P3T

本科０期２月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大物理／難関大物理 T

４章　運動の法則

問題

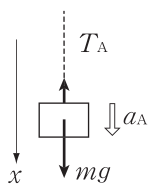
■演習

【1】

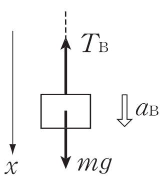
《解答》

(1)

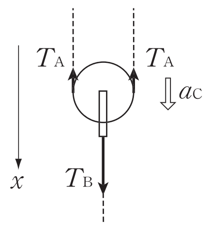
Ａの運動方程式



Ｂの運動方程式

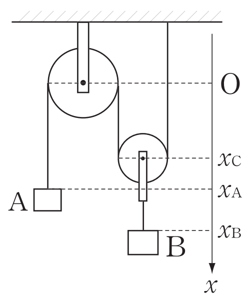


動滑車の運動方程式



$\underline{ma_{\mathrm{A}}=mg+(-T_{\mathrm{A}})}$ …①　　$\underline{ma_{\mathrm{B}}=mg+(-T_{\mathrm{B}})}$ …②　　$\underline{0\cdot a_{\mathrm{C}}=-2T_{\mathrm{A}}+T_{\mathrm{B}}}$ …③

(2) Bの移動距離はAの移動距離の $\dfrac{1}{2}$ 倍であるから　$\underline{\dfrac{1}{2}h}$



＜参考＞　Aと動滑車をつなぐ糸の長さは一定であるから

$$x_{\mathrm{A}}+2x_{\mathrm{C}}=l\ (l\ \text{は定数})\ \cdots④$$

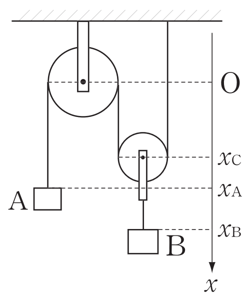
A，Bの移動距離をそれぞれ Δx_{A}，Δx_{B} とすると

$$(x_{\mathrm{A}}+\Delta x_{\mathrm{A}})+2(x_{\mathrm{C}}+\Delta x_{\mathrm{B}})=l\ (l\ \text{は定数})\ \cdots⑤$$

⑤−④より

$$\Delta x_{\mathrm{A}}+2\Delta x_{\mathrm{B}}=0 \qquad \therefore \quad |\Delta x_{\mathrm{B}}|=\frac{1}{2}|\Delta x_{\mathrm{A}}|$$

(3)　　$\underline{a_{\mathrm{A}}=-2a_{\mathrm{B}}=-2a_{\mathrm{C}}}$



＜参考＞　Aと動滑車をつなぐ糸の長さは一定であるから

$$x_{\mathrm{A}}+2x_{\mathrm{C}}=l\ (l\ \text{は定数})$$

両辺を時間 t で2回微分すると

$$\ddot{x}_{\mathrm{A}}+2\ddot{x}_{\mathrm{C}}=0 \qquad \therefore \quad \ddot{x}_{\mathrm{C}}=-\frac{1}{2}\ddot{x}_{\mathrm{A}}$$

また，Bと動滑車の加速度は等しいので

$$\ddot{x}_{\mathrm{B}}=\ddot{x}_{\mathrm{C}}=-\frac{1}{2}\ddot{x}_{\mathrm{A}}$$

(4)　　$|a_{\mathrm{A}}|=a$ とおくと，①より

$$T_{\mathrm{A}}=mg-ma$$

②より $T_{\mathrm{B}}=mg-ma_{\mathrm{B}}$ であることから，(3) の結果より

$$T_{\mathrm{B}}=mg+\frac{1}{2}ma$$

③に代入すると

$$0 = -2(mg - ma) + (mg + \frac{1}{2}ma) \qquad \therefore \quad a = \underline{\frac{2}{5}g}$$

①より

$$T_{\mathrm{A}} = mg - ma = \underline{\frac{3}{5}mg}$$

(5) 求める時間を t とおくと

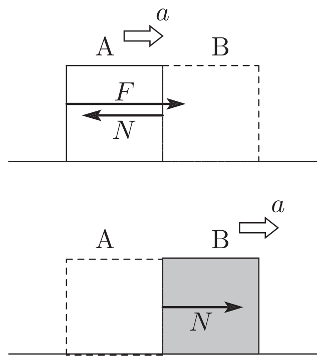
$$h = \frac{1}{2}at^2 \qquad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \underline{\sqrt{\frac{5h}{g}}}$$

【2】

《解答》

(1) (a) 重力，床からの垂直抗力，小物体 A から受ける力

(b) 小物体 A，B は鉛直方向の加速度をもたないので，力の鉛直成分はつり合っている．そこで，以下では，力の水平成分にのみ着目する．
小物体 B が小物体 A から受ける力の大きさを N とすると，小物体 A，B が受ける力は右図のように表される．
よって，運動方程式は



$$\text{A}: \quad \underline{Ma = F - N} \quad \cdots ①$$
$$\text{B}: \quad \underline{ma = N} \quad \cdots ②$$

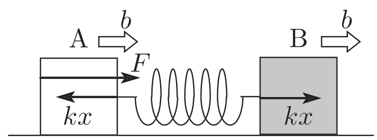
(c) ①+②より

$$(M+m)a = F \qquad \therefore \quad a = \underline{\frac{F}{M+m}}$$

なお，この a の値を②に代入すると，N は

$$N = m \cdot \frac{F}{M+m} = \frac{m}{M+m}F$$

(2) (a) 運動方程式は



$$\text{A}: \quad Mb = F - kx \quad \cdots ③$$
$$\text{B}: \quad mb = kx \quad \cdots ④$$

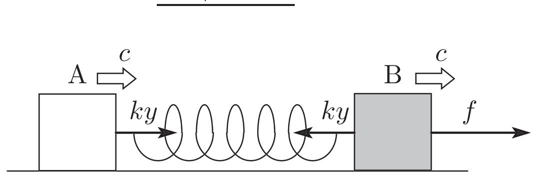
③+④より

$$(M+m)b = F \qquad \therefore \quad b = \underline{\frac{F}{M+m}}(= a)$$

また，この b の値を④に代入すると

$$m \cdot \frac{F}{M+m} = kx \qquad \therefore \quad x = \underline{\frac{m}{M+m} \cdot \frac{F}{k}}$$

(b) 小物体 A の加速度の大きさを c，ばねの自然長からの伸びを y とすると，運動方程式は



$$\text{A}: \quad Mc = ky \quad \cdots ⑤$$
$$\text{B}: \quad mc = f - ky \quad \cdots ⑥$$

⑤+⑥より

$$(M+m)c = f \qquad \therefore \quad c = \frac{f}{M+m}$$

また，この c の値を⑤に代入すると

$$M \cdot \frac{f}{M+m} = ky \qquad \therefore \quad y = \frac{M}{M+m} \cdot \frac{f}{k}$$

$x = y$ のとき

$$\frac{m}{M+m} \cdot \frac{F}{k} = \frac{M}{M+m} \cdot \frac{f}{k} \qquad \therefore \quad f = \underline{\frac{m}{M}F}$$

添削課題

《解答》

(1) A：$\underline{ma_{\mathrm{A}} = T + (-F) + (-mg)}$

B：$\underline{ma_{\mathrm{B}} = F + (-mg)}$

C：$\underline{3ma_{\mathrm{C}} = T + (-3mg)}$

(2) $\underline{a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}} = -a_{\mathrm{C}}}$

(3) $|a_{\mathrm{A}}| = a$ とすると

$ma = T - F - mg \cdots$①　　$ma = F - mg \cdots$②　　$3m(-a) = T - 3mg \cdots$③

①+②−③より　　$5ma = mg$　　$\therefore \quad a = \underline{\dfrac{1}{5}g}$

(4) (3) の結果を③に代入して　　$3m \times \left(-\dfrac{1}{5}g\right) = T - 3mg$　　$\therefore \quad T = \underline{\dfrac{12}{5}mg}$

(3) の②より　　$m \times \dfrac{1}{5}g = F - mg$　　$\therefore \quad F = \underline{\dfrac{6}{5}mg}$

(5) ばねののびを x とすると $F = kx$ より $x = \underline{\dfrac{6mg}{5k}}$

配点

(1) 各 10 点　(2) 10 点　(3) 15 点　(4) 各 15 点　(5) 15 点

5章　摩擦力

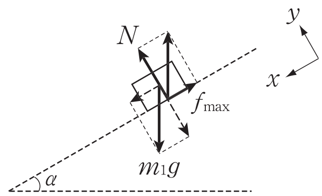
問題

■演習

【1】

《解答》

(1)
$$m\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_1 g\sin\alpha\\-m_1 g\cos\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-F\\N\end{pmatrix}$$



斜面に沿って物体がすべり落ちようとする力

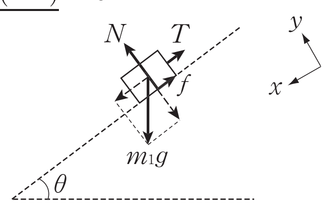
$F=\underline{m_1 g\sin\alpha}$

(2) 垂直抗力の大きさ $N=\underline{m_1 g\cos\alpha}$

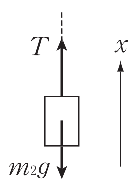
(3) 最大摩擦力 $f_{\max}=\mu N=\underline{\mu m_1 g\cos\alpha}$

(4) $m_1 g\sin\alpha=\mu m_1 g\cos\alpha \qquad \therefore\quad \mu=\dfrac{m_1 g\sin\alpha}{m_1 g\cos\alpha}=\underline{\tan\alpha}$

(5) $\underline{m_1 g\sin\theta+(-f)+(-T)}=0$



(6) $\underline{T+(-m_2 g)}=0$



(7) $m_1 g\sin\theta+(-f)+(-m_2 g)=0 \qquad \therefore\quad f=\underline{(m_1\sin\theta-m_2)g}$

(8) 2 図での物体 A の最大摩擦力を $f_{\max}{}'$ とすると，(3) と同様にして，$f_{\max}{}'=\mu m_1 g\cos\theta$ より，$0\leqq f\leqq f_{\max}{}'=\mu m_1 g\cos\theta$　また，$\mu=\tan\alpha$ より

$0\leqq f\leqq \underline{m_1 g\tan\alpha\cos\theta}$

(9) $0\leqq f$　より　$0\leqq(m_1\sin\theta-m_2)g \qquad \therefore\quad \dfrac{m_2}{m_1}\leqq\sin\theta$

$f\leqq m_1 g\tan\alpha\cos\theta$　より　$(m_1\sin\theta-m_2)g\leqq m_1 g\tan\alpha\cos\theta$

$\therefore\quad \sin\theta-\dfrac{m_2}{m_1}\leqq\tan\alpha\cos\theta \qquad \therefore\quad \underline{\sin\theta-\tan\alpha\cos\theta}\leqq\dfrac{m_2}{m_1}$

(10) (5) の摩擦力の向きが反対になるから　$\underline{m_1 g\sin\theta+f+(-T)}=0$

(11) (6)(10) より　$m_1 g\sin\theta+f+(-m_2 g)=0 \qquad \therefore\quad f=\underline{(m_2-m_1\sin\theta)g}$

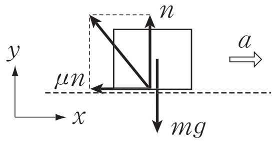
(12) $0\leqq f\leqq m_1 g\tan\alpha\cos\theta$　であることから (11) の結果を代入して

$\sin\theta\leqq\dfrac{m_2}{m_1}\leqq\underline{\sin\theta+\tan\alpha\cos\theta}$

【2】

《解答》

(1) 小物体が板から受ける垂直抗力の大きさを n とすると，運動方程式は



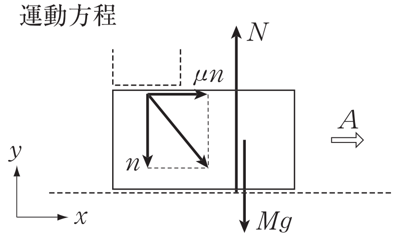
$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu n \\ n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} ma = -\mu n & \cdots\cdots ① \\ 0 = -mg + n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より　　$n = mg$

①より　　$ma = -\mu mg \qquad \therefore \quad a = \underline{-\mu g}$

(2) 板が床から受ける垂直抗力の大きさを N とすると，運動方程式は



$$M\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu n \\ -n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} MA = \mu n & \cdots\cdots ③ \\ 0 = -Mg + N - n & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

②，③より　　$MA = \mu mg \qquad \therefore \quad A = \underline{\dfrac{\mu mg}{M}}$

(3)　小物体の速度は　$v = v_0 + (-\mu g)t \qquad \therefore \quad v = \underline{v_0 - \mu gt}$

板の速度は　$V = 0 + \dfrac{\mu mg}{M}t \qquad \therefore \quad V = \underline{\dfrac{\mu mg}{M}t}$

(4)　小物体が板に対して静止するとき，小物体と板の床に対する速度が等しくなるので

$$v_0 - \mu gT = \frac{\mu mg}{M}T$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{m}{M}\right)\mu gT = v_0 \qquad \therefore \quad T = \underline{\frac{Mv_0}{\mu(m+M)g}}$$

そのときの速度は　$V' = \dfrac{\mu mg}{M}T = \dfrac{\mu mg}{M}\left\{\dfrac{Mv_0}{\mu(m+M)g}\right\} = \underline{\dfrac{m}{m+M}v_0}$

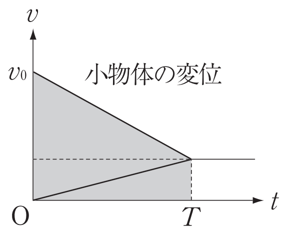
(5)　小物体が板に対して静止するまでに，小物体が床に対して移動した距離を x，板が床に対して移動した距離を X とすると

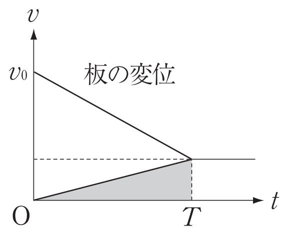
$$x = v_0T - \frac{1}{2}\mu gT^2,\ X = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu mg}{M}\right)T^2$$

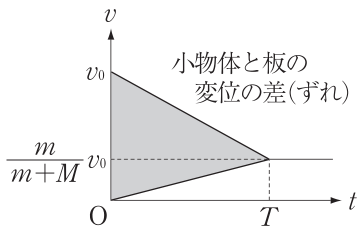
よって，小物体が板に対して移動した距離は

$$\begin{aligned} x - X &= v_0T - \frac{1}{2}\mu gT^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu mg}{M}\right)T^2 = v_0T - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{M+m}{M}\right)T^2 \\ &= v_0\left\{\frac{Mv_0}{\mu(m+M)g}\right\} - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{M+m}{M}\right)\left\{\frac{Mv_0}{\mu(m+M)g}\right\}^2 \\ &= \underline{\frac{M{v_0}^2}{2\mu(m+M)g}} \end{aligned}$$

■ (5) の別解　$v-t$ グラフの面積から求めると







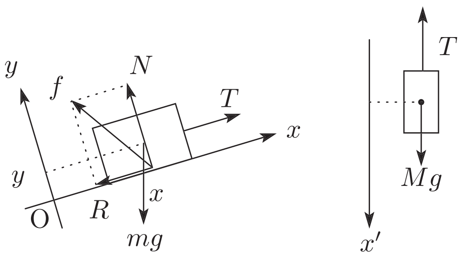
$v-t$ グラフの面積より

$$x-X=\frac{1}{2}v_0T=\frac{1}{2}\times v_0\times\frac{Mv_0}{\mu(m+M)g}=\underline{\frac{Mv_0{}^2}{2\mu(m+M)g}}$$

添削課題

《解答》

(1) 右図の設定で,



$$\ddot{x} = \ddot{x}' = a_1$$

$$\therefore \quad ma_1 = T - R - mg\sin\theta \qquad \cdots ①$$

$$m \cdot 0 = N - mg\cos\theta \qquad \cdots ②$$

$$\frac{R}{N} = \mu' \qquad \cdots ③$$

$$Ma_1 = -T + Mg \qquad \cdots ④$$

②, ③より

$$R = \mu' N = \mu' mg\cos\theta$$

これと ①+④ より

$$(M+m)a_1 = \{M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta)\}g$$

$$\therefore \quad a_1 = \underline{\frac{M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta)}{M+m} g} \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

① × M − ④ × m より,

$$T = \underline{\frac{M(1 + \sin\theta + \mu'\cos\theta)}{M+m} mg} \quad [\mathrm{N}]$$

(2) (1) で, $\ddot{x} = \ddot{x}' = 0$. R は静止摩擦力, ばね S の伸び r のとき $-x$ 向きに大きさ kr の弾性力が加わるので

$$m \cdot 0 = +T - kr - R - mg\sin\theta \qquad \cdots ⑤$$

$$m \cdot 0 = N - mg\cos\theta \qquad \cdots ⑥$$

$$-\mu \leqq \frac{R}{N} \leqq \mu \qquad \cdots ⑦$$

$$M \cdot 0 = -T + Mg \qquad \cdots ⑧$$

⑤, ⑧より

$$R = -kr + Mg - mg\sin\theta$$

これと⑥, ⑦より

$$(M - m(\sin\theta + \mu\cos\theta))g \leqq kr \leqq (M - m(\sin\theta - \mu\cos\theta))g$$

$$\therefore \quad \underline{\frac{1}{k}(M - m(\sin\theta + \mu\cos\theta))g}_{\,\mathrm{b}} \ [\mathrm{m}] \leqq r (= x_1) \leqq \underline{\frac{1}{k}(M - m(\sin\theta - \mu\cos\theta))g}_{\,\mathrm{c}} \ [\mathrm{m}]$$

配点

(1) 40 点　　(2) 60 点

６章　運動エネルギーと仕事

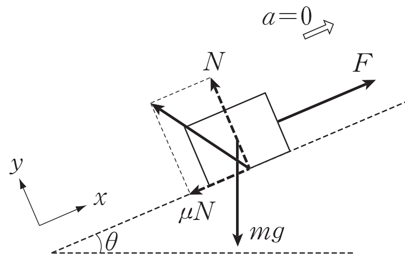
問題

■演習

【１】

《解答》

(1) 物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N, 加える力の大きさを F とすると，運動方程式は



$$m\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-mg\sin\theta\\-mg\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\mu N\\N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}0=-mg\sin\theta-\mu N+F & \cdots\cdots① \\ 0=-mg\cos\theta+N & \cdots\cdots②\end{cases}$$

②より　　$N=mg\cos\theta$

①より　　$F=mg\sin\theta+\mu N=\underline{(\sin\theta+\mu\cos\theta)mg}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{h}{\mathrm{AB}}$ より $\mathrm{AB}=\dfrac{h}{\sin\theta}$ であるから加えた力のした仕事を W_F とおくと，加えた力の向きは運動の向きであるから，加えた力のした仕事は正なので

$$W_F=(\sin\theta+\mu\cos\theta)mg\times\frac{h}{\sin\theta}=\underline{\left(1+\frac{\mu}{\tan\theta}\right)mgh}$$

(3) 摩擦力のした仕事を W_f とおくと，摩擦力の向きは運動の向きと逆向きであるから，摩擦力のした仕事は負なので

$$W_f=-\mu N\times\frac{h}{\sin\theta}=-\mu mg\cos\theta\times\frac{h}{\sin\theta}=\underline{-\frac{\mu mgh}{\tan\theta}}$$

(4) 重力のした仕事を W_g とおくと，重力の運動方向成分は運動の向きと逆向きに大きさ $mg\sin\theta$ なので

$$W_g=-mg\sin\theta\times\frac{h}{\sin\theta}=\underline{-mgh}$$

(5) 垂直抗力のした仕事を W_N とおくと，垂直抗力の運動方向成分は 0 なので

$$W_N=0\times\frac{h}{\sin\theta}=\underline{0}$$

(6) 物体がされた仕事を W とおくと，

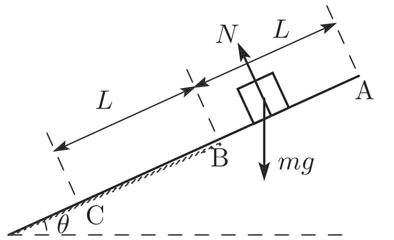
$$W=W_F+W_f+W_g+W_N=\left(1+\frac{\mu}{\tan\theta}\right)mgh-\frac{\mu mgh}{\tan\theta}-mgh+0=\underline{0}$$

＜参考＞　物体を等速度で移動させるので，運動エネルギーの変化量は 0 であり，物体がされた仕事は 0 であることがわかります。

【2】

《解答》

(1) 求める加速度を a_1 とする．
運動方程式の斜面下向き成分は，



$$ma_1 = mg\sin\theta$$
$$\therefore \quad a_1 = \underline{g\sin\theta}$$

(2) 求める時間を t_1 とすると，変位について，

$$\frac{1}{2}a_1{t_1}^2 = L$$
$$\therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_1}} = \underline{\sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}}}$$

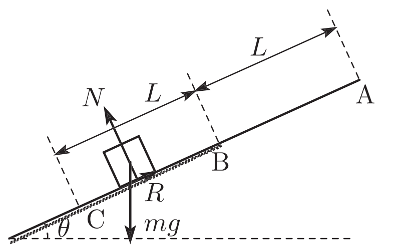
(3) 求める速さを v_1 とすると，

$$v_1 = a_1 t_1 = (g\sin\theta)\,t_1 = \underline{\sqrt{2gL\sin\theta}}$$

(4) (a) 1. 右図で，動摩擦力の大きさ R は，物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N として μ'，N を用いて，

$$R = \mu' N$$

また，運動方程式の斜面に垂直な成分は，



$$0 = N - mg\cos\theta$$
$$\therefore \quad N = mg\cos\theta$$
$$\therefore \quad R = \underline{\mu' mg\cos\theta}$$

2. 求める加速度を a_2 とすると，運動方程式の斜面に平行な成分は，

$$ma_2 = mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta$$
$$\therefore \quad a_2 = \underline{g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)}$$

3. 点 C に到達すると仮定して，求める速さを v_2 とすると，加速度と変位，速度との関係は，

$${v_2}^2 - {v_1}^2 = 2a_2 L$$
$$\therefore \quad {v_2}^2 = \left(\sqrt{2gL\sin\theta}\right)^2 + 2g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)L$$
$$\therefore \quad v_2 = \underline{\sqrt{2gL\left(2\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)}}$$

なお，このとき，v_2 が存在するためには，

$$2\sin\theta - \mu'\cos\theta > 0 \qquad \therefore \quad 2\tan\theta - \mu' > 0$$

が必要となる．

(b)　4. 位置エネルギーの基準を考えて，

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + mgL\sin\theta = \underline{2mgL\sin\theta}$$

5. 点 C での位置エネルギーは 0 であるから，

$$U_{\mathrm{C}} = \underline{\frac{1}{2}mV^2}$$

6. 摩擦力のする仕事は，

$$W_{\mathrm{BC}} = \underline{-\mu' mgL\cos\theta}$$

7. [力学的エネルギーの変化量]=[非保存力がした仕事] の関係より

$$\underline{U_{\mathrm{C}} - U_{\mathrm{B}} = W_{\mathrm{BC}}}$$

(5) $v_2 < v_1$ より，

$$\sqrt{2gL\left(2\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)} < \sqrt{2gL\sin\theta}$$
$$\therefore \quad 2\sin\theta - \mu'\cos\theta < \sin\theta$$
$$\therefore \quad \underline{\tan\theta < \mu'}$$

添削課題

《解答》

(1) 重力と垂直抗力は運動方向に対して垂直で，運動方向成分は 0 なので

　　重力がした仕事 $\underline{0}$，垂直抗力がした仕事 $\underline{0}$

(2) 重力と垂直抗力が仕事をしないので，運動エネルギーの変化量は動摩擦力がした仕事に相当するので

$$\underline{\frac{1}{2}m{v_1}^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2\ [\mathrm{J}]}$$

(3) 動摩擦力の大きさを $f[\mathrm{N}]$ とすると，運動エネルギーの変化量と外力 (動摩擦力) がした仕事の関係から

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-fl \qquad \therefore \quad f[\mathrm{N}]=\underline{\frac{m({v_0}^2-{v_1}^2)}{2l}[\mathrm{N}]}$$

(4) 物体が水平面から受ける垂直抗力の大きさを $N[\mathrm{N}]$，動摩擦係数を μ とすると，進行の向きを正とした加速度を $a[\mathrm{m/s^2}]$ として

$$\text{運動方程式} \quad m\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-f\\N\end{pmatrix} \quad \text{より} \quad N=mg$$

よって，$f=\mu N=\mu mg$

$$\therefore \quad \mu mg=\frac{m({v_0}^2-{v_1}^2)}{2l} \qquad \therefore \quad \mu=\underline{\frac{{v_0}^2-{v_1}^2}{2gl}}$$

(5) B 点から停止するまでの距離を $L[\mathrm{m}]$ とおくと，運動エネルギーの変化量と外力 (動摩擦力) がした仕事の関係から

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_1}^2=-fL \qquad \therefore \quad L[\mathrm{m}]=\frac{m{v_1}^2}{2f}=\underline{\frac{{v_1}^2}{{v_0}^2-{v_1}^2}l[\mathrm{m}]}$$

配点

(1)～(5) 各 20 点

P3T

難関大物理／難関大物理 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	