「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。
※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

５章ー１　図形（１）

要点

例題 1

△ ABC の 3 辺の長さはそれぞれ $AB = \sqrt{3}+1$，$BC = 2$，$CA = \sqrt{6}$ であるという．$\angle ABC$ の二等分線と辺 AC との交点を D として，次の値を求めよ．

(1) $\cos\angle BAC$　　(2) BD の長さ

(3) △ ABC の外接円の半径　　(4) △ ABC の面積

(5) △ ABC の内接円の半径

■解答

(1) 余弦定理より

$$\cos\angle BAC = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2^2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) BD は $\angle ABC$ の 2 等分線だから

$$AB : CB = AD : CD = (\sqrt{3}+1) : 2$$

よって

$$AD = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)+2}\cdot\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}\cdot\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{2}$$

したがって，△ ABD に余弦定理を用いると

$$BD^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

$BD > 0$ に注意すると

$BD = \mathbf{2}$　　(答)

(3) △ ABC の外接円の半径を R とすると，△ ABC に正弦定理を用いて

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC}$$

ここで

$$\sin^2\angle BAC = 1 - \cos^2\angle BAC = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \sin\angle BAC = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (\because\quad 0^\circ < \angle BAC < 180^\circ)$$

だから，求める半径は

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

(4) △ ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})}\qquad(\text{答})$$

(5) △ ABC の内接円の中心を O とし，O から AB，BC，CA にそれぞれ下ろした垂線の足を E，F，G とすると，OE，OF，OG はすべて内接円の半径 r に等しい.

ここで △ OAB, △ OBC, △ OCA の面積はそれぞれ

$$\frac{r}{2}(\sqrt{3}+1),\quad \frac{r}{2}\cdot 2,\quad \frac{r}{2}\cdot\sqrt{6}$$

であり，これらの和は，△ ABC の面積に等しいから

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)r=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

これより

$$r=\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}\qquad(\text{答})$$

例題 2

$\triangle$ ABC において，AB $=$ AC，BC $= 2\sqrt{6}$，面積は $2\sqrt{6}$ とする．

(1) $\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(2) $\triangle$ ABC の外接円の，頂点 A を含まない側の弧 BC 上に点 D をとり，$\triangle$ DBC の面積が $2\sqrt{6}$ となるようにする．

線分 BD，CD のうち長い方の線分の長さを求めよ．

■解答

(1) AB $=$ AC $= x$ とする．

$\triangle$ ABC の面積について

$$\frac{1}{2}x^2\sin\angle\mathrm{BAC} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore\quad x^2\sin\angle\mathrm{BAC} = 4\sqrt{6}\quad\cdots\cdots①$$

$\triangle$ ABC において余弦定理を用いて

$$(2\sqrt{6})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos\angle\mathrm{BAC}\quad\cdots\cdots②$$

①，② より，$\sin^2\angle\mathrm{BAC} + \cos^2\angle\mathrm{BAC} = 1$ を用いて

$$x = \sqrt{10}$$

これより

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = -\frac{1}{5},\quad \sin\angle\mathrm{BAC} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{5}}\qquad(\text{答})$$

(2) BD $= y$，CD $= z$ とする．

$\triangle$ BCD の面積について

$$\frac{1}{2}yz\sin\angle\mathrm{BDC} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore\quad yz = 10\quad\left(\because\quad \sin\angle\mathrm{BDC} = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{2}{5}\sqrt{6}\right)\quad\cdots\cdots③$$

$\triangle$ BCD において余弦定理を用いて

$$(2\sqrt{6})^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\angle\mathrm{BDC}$$

ここで，③ と $\cos\angle\mathrm{BDC} = -\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{5}$ より

$$(y+z)^2 - 2yz - 2yz\cdot\frac{1}{5} = 24$$

$$\therefore\quad (y+z)^2 = 24 + \frac{12}{5}\cdot 10 = 48$$

$$\therefore\quad y + z = 4\sqrt{3}\qquad(\because\quad y > 0,\ z > 0 \text{ より，} y + z > 0)\quad\cdots\cdots④$$

③，④ より，y，z は，t の 2 次方程式 $t^2 - 4\sqrt{3}t + 10 = 0$ の 2 解であるから，これを解いて

$$t = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

したがって，y，z のうち長い方は

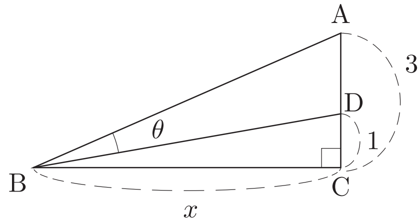
$\boldsymbol{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$　(答)

例題 3

右の図の△ ABC において，次の問いに答えよ．

(1) $\tan\theta$ を x で表せ．

(2) θ の最大値を求めよ．



■解答

(1) $\angle\mathrm{DBC} = \alpha$ とする．

△ ABC において

$$\tan(\theta+\alpha) = \frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha} = \frac{3}{x}$$

ここに

$$\tan\alpha = \frac{1}{x}$$

を代入して整理すると

$$\left(x^2+3\right)\tan\theta = 2x \qquad \therefore\quad \tan\theta = \boldsymbol{\frac{2x}{x^2+3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x > 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\theta} &= \frac{x^2+3}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)\\ &\geqq \sqrt{x\cdot\frac{3}{x}} \qquad (\because\ \text{相加・相乗平均の関係})\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

ここで，等号を成立させる

$$x = \frac{3}{x} \iff x = \sqrt{3} \qquad (\because\ x > 0)$$

が存在する．

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\tan\theta > 0$ であるから，$\dfrac{1}{\tan\theta}$ が最小のとき $\tan\theta$ は最大であり，$\tan\theta$ の最大値は

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ において

$$\tan\theta \text{ が最大} \iff \theta \text{ が最大}$$

であるから，θ が最大となるのは

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

のとき．これをみたす $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲の θ は

$\theta = \mathbf{30^\circ}$ (答)

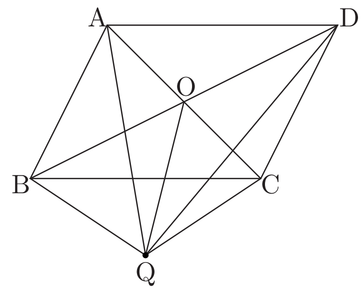
例題 4

四角形 ABCD を平行四辺形とする．外部に与えられた 1 点 Q に対して

$QA^2+QC^2=QB^2+QD^2$

が成り立つとき，四角形 ABCD はどのような四角形か．また，このとき，平面上の任意の点 P に対して $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$ が成り立つことを証明せよ．

■解答



平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とすると

$OA=OC,\quad OB=OD$

であるから

$$QO \text{ は} \triangle QAC,\ \triangle QBD \text{ の中線である．}$$

$\triangle QAC$ において中線定理より

$QA^2+QC^2=2\left(OA^2+QO^2\right)\quad\cdots\cdots①$

$\triangle QBD$ において中線定理より

$QB^2+QD^2=2\left(OB^2+QO^2\right)\quad\cdots\cdots②$

$QA^2+QC^2=QB^2+QD^2$ が成り立つので，①，② より

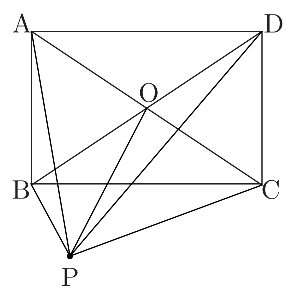
$OA^2=OB^2\qquad\therefore\quad OA=OB$

よって，対角線の長さが等しい平行四辺形であるから，四角形 ABCD は

長方形　(答)

である．

このとき，平面上の任意の点 P に対して



$$\begin{aligned}PA^2+PC^2&=2\left(OA^2+OP^2\right)\\&=2\left(OB^2+OP^2\right)\qquad(\because\quad OA=OB)\\&=PB^2+PD^2\end{aligned}$$

〔証明終〕

問題

■演習

★【1】鋭角三角形 ABC において，$\sqrt{3}(b+c)=2a(\sin B+\sin C)$ が成り立つとする．ただし，B，C は，それぞれ ∠B, ∠C の大きさで，a，b，c は，それぞれ辺 BC, CA, AB の長さである．

(1) ∠A の大きさを求めよ．

(2) ∠A の二等分線と辺 BC との交点を P とする．$b=8$，$c=5$ のとき，△ ABP の外接円の半径と内接円の半径を求めよ．

★【2】四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ．

★★★【3】xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている．

△ PQR は一辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である．

このとき，a の値を求めよ．

★★★【4】正三角形 ABC の外接円の半径を R，外接円周上の任意の点を P とするとき，次の問いに答えよ．

(1) AP + BP + CP の最大値と，それを与える点 P の位置を求めよ．

(2) AP · BP · CP の最大値と，それを与える点 P の位置を求めよ．

５章ー１　図形（１）

問題

【1】(1) 三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

これを与式に代入すると，$b+c\fallingdotseq 0$ より

$$\sqrt{3}(b+c)=2a\left(\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)\iff\frac{a}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}\iff\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ A=\mathbf{60^\circ}$　(答)　($\because$ A は鋭角)

(2) $\mathrm{BP}:\mathrm{CP}=c:b\quad\cdots\cdots(*)$

余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=49\qquad\therefore\ a=7$$

$(*)$ より

$$\mathrm{BP}=a\cdot\frac{c}{b+c}=7\times\frac{5}{13}=\frac{35}{13},\quad\mathrm{PC}=7-\frac{35}{13}=\frac{56}{13}$$

次に $\mathrm{AP}=x$ とおき，三角形 ABP，APC において余弦定理を用いると

$$\frac{5^2+x^2-\left(\frac{35}{13}\right)^2}{2\cdot 5\cdot x}=\frac{8^2+x^2-\left(\frac{56}{13}\right)^2}{2\cdot 8\cdot x}\ \therefore\ x^2=\frac{40^2}{13^2}\cdot 3\ \therefore\ x=\frac{40}{13}\sqrt{3}$$

したがって，△ ABP の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{40}{13}\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ=\frac{50}{13}\sqrt{3}\quad\cdots\cdots①$$

三角形 ABP の内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{r}{2}\left(5+\frac{35}{13}+\frac{40}{13}\sqrt{3}\right)=\frac{r(50+20\sqrt{3})}{13}\quad\cdots\cdots②$$

①，② より

$$r=\mathbf{\frac{25\sqrt{3}-30}{13}}$$　(答)

さらに三角形 ABP の外接円の半径は，正弦定理より

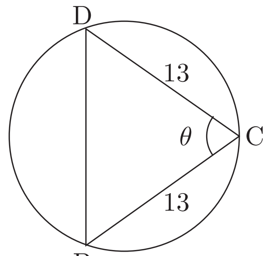
$$\frac{\mathrm{BP}}{2\sin 30^\circ}=\mathbf{\frac{35}{13}}$$　(答)

【2】$\angle \mathrm{BCD}=\theta$ (ただし，$0^\circ < \theta < 180^\circ$) とおく．$\triangle$ BCD に正弦定理・余弦定理を用いて，それぞれ

$$\begin{cases} \mathrm{BD}=2\cdot\dfrac{65}{8}\sin\theta=\dfrac{65}{4}\sin\theta & \cdots\cdots ① \\ \mathrm{BD}^2=13^2+13^2-2\cdot13\cdot13\cos\theta=2\cdot13^2(1-\cos\theta) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，② より BD を消去して

$$\left(\frac{65}{4}\sin\theta\right)^2=2\cdot13^2(1-\cos\theta)$$



$$\therefore\quad \frac{5^2\cdot13^2}{4^2}(1-\cos^2\theta)=2\cdot13^2(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\quad \frac{25}{16}(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=2(1-\cos\theta)$$

$\cos\theta \fallingdotseq 1$ より

$$1+\cos\theta=\frac{32}{25} \qquad \therefore\quad \cos\theta=\frac{7}{25}$$

② より

$$\mathrm{BD}=\sqrt{2\cdot13^2\left(1-\frac{7}{25}\right)}=\frac{78}{5}$$

$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{DA}=y$ とおくと，四角形 ABCD の周の長さが 44 であるから

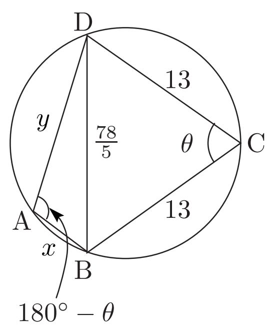
$$x+y+13+13=44 \qquad \therefore\quad x+y=18 \quad \cdots\cdots ③$$

$\triangle$ ABD に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\left(\frac{78}{5}\right)^2&=x^2+y^2-2xy\cos(180^\circ-\theta)=(x+y)^2-2xy+2xy\cos\theta\\&=18^2-2xy+2xy\cdot\frac{7}{25} \qquad (\because\ ③)\end{aligned}$$

したがって

$$78^2=90^2-36xy$$



$$\therefore\quad 36xy=90^2-78^2=(90+78)(90-78)=168\cdot12$$

$$\therefore\quad xy=56 \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ より，x，y は t の 2 次方程式

$$t^2-18t+56=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

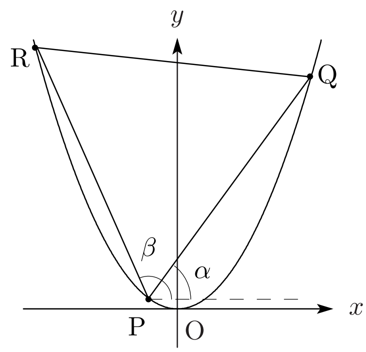
の 2 つの解で，⑤ を解くと

$$(t-4)(t-14)=0 \qquad \therefore\quad t=4,\ 14$$

したがって，残りの 2 辺 AB と DA の長さは

4 と 14　または　14 と 4　　(答)

【3】PQ, PR が x 軸の正方向となす角を α, β とすると



$$\tan\beta = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}$$

したがって

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

である．また

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

である．ここで，P$(t,\ t^2)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{a}{\sqrt{3}} \\ t^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}a \\ t^2 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a \end{pmatrix}$$

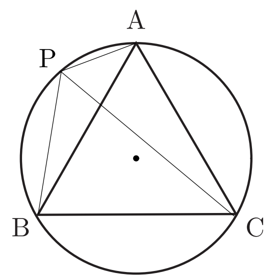
Q, R はともに $y = x^2$ 上の点であるから

$$\begin{cases} t^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \left(t + \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ t^2 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a = \left(t + \dfrac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}a\right)^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} t = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}a}{6} \\ \dfrac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}t + \dfrac{7-2\sqrt{6}}{12}a = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

これを解いて，$a = \boldsymbol{\dfrac{18}{5}}$ である．　　(答)

【4】(1) 図形の対称性から，点 P が外接円の劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の C を含まない側) 上にある場合について考えればよい.



$\angle\mathrm{PAB}=\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

とおくと

$\angle\mathrm{PCA}=\dfrac{\pi}{3}-\theta, \quad \angle\mathrm{PAC}=\dfrac{\pi}{3}+\theta$

である.

正弦定理を用いて

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}\\
&=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+2R\sin\theta+2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\\
&=2R\left\{\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}\\
&=2R\left\{\sin\theta+2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\right\}\\
&=2R\left(\sin\theta+2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\theta\right)\\
&=2R\left(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\right)\\
&=4R\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

したがって，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大となる.

よって，点 P が

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$の中点 (答)

のとき最大となり，その値は

$\boldsymbol{4R}$ (答)

である.

(2)
$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}\\
&= 8R^3\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\\
&= 8R^3\sin\theta\cdot\left[-\frac{1}{2}\left[\cos\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}-\cos\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}\right]\right]\\
&= -4R^3\sin\theta\left(\cos\frac{2}{3}\pi-\cos 2\theta\right)\\
&= -4R^3\sin\theta\left(-\frac{1}{2}+2\sin^2\theta-1\right)\\
&= 2R^3(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\\
&= 2R^3\sin 3\theta
\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ より，$0\leqq 3\theta\leqq\pi$ であるから，$\sin 3\theta=1$，すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大となる．

よって，点 P が

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$**の中点**　　(答)

のとき最大となり，その値は

$\boldsymbol{2R^3}$　　(答)

である．

<別解>

(1)
$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}+\mathrm{BP} &= 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+2R\sin\theta\\
&= 2R\left\{\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}\\
&= 2R\cdot 2\sin\frac{\theta+\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\\
&= 4R\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= 4R\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\\
&= 2R\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right\}\\
&= 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\\
&= \mathrm{CP}
\end{aligned}$$

となるから

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=2\mathrm{CP}$

であり，これが最大になるのは，CP が円の直径となるときであり，P は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中点である．

このとき，最大値は

$2\cdot 2R=\boldsymbol{4R}$　　(答)

である．

(2) 相加・相乗平均より

$$\frac{\mathrm{AP}+\mathrm{BP}}{2}\geqq\sqrt{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}}$$

$\therefore \quad \mathrm{AP} \cdot \mathrm{BP} \leqq \left(\dfrac{\mathrm{AP}+\mathrm{BP}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\mathrm{CP}^2$

等号は，$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ のとき，つまり，点 P が $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中点のとき成立する．このとき，CP は円の直径となり，$\mathrm{CP} = 2R$ となる．

したがって

$\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BP} \cdot \mathrm{CP} \leqq \dfrac{1}{4}\mathrm{CP}^3$

であり，最大値は

$\dfrac{1}{4} \cdot (2R)^3 = \boldsymbol{2R^3}$ 　　(答)

である．