 6,\ \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = 7$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}{2} = 6 \qquad \text{(答)}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ である．

(2) H は平面 ABC 上にあるから，$l + m + n = 1 \;\cdots$① をみたす実数 $l,\ m,\ n$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおくことができる．OH と平面 ABC が直交することから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

であるから

$$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$$
$$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$$

展開して

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 5,\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 6,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$$

をあてはめると

$$l\left(\frac{1}{2} - 25\right) + m\left(25 - \frac{1}{2}\right) + n(6-6) = 0$$

$$l(6-25) + m\left(6 - \frac{1}{2}\right) + n(36-6) = 0$$

より

$$l = m,\ -19l + \frac{11}{2}m + 30n = 0$$

これと①より

$$l = m = \frac{20}{49},\ n = \frac{9}{49}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{20}{49}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{20}{49}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{9}{49}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\triangle$ ABC は 1 辺が 7 の正三角形であるから，その面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 7^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

また

$$
\begin{aligned}
|20\overrightarrow{\mathrm{OA}}+20\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 &= 20^2\cdot 5^2+20^2\cdot 5^2+9^2\cdot 6^2\\
&\quad +2\left(20^2\cdot\frac{1}{2}+20\cdot 9\cdot 6+9\cdot 20\cdot 6\right)\\
&= 2\cdot 20^2\cdot 5^2+9^2\cdot 6^2+20^2+4\cdot 20\cdot 9\cdot 6\\
&= (2\cdot 20+9\cdot 6)^2+47\cdot 20^2\\
&= 47\cdot 4(47+100)\\
&= 47\cdot 4\cdot 7^2\cdot 3
\end{aligned}
$$

よって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{49\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{47\cdot 4\cdot 7^2\cdot 3}}{49}=\frac{7\sqrt{47}}{2}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\angle\mathrm{A}$ の 2 等分線と BC の交点を D とすると，$\angle\mathrm{B}$ の 2 等分線と AD との交点が内心 I である．このとき

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}$$

また，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$ より

$$\mathrm{BD}=\frac{c}{b+c}a$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AI}:\mathrm{ID}&=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}\\
&=c:\frac{ca}{b+c}=(b+c):a
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{a+(b+c)}\\
&=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\cdot\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}}{a+b+c}\\
&=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}
\end{aligned}
$$

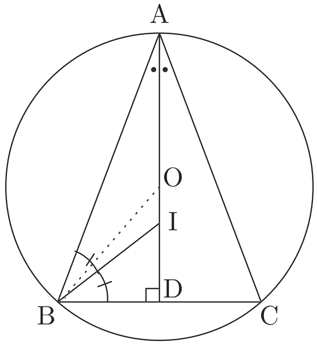
となる． ［証明終］

(2) (1) で得た式の右辺において，始点を A に取り直して考える．すると，$b=c$ であるから

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{1}{a+2b}\left\{-a\overrightarrow{\mathrm{AO}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})+b(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})\right\}\\
&=\frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-\overrightarrow{\mathrm{AO}}
\end{aligned}
$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すことを考える．3 角形 ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の 2 等辺 3 角形であるから，$\angle\mathrm{A}$ の 2 等分線は BC の垂直 2 等分線である．

図 1



すなわち，点 A, I, O は同一直線上にあり，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくことができる．すると $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2$ より

$$\mathrm{AD}^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \qquad \therefore \quad \mathrm{AO} = k\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

また，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ だから

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{BD}^2$$

$$\therefore \quad k^2\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) = (1-k)^2\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{4}$$

よって

$$k = \frac{2b^2}{4b^2 - a^2}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) - \frac{2b^2}{4b^2 - a^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \frac{b}{a+2b}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) - \frac{2b^2}{4b^2 - a^2} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} \\
&= \left(\frac{b}{a+2b} - \frac{b^2}{4b^2 - a^2}\right)(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\
&= \frac{b(a-b)}{a^2 - 4b^2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【5】QR の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{\mathrm{MR}} = \overrightarrow{\mathrm{PM}} - \overrightarrow{\mathrm{MQ}}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (\overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PM}} - \overrightarrow{\mathrm{MQ}}) = |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2$$

ここで，円の中心を O とし，$\mathrm{OM} = h$ とすると，3 平方の定理より

$$\mathrm{MQ}^2 = r^2 - h^2$$

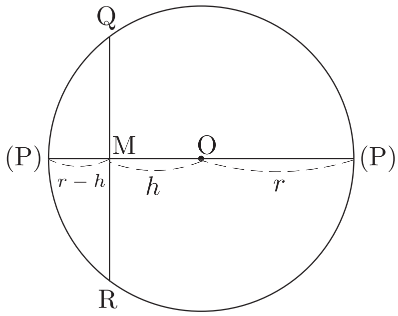
また

$\mathrm{PM} \geqq r - h$　(等号は，P，M，Oがこの順で一直線上にあるときに成立)

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} \geqq (r-h)^2 - (r^2 - h^2) = 2h^2 - 2rh$$

図 2



$$= 2\left(h - \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{r^2}{2} \geqq -\frac{r^2}{2}$$

P，M，O がこの順で一直線上にあり，かつ PM = MO のとき，それぞれの等号は成立する．また

　PM $\leqq r + h$　(等号は，P，O，Mがこの順で一直線上にあるときに成立)

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} \leqq (r+h)^2 - (r^2 - h^2) = 2h(h+r) \leqq 2r(r+r) = 4r^2$$

P，O，M がこの順で一直線上にあり，かつ Q = M = R のとき，それぞれの等号は成立する．

以上から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の最大値は $4r^2$，最小値は $-\dfrac{r^2}{2}$.　　　　(答)

【6】題意より，$\mathrm{C}(x,\ y,\ 0)$ とおくことができるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ b-2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ -2 \end{pmatrix} \ \cdots①$$

S が正方形となるための必要条件は

　BA = BC　かつ　BA ⊥ BC

題意より，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \neq \vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} \neq \vec{0}$ だから，これは

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \ \cdots\cdots(*)$$

と同値である．

そして，$(*)$ をみたすような点 A，B，C が存在すれば，点 D は

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

と定まる．

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ から

$$a^2 + 1 + (b-2)^2 = x^2 + (y-3)^2 + 4$$

$$\therefore\ x^2 + (y-3)^2 = a^2 + (b-2)^2 - 3 \ \cdots②$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ から

$$ax - (y-3) - 2(b-2) = 0$$

$$\therefore\ y - 3 = ax - 2(b-2) \ \cdots③$$

③ を ② に代入し，x について整理すると

$$(a^2+1)x^2 - 4a(b-2)x - \{a^2 - 3(b-2)^2 - 3\} = 0 \ \cdots④$$

ここで ④ をみたす実数 x が存在すれば，③ より y も実数となる．
したがって，求める条件は任意の実数 b に対して x の 2 次方程式 ④ が実数解をもつことである．
すなわち，④ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 4a^2(b-2)^2 + (a^2+1)\{a^2 - 3(b-2)^2 - 3\} \geqq 0$$

$$\therefore \quad (a^2-3)(b-2)^2 + (a^2+1)(a^2-3) \geqq 0$$

$$\therefore \quad (a^2-3)\{(b-2)^2 + a^2 + 1\} \geqq 0 \ \cdots ⑤$$

であり，⑤ が任意の実数 b に対して成り立つためには

$$a^2 - 3 \geqq 0 \quad (\because\ (b-2)^2 + a^2 + 1 > 0)$$

ゆえに，求める a の値の範囲は

$a \leqq -\sqrt{3}$　または　$\sqrt{3} \leqq a$　　**(答)**

【7】 (1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$, $\mathrm{Q}(X,\ Y,\ Z)$ とおくと，P は AQ の中点だから

$$x = \frac{1+X}{2},\ y = \frac{1+Y}{2},\ z = \frac{1+Z}{2}$$

$$\therefore \quad X = 2x-1,\ Y = 2y-1,\ Z = 2z-1$$

Q は β 上の点なので

$$X + 3Y + Z = 3 \qquad \therefore \quad (2x-1) + 3(2y-1) + (2z-1) = 3$$

よって

$$x + 3y + z = 4 \ \cdots ①$$

一方 P は α 上の点でもあるから

$$x - y - z = 1 \ \cdots ②$$

2 平面 ①, ② は平行でないから，P は平面 ①, ② の交線上の点となり，これを g とすれば，P は常に定直線 g 上にある．［証明終］

(2) まず，g の方程式を求める．①, ② を連立させて $y,\ z$ を x を用いて表すと

$$y = \frac{5}{2} - x,\ z = 2x - \frac{7}{2}$$

よって，g の方程式は t をパラメータとして

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \cdots ③$$

となる．すると，g に垂直で A を通る平面を考えると，この平面の法線ベクトルは
$(1,\ -1,\ 2)$
で，A を通ることから，この平面の方程式は

$$(x-1) - (y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\therefore \quad x - y + 2z = 2 \ \cdots ④$$

よって，この平面と g の交点を H とすると，H の座標は，④ に ③ を代入すれば

$$t - \left(\frac{5}{2} - t\right) + 2\left(2t - \frac{7}{2}\right) - 2 = 0$$

$$6t = \frac{23}{2} \qquad \therefore \quad t = \frac{23}{12}$$

ゆえに H の座標は

$$\mathrm{H}\left(\frac{23}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{3}\right)$$

H は A から g に下ろした垂線の足に他ならないから，A から g に下ろした垂線の長さを h とおくと

$$h = \mathrm{AH} = \sqrt{\left(1-\frac{23}{12}\right)^2+\left(1-\frac{7}{12}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{210}}{12}$$

したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{BC}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{210}}{12} = \frac{\sqrt{21}}{24} \qquad \text{(答)}$$

(3) R は △ABC からの距離が一定であるような点の集合だから，γ は 3 点 A，B，C を通る平面，すなわち，直線 g を含み，点 A を通る平面に平行である．そこで，この平面の方程式を求める．

まず，g を含む平面の方程式は，①，② より，k を実数として

$$(x+3y+z-4)+k(x-y-z-1)=0$$

とかける．これが A を通るから

$$1-2k=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{2}$$

よって，この平面の方程式は

$$(x+3y+z-4)+\frac{1}{2}(x-y-z-1)=0$$

$$\therefore \quad 3x+5y+z=9$$

γ はこの平面に平行なので，γ の方程式は

$$3x+5y+z=d$$

とかける．このとき，A と γ との距離は

$$\frac{\left|3+5+1-d\right|}{\sqrt{3^2+5^2+1^2}} = \frac{\left|9-d\right|}{\sqrt{35}}$$

これが R から △ABC に下ろした垂線の長さに一致するから，4 面体 RABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{24}\cdot\frac{\left|9-d\right|}{\sqrt{35}} = \frac{1}{24}$$

$$\left|9-d\right| = \sqrt{15} \qquad \therefore \quad d = 9\pm\sqrt{15}$$

したがって，γ の方程式は

$$3x+5y+z = 9\pm\sqrt{15} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) 点 P は，円 $x^2+y^2=25$ 上の点より

$$\mathrm{P}(x,\ y)=(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)\quad(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$$

とおける．このとき

$$\begin{aligned}k=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=(5\cos\theta-4,\ 5\sin\theta)\cdot(5\cos\theta,\ 5\sin\theta-2)\\&=5\cos\theta(5\cos\theta-4)+5\sin\theta(5\sin\theta-2)\\&=25(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-20\cos\theta-10\sin\theta\\&=25-10(2\cos\theta+\sin\theta)\\&=25-10\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\\&\quad\left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0^\circ<\alpha<90^\circ\right)\end{aligned}$$

$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より

$$\begin{cases}\text{最大値}\quad 25+10\sqrt{5}\quad(\sin(\theta+\alpha)=-1\ \text{のとき})\\\text{最小値}\quad 25-10\sqrt{5}\quad(\sin(\theta+\alpha)=1\ \text{のとき})\end{cases}$$ **(答)**

(2) $\sin(\theta+\alpha)=-1$ のとき

$$\theta+\alpha=270^\circ \qquad \therefore\quad \theta=-\alpha+270^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=(5\cos(-\alpha+270^\circ),\ 5\sin(-\alpha+270^\circ))\\&=(-5\sin\alpha,\ -5\cos\alpha)=\left(-2\sqrt{5},\ -\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき

$$\theta+\alpha=90^\circ \qquad \therefore\quad \theta=-\alpha+90^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=(5\cos(-\alpha+90^\circ),\ 5\sin(-\alpha+90^\circ))\\&=(5\sin\alpha,\ 5\cos\alpha)=\left(2\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{CD}^2=\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)^2=100 \qquad \therefore\quad \mathrm{CD}=10$$ **(答)**

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(2\sqrt{5}-4,\ \sqrt{5}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-2\sqrt{5}-4,\ -\sqrt{5}\right)$$

よって

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ADB}+\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|(2\sqrt{5}-4)\cdot 2+4\sqrt{5}\right|+\frac{1}{2}\left|(-2\sqrt{5}-4)\cdot 2-4\sqrt{5}\right|\\&=8\sqrt{5}\end{aligned}$$ **(答)**

M3JSB/M3JB/M3TB
選抜東大文系数学
東大数学ＩＡⅡＢ
東大文系数学
難関大文系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	