４章　摩擦力

問題

■演習

【1】

《解答》

Ⅰ (1) 静止摩擦係数

(2) 動摩擦係数

(3) 垂直抗力

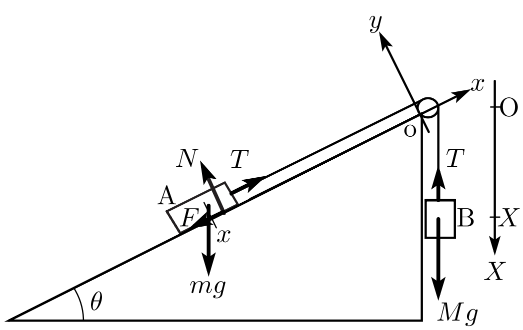
(4) 摩擦力

(5) $\tan\theta = \dfrac{F}{N}$ なので,

$$\frac{F}{N} \leqq \mu_0 \qquad \therefore \quad F \leqq \mu_0 N$$

Ⅱ (a) 下図のように座標と未知量を設定する．F は摩擦力で図の向きを正とし，図と逆向きのときに $F < 0$ とする．運動方程式の各成分は,

$$\begin{cases} M\ddot{X} = Mg - T & \cdots ① \\ m\ddot{x} = T - F - mg\sin\theta & \cdots ② \\ m \cdot 0 = N - mg\cos\theta & \therefore \quad N = mg\cos\theta \end{cases}$$



(b) 物体 A が静止を保つとき，$\ddot{X} = 0$ かつ $\ddot{x} = 0$．このとき ①，② より,

$$\begin{cases} 0 = Mg - T \\ 0 = T - F - mg\sin\theta \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} T = Mg \\ F = Mg - mg\sin\theta \end{cases}$$

また，F は静止摩擦力なので,

$$\left|\frac{F}{N}\right| \leqq \mu \qquad \therefore \quad -\mu N \leqq F \leqq \mu N$$

F，N を代入して，整理すると,

$$m(\sin\theta - \mu\cos\theta) \leqq M \leqq m(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

(c) B が下降して A が上昇するとき，$\ddot{X} = \alpha$ かつ $\ddot{x} = \alpha$．また F は動摩擦力なので，$F = \mu' N$ と表せる．このとき ①，② より，

$$\begin{cases} M\alpha = Mg - T \quad \cdots ①' \\ m\alpha = T - \mu' mg\cos\theta - mg\sin\theta \quad \cdots ②' \end{cases}$$

①′，②′ より，

$$(M+m)\alpha = (M - m\sin\theta - \mu' m\cos\theta)g \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta)}{M+m}g$$

(d) ①′ を変形して，α を代入すると，

$$\begin{aligned} T &= Mg - M\alpha \\ &= \frac{(1 + \sin\theta + \mu'\cos\theta)Mmg}{M+m} \end{aligned}$$

【2】

《解答》

(1) 加速度の大きさを a，張力の大きさを S_1 とすると，区間①におけるそれぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} 3ma = 3mg\sin\theta - S_1 \quad \cdots ⓐ \\ ma = S_1 - mg \quad \cdots ⓑ \end{cases}$$

ⓐ + ⓑ より，

$$4ma = 3mg \cdot \frac{3}{5} - mg \qquad \therefore \quad a = \frac{1}{5}g$$

(2) 動摩擦力の大きさを F_2，張力の大きさを S_2 とすると，区間②におけるそれぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} 3m \cdot 0 = 3mg\sin\theta - F_2 - S_2 \quad \cdots ⓒ \\ m \cdot 0 = S_2 - mg \quad \cdots ⓓ \end{cases}$$

ⓒ + ⓓ より，

$$0 = 3mg \cdot \frac{3}{5} - F_2 - mg \qquad \therefore \quad F_2 = \frac{4}{5}mg$$

また，垂直抗力の大きさを N として，斜面に垂直な力のつりあいより，

$$0 = N - 3mg\cos\theta \qquad \therefore \quad N = 3mg \cdot \frac{4}{5}$$

動摩擦係数の定義より，

$$\frac{4}{5}mg = \mu_2 \cdot \frac{12}{5}mg \qquad \therefore \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \fallingdotseq 0.33$$

(3) 区間③における加速度を a' とすると，

$$a' = \frac{0 - aT}{0.7T} = -\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{5}g = -\frac{2}{7}g$$

動摩擦力の大きさを F_3，張力の大きさを S_3 とすると，区間③におけるそれぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} 3ma' = 3mg\sin\theta - F_3 - S_3 \quad \cdots ⓔ \\ ma' = S_3 - mg \quad \cdots ⓕ \end{cases}$$

ⓔ + ⓕ より，

$$4m \cdot \left(-\frac{2}{7}g\right) = 3mg \cdot \frac{3}{5} - F_3 - mg \qquad \therefore \quad F_3 = \frac{68}{35}mg$$

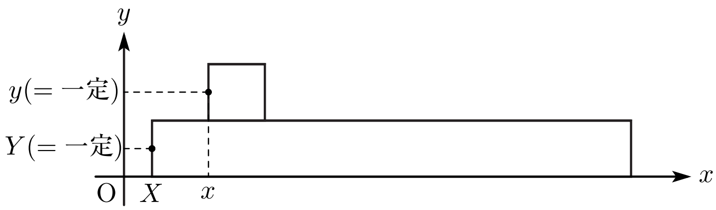
また，垂直抗力は区間②のときと等しい．(2) と同様に，動摩擦係数の定義より，

$$\frac{68}{35}mg = \mu_3 \cdot \frac{12}{5}mg \qquad \therefore \quad \mu_3 = \frac{17}{21} \fallingdotseq 0.81$$

【3】

《解答》

床に固定して，図のように座標軸を設定する．



(1) y 方向の力のつりあいより，物体が台から受ける垂直抗力は $N = mg$ と得られ，動摩擦力の大きさは μmg と表せる．運動方程式の x 成分は，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\mu mg \\ M\ddot{X} = +\mu mg \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\mu g \\ \ddot{X} = \dfrac{m}{M}\mu g \end{cases}$$

(2) (1) と初速度より，速度成分は，

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 - \mu gt \\ \dot{X}(t) = \dfrac{m}{M}\mu gt \end{cases}$$

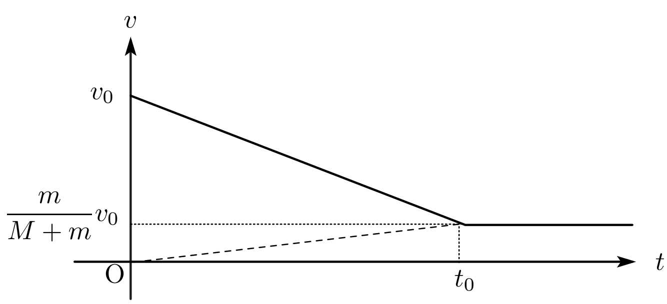
(3) $\dot{x}(t_0) = \dot{X}(t_0)$ となるとき，

$$v_0 - \mu g t_0 = \frac{m}{M}\mu g t_0 \qquad \therefore \quad t_0 = \frac{M}{M+m} \cdot \frac{v_0}{\mu g}$$

(4) 一定となったときの速度を V_0 とおくと，

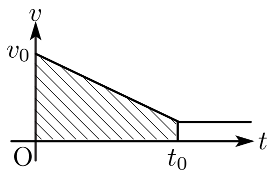
$$V_0 = \frac{m}{M}\mu g t_0 = \frac{m}{M+m}v_0$$

(5) グラフは下図のようになる．

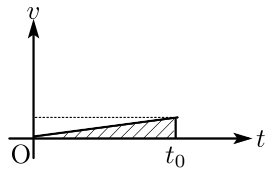


(6) v–t グラフと t 軸との間の領域の面積が変位を表すので，それぞれが時刻 t_0 までに床に対して動いた距離は下図の斜線部分の面積に相当する．

$$\int_0^{t_0} \dot{x}\mathrm{d}t =$$



$$\int_0^{t_0} \dot{X}\mathrm{d}t =$$

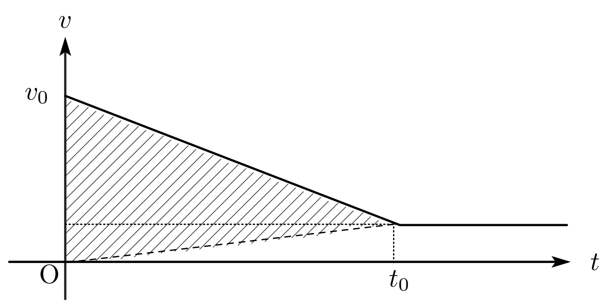


物体が板上を進んだ距離 l は物体と板の床に対する変位の差なので，

$$l = \int_0^{t_0} \dot{x}\mathrm{d}t - \int_0^{t_0} \dot{X}\mathrm{d}t$$

右辺第 1 項，第 2 項はそれぞれ左上図，右上図の面積に相当するから，l は 2 つの $v-t$ グラフの間の領域の面積に相当していて，

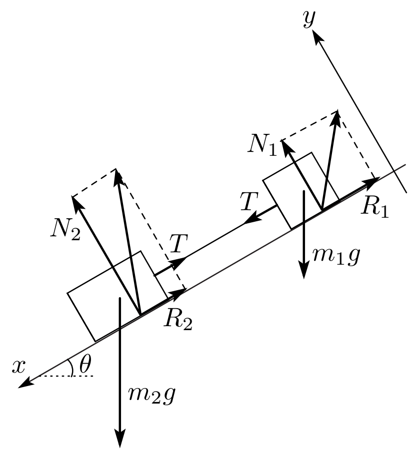
$$l = \frac{1}{2}v_0 t_0 = \frac{M{v_0}^2}{2\mu g(M+m)}$$



【4】

《解答》

重力加速度の大きさを g とする．図の静止状態で運動方程式の x，y 成分は，



$$
\begin{aligned}
0 &= +T - R_1 + m_1 g\sin\theta \quad \cdots ① \\
0 &= +N_1 - m_1 g\cos\theta \quad \cdots ② \\
0 &= -T - R_2 + m_2 g\sin\theta \quad \cdots ③ \\
0 &= +N_2 - m_2 g\cos\theta \quad \cdots ④
\end{aligned}
$$

(a) $\tan\theta < \mu_1$，μ_2：

両物体とも，単体で置いたときに滑らない条件を満たしていることになり，静止を続け，糸の張力 T は 0 のままである．

(b) $\mu_1 > \mu_2$：

θ を増していくと，$\tan\theta = \mu_2$ を満足する角度で $R_2/N_2 = \mu_2$ より，R_2 は最大摩擦力 $\mu_2 m_2 g\cos\theta = m_2 g\sin\theta$ に達する．その後さらに θ を増すと，R_2 は最大摩擦力 $\mu_2 m_2 g\cos\theta$ のままであるが，T は 0 でなくなる．この間，両物体の静止状態が保たれていれば，③式より得られる次の式が維持される．

$$0 = -T - \mu_2 m_2 g\cos\theta + m_2 g\sin\theta$$

一方，物体 1 については，静止状態が保たれるとき，①，②式より

$$\frac{R_1}{N_1} = \frac{T + m_1 g\sin\theta}{m_1 g\cos\theta} \leqq \mu_1$$

さらに θ を増していき，T が増加して等号に達した直後，両者は一体となって滑り降りる．滑り出すときの θ は，

$$
\begin{aligned}
0 &= -T - \mu_2 m_2 g\cos\theta + m_2 g\sin\theta \\
0 &= +T - \mu_1 m_1 g\cos\theta + m_1 g\sin\theta
\end{aligned}
$$

から T を消去し，

$$\tan\theta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

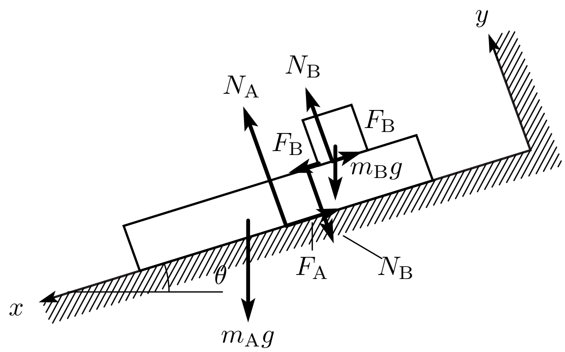
(c) $\mu_1 < \mu_2$：

θ を増していき $\tan\theta = \mu_1$ を満足する角度で，物体 1 が先に滑り出し，静止している物体 2 に衝突する．

添削課題

《解答》

図の設定で，運動方程式は，



$$\mathrm{A}\begin{cases} m_\mathrm{A}\cdot a = -F_\mathrm{A}+F_\mathrm{B}+m_\mathrm{A}g\sin\theta \\ m_\mathrm{A}\cdot 0 = N_\mathrm{A}-N_\mathrm{B}-m_\mathrm{A}g\cos\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{B}\begin{cases} m_\mathrm{B}\cdot b = -F_\mathrm{B}+m_\mathrm{B}g\sin\theta \\ m_\mathrm{B}\cdot 0 = +N_\mathrm{B}-m_\mathrm{B}g\cos\theta \end{cases}$$

摩擦力はともに動摩擦力なので，

$$\begin{cases} \dfrac{F_\mathrm{A}}{N_\mathrm{A}} = \mu_\mathrm{A} \\ \dfrac{F_\mathrm{B}}{N_\mathrm{B}} = \mu_\mathrm{B} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} F_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{A}N_\mathrm{A} \\ F_\mathrm{B} = \mu_\mathrm{B}N_\mathrm{B} \end{cases}$$

以上より，F_A と F_B を消去すると，

$$\begin{cases} m_\mathrm{A}\cdot a = -\mu_\mathrm{A}N_\mathrm{A}+\mu_\mathrm{B}N_\mathrm{B}+m_\mathrm{A}g\sin\theta & \cdots ① \\ m_\mathrm{A}\cdot 0 = N_\mathrm{A}-N_\mathrm{B}-m_\mathrm{A}g\cos\theta & \cdots ② \\ m_\mathrm{B}\cdot b = -\mu_\mathrm{B}N_\mathrm{B}+m_\mathrm{B}g\sin\theta & \cdots ③ \\ m_\mathrm{B}\cdot 0 = N_\mathrm{B}-m_\mathrm{B}g\cos\theta & \cdots ④ \end{cases}$$

(1) ②，④より N_A と N_B を求め，①に代入すると，

$$m_\mathrm{A}a = -\mu_\mathrm{A}\cdot(m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B})g\cos\theta+\mu_\mathrm{B}\cdot m_\mathrm{B}g\cos\theta+m_\mathrm{A}g\sin\theta$$

$$\therefore\quad a = \left\{\sin\theta-\left(1+\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)\mu_\mathrm{A}\cos\theta+\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\mu_\mathrm{B}\cos\theta\right\}g$$

(2) ④より N_B を求め，③に代入すると，

$$m_\mathrm{B}b = -\mu_\mathrm{B}m_\mathrm{B}g\cos\theta+m_\mathrm{B}g\sin\theta$$

$$\therefore\quad b = (\sin\theta-\mu_\mathrm{B}\cos\theta)g$$

(3) 問題文より，$b>a$ すなわち $b-a>0$ なので，

$$\left(1+\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}}\right)(\mu_\mathrm{A}-\mu_\mathrm{B})g\cos\theta>0 \qquad \therefore\quad \mu_\mathrm{A}>\mu_\mathrm{B}$$

配点

100 点

(1)，(2) →各 40 点　(3) → 20 点

5章　弾性力と抵抗力

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) ばねの伸びを r_1，r_2 とおく．弾性力の大きさが F なので，

$$k(r_1+r_2)=F \qquad \therefore \quad r_1+r_2=\frac{F}{k}$$

ばねが均質のとき，伸びは自然長に比例するので，

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{r_2}{r_1} \qquad \therefore \quad \frac{r_1}{l_1}=\frac{r_2}{l_2}$$

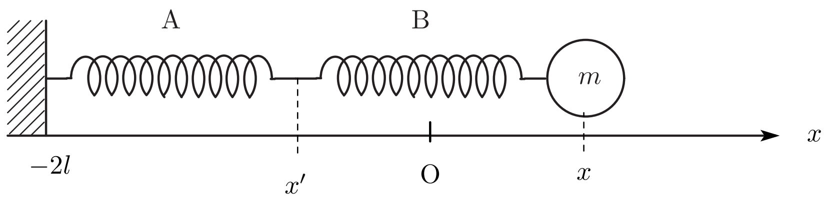
これらより，

$$r_1=\frac{l_1}{l_1+l_2}\cdot\frac{F}{k}, \qquad r_2=\frac{l_2}{l_1+l_2}\cdot\frac{F}{k}$$

ばね定数の定義より，

$$k_1=\frac{F}{r_1}=\frac{l_1+l_2}{l_1}k, \qquad k_2=\frac{F}{r_2}=\frac{l_1+l_2}{l_2}k$$

(2) 自然長のときの小球の位置を原点とした図の座標設定で，ばね A，B の伸びを r_A，r_B とおく．これらの値が負のとき，ばねは縮んでいる．



小球に作用する弾性力は，

$$F=-k_\mathrm{B}r_\mathrm{B} \quad \cdots ①$$

ばね A，B の伸びの和が小球の座標 x と一致するので，

$$x=r_\mathrm{A}+r_\mathrm{B} \quad \cdots ②$$

r_A を消去する目的で，A，B を接合する微小部分に注目する．この部分の質量を 0 とみなすと，運動方程式の x 成分は，

$$0\times\ddot{x}'=-k_\mathrm{A}r_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}r_\mathrm{B} \qquad \therefore \quad r_\mathrm{A}=\frac{k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}}r_\mathrm{B} \quad \cdots ③$$

②，③より，

$$\frac{k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}}r_\mathrm{B}+r_\mathrm{B}=x \qquad \therefore \quad r_\mathrm{B}=\frac{k_\mathrm{A}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}x$$

①に代入すると，

$$F = -\frac{k_\mathrm{A}k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}x \qquad \therefore \quad k_\mathrm{C} = \frac{k_\mathrm{A}k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}$$

(3) A，B の伸びを r_A，r_B とおく．XY 間の距離と $2l+R$ の差が伸びの和なので，

$$(2l+R+a)-(2l+R) = r_\mathrm{A}+r_\mathrm{B} \qquad \therefore \quad r_\mathrm{A}+r_\mathrm{B}=a$$

小球の運動方程式の x 成分は，

$$m\cdot 0 = -k_\mathrm{A}r_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}r_\mathrm{B}$$

以上より，

$$r_\mathrm{A} = \frac{k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}a, \qquad r_\mathrm{B} = \frac{k_\mathrm{A}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}a$$

(4) A，B の伸びを r_A'，r_B' とおく．小球の運動方程式の x 成分および伸びと a の関係より，

$$\begin{cases} m\alpha = -k_\mathrm{A}r_\mathrm{A}'+k_\mathrm{B}r_\mathrm{B}' \\ r_\mathrm{A}'+r_\mathrm{B}'=a \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} r_\mathrm{A}' = \dfrac{k_\mathrm{B}a-m\alpha}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}} \\ r_\mathrm{B}' = \dfrac{k_\mathrm{A}a+m\alpha}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}} \end{cases}$$

【2】

《解答》

I (1) $-Bt=\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\dot{v}(t)&=\frac{\mathrm{d}(Ae^{\theta})}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\&=Ae^{\theta}\times(-B)\\&=-ABe^{-Bt}\end{aligned}$$

(2) $t=0$ のとき $v=v_0$ かつ $\dot{v}=-\dfrac{v_0}{T}$ なので，

$$\begin{cases}Ae^0=v_0\\-ABe^0=-\dfrac{v_0}{T}\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}A=v_0\\B=\dfrac{1}{T}\end{cases}$$

(3) $v(t)$ を用いると，$\dot{v}(t)=-Bv(t)$ と表せる．よって，速度 v のときの運動方程式は，

$$m\dot{v}=-mBv\quad\cdots\ \text{抵抗力は } v \text{ に比例している．}$$

II (1) 斜面に平行方向と垂直方向の運動方程式は，

$$\begin{cases}M\alpha=Mg\sin\theta-\mu N-kv\\M\cdot0=N-Mg\cos\theta\end{cases}$$

これらより，N を消去すると，

$$M\alpha=Mg\sin\theta-\mu Mg\cos\theta-kv\quad\cdots(*)$$

v が一定値 v_f に収束すると，$\alpha=0$ なので，

$$0=Mg\sin\theta-\mu Mg\cos\theta-kv_f\qquad\therefore\quad v_f=\frac{Mg(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{k}$$

(2) $(*)$ で $v=0\mathrm{m/s}$ のとき，$\alpha=2.5\mathrm{m/s^2}$ なので，

$$2.0\times2.5=2.0\times9.8\times\left(\frac{1}{2}-\mu\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad\therefore\quad\mu=\frac{8\sqrt{3}}{49}\fallingdotseq0.28$$

また，$v_f=2.0\mathrm{m/s}$ なので，

$$2.0=\frac{2.0\times9.8}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{8\sqrt{3}}{49}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad\therefore\quad k=2.5\mathrm{kg/s}$$

《解説》

本問でグラフとして与えられた $v(t)$ を具体的に求めるには次のようにすればよい．
まず，v_f を用いて $(*)$ を書き換えると，

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kv_f - kv \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}(v - v_f)}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{M}(v - v_f)$$

この微分方程式の一般解は次式で与えられる．

$$v(t) - v_f = (\text{定数 } C) \times e^{-\frac{k}{M}t} \qquad \therefore \quad v(t) = v_f + Ce^{-\frac{k}{M}t}$$

初期条件 $v(0) = 0$ より，

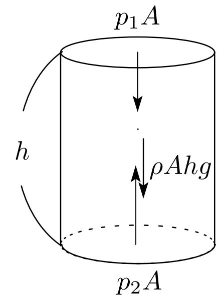
$$v_f + Ce^0 = 0 \qquad \therefore \quad C = -v_f$$

以上より，時刻 t における速度を表す式は次式となる．

$$\begin{aligned} v(t) &= v_f - v_f e^{-\frac{k}{M}t} \\ &= \frac{Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k} \times (1 - e^{-\frac{k}{M}t}) \end{aligned}$$

【3】

《解答》



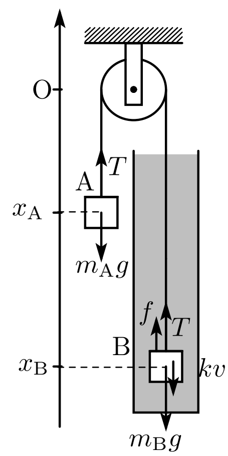
I (a) 垂直　(b)p_2A-p_1A　(c)$\rho Ah\cdot g$

(d) 力のつりあいより，

$$0=p_2A-p_1A-\rho Ahg \qquad \therefore \quad p_2-p_1=\rho hg$$

(e) ρVg

II 右図のように設定すると，運動方程式は，



$$\begin{cases} m_{\mathrm{A}}\ddot{x}_{\mathrm{A}}=T-m_{\mathrm{A}}g \\ m_{\mathrm{B}}\ddot{x}_{\mathrm{B}}=f+T-m_{\mathrm{B}}g-k\dot{x}_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

糸の長さが一定なので，

$$x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}=(\text{一定}) \qquad \therefore \quad \dot{x}_{\mathrm{A}}+\dot{x}_{\mathrm{B}}=0$$

よって，$\dot{x}_{\mathrm{A}}=-v$，$\dot{x}_{\mathrm{B}}=v$ とおける．また，B の体積を V_{B} とおくと，B の密度は，

$$\frac{m_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}}}=\rho_{\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad V_{\mathrm{B}}=\frac{m_{\mathrm{B}}}{\rho_{\mathrm{B}}}$$

よって，B に作用する浮力の大きさ f は，

$$f=\rho V_{\mathrm{B}}g=\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}m_{\mathrm{B}}g$$

(1) 静止状態で A に作用する力が下向きで，B に作用する力が上向きであればよいので，

$$\begin{cases} m_{\mathrm{A}}g-T_0>0 \\ T_0+\dfrac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}m_{\mathrm{B}}g-m_{\mathrm{B}}g>0 \end{cases}$$

これらを加えることにより，

$$m_{\mathrm{A}}g+\left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}-1\right)m_{\mathrm{B}}g>0 \qquad \therefore \quad m_{\mathrm{A}}>m_{\mathrm{B}}\left(1-\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}\right)$$

(2) 上向きを正とすると，A が速さ v で下降し，B が速さ v で上昇しているときの運動方程式は，

$$\begin{cases} -m_{\mathrm{A}}\dot{v}=T-m_{\mathrm{A}}g \quad \cdots ① \\ m_{\mathrm{B}}\dot{v}=\dfrac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}m_{\mathrm{B}}g+T-m_{\mathrm{B}}g-kv \quad \cdots ② \end{cases}$$

(3) ② − ① より，

$$(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})\dot{v}=\left\{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}\left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}-1\right)\right\}g-kv$$

$$\therefore \quad \dot{v}=\frac{1}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left[\left\{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}\left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}-1\right)\right\}g-kv\right]$$

これと ① より，

$$
\begin{aligned}
T &= m_{\mathrm{A}}(g-\dot{v}) \\
&= \frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left\{\left(2-\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}\right)m_{\mathrm{B}}g+kv\right\}
\end{aligned}
$$

(4) ①，② で，十分に時間が経過して v が収束したとき，

$$
\begin{cases}
0=-T_f+m_{\mathrm{A}}g \\
0=kv_f-T_f+\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}\right)m_{\mathrm{B}}g
\end{cases}
$$

$$
\therefore \quad \begin{cases}
T_f=m_{\mathrm{A}}g \\
v_f=\dfrac{g}{k}\left\{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_{\mathrm{B}}}\right)\right\}
\end{cases}
$$

【4】

《解答》

(1) 運動方程式の x，y 成分は，

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$$

初期条件を考慮して速度の各成分を求めて，

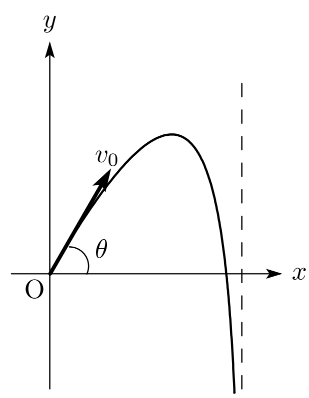
$$\dot{x} = v_0 \cos\theta e^{-kt}$$
$$\dot{y} = -\frac{g}{k} + \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt}$$

これらを積分して位置の各成分を求めて，

$$x(t) = \frac{1}{k} v_0 \cos\theta (1 - e^{-kt})$$
$$y(t) = -\frac{g}{k} t + \frac{1}{k}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt})$$

(2) (1) で得た $\dot{x}$，$\dot{y}$，x，y で，$t \to \infty$ としてみると，

$$\dot{x} \to 0$$
$$\dot{y} \to -\frac{g}{k}$$
$$x \to \frac{1}{k} v_0 \cos\theta$$
$$y \to -\infty$$



よって概形は，放物線に似た曲線を描きつつ最終的に $x = \dfrac{1}{k} v_0 \cos\theta$ の直線に傾き負で漸近する形になる．概形は右図．

添削課題

《解答》

(1) $ma = F - mg - Av - ky$

(2) $m = 0$ のとき，(1) より，

$$0 \cdot a = F - 0 \cdot g - Av - ky \qquad \therefore \quad F - Av - ky = 0 \quad \cdots (*)$$

$t = 0$ の直後では，$F = F_0$ かつ $y = 0$ なので，

$$F_0 - Av - k \cdot 0 = 0 \qquad \therefore \quad v = \frac{F_0}{A}$$

(3) $t = T$ の直前では，$(*)$ で $F = F_0$ かつ $y = y_0$ なので，

$$F_0 - Av - ky_0 = 0 \qquad \therefore \quad v = \frac{F_0 - ky_0}{A}$$

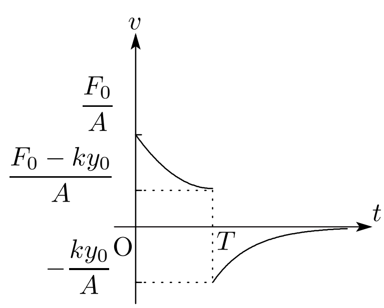
$t = T$ の直後では，$(*)$ で $F = 0$ かつ $y = y_0$ なので，

$$0 - Av - ky_0 = 0 \qquad \therefore \quad v = -\frac{ky_0}{A}$$

(4) 弾性力が作用している間は円盤が動き続けるので，十分に時間が経過した後ではばねの伸びが $y = 0$ となる．よって，$(*)$ で $F = 0$ かつ $y = 0$ なので，

$$0 - Av - k \cdot 0 = 0 \qquad \therefore \quad v = 0$$

(5) (2)〜(4) をふまえると，$v - t$ グラフの概略は右図のようになる．



《解説》

(5) のグラフの傾きについての情報を得るには，次のようにすればよい．F は定数であることに注意して，$(*)$ を t で微分すると，

$$-A\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{A}v$$

$v - t$ グラフの傾きの符号は v の符号と反対で，傾きの大きさは v の大きさと比例していることが分かる．

配点

100 点

(1)〜(5) 各 20 点

６章　運動の積分（１）：運動量・力積

問題

■演習

【１】

《解答》

斜面が物体に及ぼす垂直抗力を N，摩擦力を R とする．

(1) 斜面に沿って下向きに $I_1 = \int_0^{t_1} F\mathrm{d}t = \frac{3}{2}F_0 t_1$

(2) 斜面に平行方向と垂直方向について，$0 \leqq t \leqq t_0$ での運動方程式は，

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\theta + F - R \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} R = F + mg\sin\theta & \cdots ① \\ N = mg\cos\theta & \text{(以下不変)} \end{cases}$$

静止摩擦係数を μ_0 とおくと，$F = F_0$ のとき $\frac{R}{N} = \mu_0$ となるので，

$$F_0 + mg\sin\theta = \mu_0 mg\cos\theta \qquad \therefore \quad \mu_0 = \tan\theta + \frac{F_0}{mg\cos\theta}$$

(3) 動摩擦係数 $\mu = \frac{1}{2}\mu_0$ より，$t > t_0$ での摩擦力は，

$$R = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot N = \frac{1}{2}(mg\sin\theta + F_0) \quad \cdots ②$$

(4) $0 \leqq t \leqq t_0$ では① の R，$t_0 < t \leqq t_1$ では② の R が斜面上向きに作用するので，斜面に沿って下向きを正とすると，摩擦力による力積は，

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{t_1} (-R)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_0} \{-(F + mg\sin\theta)\}\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \left\{-\frac{1}{2}(mg\sin\theta + F_0)\right\}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}F_0 t_0 - mg\sin\theta \cdot t_0 - \frac{1}{2}(mg\sin\theta + F_0)(t_1 - t_0) \\ &= -\frac{1}{2}F_0 t_1 - \frac{1}{2}mg\sin\theta \cdot (t_0 + t_1) \\ \therefore \quad |I_2| &= \frac{1}{2}F_0 t_1 + \frac{1}{2}mg\sin\theta \cdot (t_0 + t_1) \end{aligned}$$

(5) 時刻 0 から t_1 までに重力によって物体が受ける力積の斜面下向き成分は，$I_3 = mg\sin\theta \cdot t_1$ と表せる．求める速さを v_1 として，運動量変化と力積の関係より，

$$mv_1 = I_1 + I_2 + I_3 \qquad \therefore \quad v_1 = \frac{F_0 t_1}{m} + \frac{1}{2}g\sin\theta \cdot (t_1 - t_0)$$

【2】

《解答》

(1) 自由落下する時間を t_0 とすると

$$\frac{1}{2}g{t_0}^2 = h \qquad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

床に到達したときの速さを v_0 とすると

$$v_0 = gt_0 = \sqrt{2gh}$$

(2) 図 2 の力による力積の大きさを I_1，重力による力積の大きさを I_2 とすると，

$$I_1 = \frac{1}{2}F_1T \quad , \quad I_2 = mgT$$

(3) 上向きを正として，運動量と力積の関係より，

$$m\cdot 0 - m\cdot(-v_0) = I_1 + (-I_2)$$

(1)，(2) の結果を代入すると，

$$m\sqrt{2gh} = \frac{1}{2}F_1T - mgT \qquad \therefore \quad F_1 = 2mg\left(1 + \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

(4) 床から離れたときの速さを v_1 とし，静止した後について (1)〜(3) と同様に立式すると，

$$mv_1 - m\cdot 0 = \frac{1}{2}F_1\cdot\frac{T}{2} + \left(-mg\cdot\frac{T}{2}\right)$$

(3) の結果を代入すると，

$$mv_1 = \frac{T}{4}\cdot 2mg\left(1 + \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) - \frac{1}{2}mgT \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$$

反発係数の定義より，

$$e = \left|\frac{v_1}{-v_0}\right| = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}gh}}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}$$

【3】

《解答》

時刻 t において落下中でない砂 (まだ落ちていない砂および底面にたまった砂) と容器に注目して，その質量を μ とする．また，はかりからの垂直抗力を N，落下してきた砂が衝突により及ぼす力を f とする．

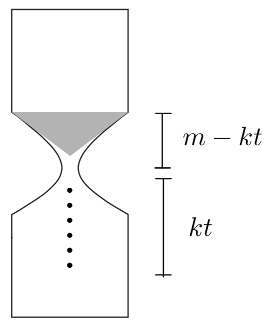
落下中でない砂+容器の運動方程式の鉛直成分は，

$$0 = N - \mu g - f \qquad \therefore \quad N = \mu g + f$$

このとき，はかりの読み W は，

$$W = \frac{N}{g} = \mu + \frac{f}{g} \quad \cdots (*)$$

(1) 距離 h を自由落下するので，



$0<t<t_1$

$$\frac{1}{2}g{t_1}^2 = h \qquad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$0<t<t_1$ では，$(*)$ で，

$$\begin{cases} \mu = M + m - kt \\ f = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad W = M + m - kt$$

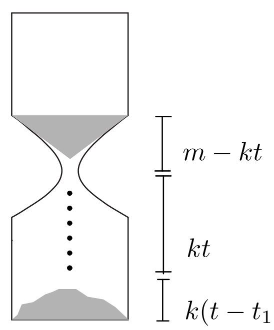
(2) (1) の t_1 を用いて，

$$v = gt_1 = \sqrt{2gh}$$

(3) 求める力の反作用を衝突する砂が受ける．運動量変化と力積の関係より，

$$0 - k\varDelta t \cdot v = -F \cdot \varDelta t \qquad \therefore \quad F = k\sqrt{2gh}$$

(4) $t_1<t<t_2$ では，$(*)$ で，



$t_1<t<t_2$

$$\begin{cases} \mu = M + (m-kt) + k(t-t_1) \\ f = F \end{cases} \qquad \therefore \quad W = M + m$$

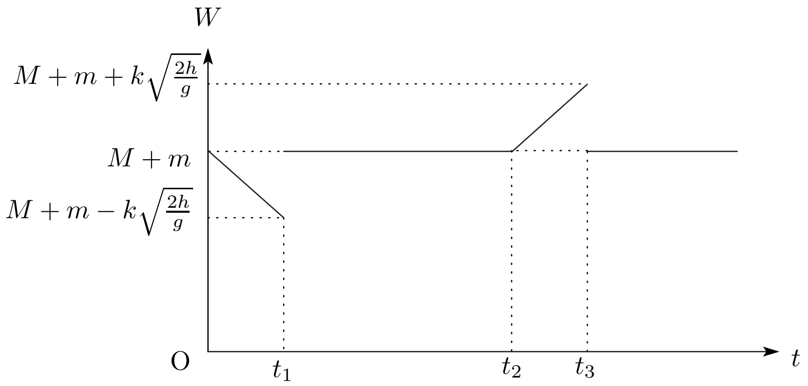
(5) 最後の砂が落下し始めてからさらに t_1 かかって落下し終わるので，

$$t_3 = t_2 + t_1 = \frac{m}{k} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$t_2<t<t_3$ では，$(*)$ で，

$$\begin{cases} \mu = M + k(t-t_1) \\ f = F \end{cases} \qquad \therefore \quad W = M + kt$$

(6) 求めるグラフは下図.



《解説》

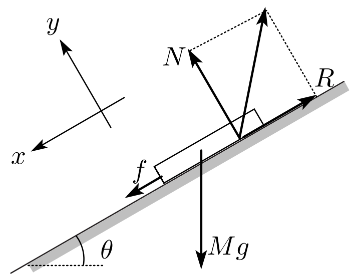
はかりは，その上皿にのせられた物体が，はかりに及ぼす垂直抗力を測定する．はかりの目盛りには kgw(キログラム重) が便利である．kgw は，地上で 1kg が受ける重力 1kg$\times g$=9.8N を単に 1kgw とする力の単位である．例えば，5kg の物を地上においたはかりに静かにのせると，物ははかりに 5kgw の力 (垂直抗力) を及ぼすので，はかりの目盛りは 5kgw を指す．しかし，はかりによっては，目盛りの単位が「kg」になっているものも多い．これは，物がはかりに力 N を及ぼすとき，N/g を指すように目盛りを入れたからである．例えば，質量 m の物が地上におかれたはかりに静かにのっているときは $N=mg$ となり，はかりの目盛りは $N/g=m$ を指す．($m=5$kg なら目盛りは 5kg．単位は kg だが，質量を測定するのではないことに注意．なお．数値は kgw 単位の場合と同じ．)

【4】

《解答》

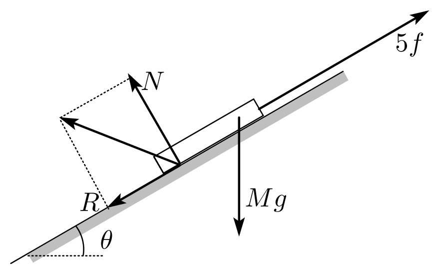
(1) ① A が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N，摩擦力の大きさを R，下向きに加える力の大きさを f とすると，すべり出す直前の運動方程式の x，y 成分は，求める静止摩擦係数を μ として，

・下向きに滑りだす直前：



$$0 = +f - R + Mg\sin\theta$$
$$0 = +N - Mg\cos\theta$$
$$\frac{R}{N} = \mu$$
$$\therefore \quad 0 = +f - \mu Mg\cos\theta + Mg\sin\theta \quad \cdots Ⓐ$$

・上向きに滑りだす直前：



$$0 = -5f + R + Mg\sin\theta$$
$$0 = +N - Mg\cos\theta$$
$$\frac{R}{N} = \mu$$
$$\therefore \quad 0 = -5f + \mu Mg\cos\theta + Mg\sin\theta \quad \cdots Ⓑ$$

Ⓐ $\times 5 +$ Ⓑ：

$$0 = -4\mu Mg\cos\theta + 6Mg\sin\theta \qquad \therefore \quad \mu = \frac{3}{2}\tan\theta$$

② 運動方程式の x，y 成分は，求める動止摩擦係数を μ' として，

$$0 = -R + Mg\sin\theta$$
$$0 = +N - Mg\cos\theta$$
$$\frac{R}{N} = \mu'$$
$$\therefore \quad \mu' = \frac{Mg\sin\theta}{Mg\cos\theta} = \tan\theta$$

(2) ③ 合力 0 の状態から $-x$ 向きに動摩擦 $\mu' F$ が加わることになる．運動量変化と力積の関係より，

$$MV' - MV = -\mu' FT$$
$$\therefore \quad V' = V - \frac{\mu' FT}{M} = V - \frac{FT\tan\theta}{M}$$

④ $V' = 0$ とおいて，

$$FT = \frac{MV}{\tan\theta}$$

⑤ 0(静止)

(3) ⑥ A の受ける力積の y 成分の大きさは B の運動量変化より $2mv\cos\theta$. これが FT の値となるので,

$$V' = V - \frac{2mv\sin\theta}{M}$$

添削課題

《解答》

(1) 長さ $\varDelta x = v_x \varDelta t$ の微小部分が落下速度 v_x から 0 に変化するので，

$$\begin{aligned}\varDelta P_x &= \left| 0 - \frac{v_x \varDelta t}{l} M \cdot v_x \right| \\ &= \frac{\sqrt{2gx}\varDelta t}{l} M \cdot \sqrt{2gx} \\ &= \frac{2Mgx}{l}\varDelta t\end{aligned}$$

(2) 運動量の変化と受けた力積の関係より，

$$\left(F_x + \frac{v_x \varDelta t}{l} M \cdot g \right) \varDelta t = \frac{2Mgx}{l}\varDelta t$$

$(\varDelta t)^2$ に比例する項を無視すると，

$$F_x \varDelta t \fallingdotseq \frac{2Mgx}{l}\varDelta t \qquad \therefore \quad F_x = \frac{2x}{l}Mg$$

(3) 台が鎖から受ける合力の大きさを f とすると，

$$f = \frac{x}{l}M \cdot g + F_x = \frac{3x}{l}Mg$$

(4) 長さ $u\varDelta t$ の微小部分が上昇速度 0 から u に変化する過程について，運動量の変化と受ける力積の関係より，

$$\frac{u\varDelta t}{l} M \cdot u - 0 = \left(F - \frac{u\varDelta t}{l} M \cdot g \right) \varDelta t$$

$(\varDelta t)^2$ に比例する項を無視すると，

$$\frac{u\varDelta t}{l} Mu \fallingdotseq F\varDelta t \qquad \therefore \quad F = \frac{Mu^2}{l}$$

(5) 指と鎖の間で作用する力の大きさを f' として，台から離れた鎖の部分が受ける力のつりあいより，

$$0 = f' - \frac{l-x}{l}M \cdot g - F \qquad \therefore \quad f' = \frac{l-x}{l}Mg + \frac{Mu^2}{l}$$

配点

100 点

(1)～(5) 各 20 点