「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。
※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

２１章　整数（１）

要点

＜　準備の準備　＞

※以下の問題は中学入試，高校入試で出題されるタイプの問題である．

【1】『約数・倍数』

次の各問いに答えよ．

(1) 18，21，36 の最小公倍数と最大公約数を求めよ．

(2) 500 の正の約数の個数を求めよ．

【2】『整数の割算』

次の各問いに答えよ．★は基本問題ですが，初見ではやや難しい問題．

(1) 100 から 300 までの数の中で 4 または 7 で割り切れる数はいくつあるか．

(2) ★ ある正の整数で，187，221 を割ったとき，187 は 7 余り，221 は 5 余るという．このとき，ある正の整数（割る数）を全て求めよ．

(3) ★ ある正の整数を 4 で割ると 2 余り，3 で割ると 1 余り，7 で割ると 5 余るという．このとき，ある正の整数のうち最小のものを求めよ．

(4) ★ 24 で割ったときの商と余りが等しくなるような数のうちで，3 桁の整数はいくつあるか．

(5) ある年の 10 月 22 日が月曜日であるとき，同じ年の 12 月 13 日は何曜日か．なお，10 月は 31 日，11 月は 30 日である．

■解答

【1】

(1) $18 = 2 \cdot 3^2$，$21 = 3 \cdot 7$，$36 = 2^2 \cdot 3^2$ より

最小公倍数: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = \mathbf{252}$

最大公約数: $\mathbf{3}$

である．　(答)

(2) $500 = 2^2 \cdot 5^3$ より，500 の正の約数は

$(2+1)(3+1) = \mathbf{12}$(個)　(答)

＜補足＞実際に

$2^0 \cdot 5^0$，$2^0 \cdot 5^1$，$2^0 \cdot 5^2$，$2^0 \cdot 5^3$

$2^1 \cdot 5^0$，$2^1 \cdot 5^1$，$2^1 \cdot 5^2$，$2^1 \cdot 5^3$

$2^2 \cdot 5^0$，$2^2 \cdot 5^1$，$2^2 \cdot 5^2$，$2^2 \cdot 5^3$

のように書き出す手法を考えると，上記の立式 $(2+1)(3+1)$ の構造がつかめるだろう．

【2】

(1)

$$\frac{99}{4} = 24 + \frac{3}{4},\ \frac{99}{7} = 14 + \frac{1}{7},\ \frac{99}{28} = 3 + \frac{15}{28}$$

$$\frac{300}{4} = 75,\ \frac{300}{7} = 42 + \frac{6}{7},\ \frac{300}{28} = 10 + \frac{20}{28}$$

であるから

$$1\text{から}99\text{までの数のうち}\begin{cases}4\text{で割り切れる数：}24\text{個}\\7\text{で割り切れる数：}14\text{個}\\28\text{で割り切れる数：}3\text{個}\end{cases}$$

$$1\text{から}300\text{までの数のうち}\begin{cases}4\text{で割り切れる数：}75\text{個}\\7\text{で割り切れる数：}42\text{個}\\28\text{で割り切れる数：}10\text{個}\end{cases}$$

したがって

$(75+42-10)-(24+14-3)=$ **72個**　　(答)

(2) 187 を割ると 7 余る $\Longleftrightarrow$ $187-7=180$ を割ると割り切れる

221 を割ると 5 余る $\Longleftrightarrow$ $221-5=216$ を割ると割り切れる

となるので，求める数は $180=2^2\cdot3^2\cdot5$ と $216=2^3\cdot3^3$ の公約数のうち 7 より大きい数なので

9，12，18，36　　(答)

＜補足＞上記では文字を使わないで解いたが，整数の割算について

n を p で割ったとき，商が q，余りが r である

$$n=pq+r \text{ かつ } 0\leqq r<p$$

であることに注目して説明することもできる．

求める正の整数を p とすると，187 を割ると 7 余るので，商を q とすると

$187=pq+7$（余りは割る数より小さい，すなわち $7<p$）

$\Longleftrightarrow 180=pq$（$p>7$）

となり，p は 7 より大きい 180 の約数となる．

次に，221 を割るときの商を q' とすると

$221=pq'+5$（余りは割る数より小さい，すなわち $5<p$）

$\Longleftrightarrow 216=pq'$（$p>5$）

となり，p は 5 より大きい 216 の約数となる．

(3) 与えられた条件より

ある正の整数に 2 を加えると，4 で割り切れる

ある正の整数に 2 を加えると，3 で割り切れる

ある正の整数に 2 を加えると，7 で割り切れる

であるから，求める数に 2 を加えた数は，4，3，7 の公倍数となる．よって，求める数は最小の数なので

$4\cdot3\cdot7-2=$ **82**　　(答)

(4) 整数 n を 24 で割った商を q，余りを r とすると

$n=24q+r$ ($r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 23$)

と表せて，$q=r$ より

$n=25r$

ゆえに，n は 25 の倍数であり，さらに n は 3 桁の整数であることから，$r=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 39$ なので

36個　　(答)

(5) 10 月 22 日から 12 月 13 日まで

$9+30+13=52$（日）

ある．そこで，52 を 7 で割ると

商：7，余り：3

であるから，10 月 22 日から数えて

49 日目 12 月 10 日が月曜日

50 日目 12 月 11 日が火曜日

51 日目 12 月 12 日が水曜日

52 日目 12 月 13 日が**木曜日**

となる．　　(答)

＜　整数の性質　＞

【3】『約数の個数』

1500 の正の約数について，次の各問いに答えよ．

(1) 正の約数の個数を求めよ．

(2) 正の約数の総和を求めよ．

(3) 正の約数のすべてをかけるといくつになるか．

【4】『余り』

2008，208，28 をある正の整数 p で割ると，余りがすべて一致する．このような p は何通りあるか．

■解答

【3】

(1) $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$ より，1500 の正の約数は

$(2+1)(1+1)(3+1) = \mathbf{24}$（個）　(答)

(2) 1500 の正の約数は

$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)(5^0+5^1+5^2+5^3)$

を展開したときにでてくる項なので，求める和は

$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)(5^0+5^1+5^2+5^3) = 7 \cdot 4 \cdot 156 = \mathbf{4368}$　(答)

(3) 1500 の正の約数の 1 つを a とすると

$ab = 1500$

となる b が存在し，b も 1500 の約数である．つまり，a を適当に

$24 \div 2 = 12$（個）

選べば，その対となる b も一意に定まり，すべての約数をつくす．

よって，求める積は

$1500^{12} = \mathbf{2^{24} \cdot 3^{12} \cdot 5^{36}}$　(答)

【4】

2008，208，28 を p で割った商を q_1，q_2，q_3 とする．このとき，余りが一致するので，余りを r とすると

$2008 = pq_1 + r$ ・・・・・・ ①

$208 = pq_2 + r$ ・・・・・・ ②

$28 = pq_3 + r$ ・・・・・・ ③

ここで，① − ②，② − ③ より

$1800 = p(q_1 - q_2)$，$180 = p(q_2 - q_3)$

であり，$q_1 - q_2$，$q_2 - q_3$ は整数なので，p は 1800 と 180 の公約数，すなわち 180 の約数である．

よって，$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ より

$(2+1)(2+1)(1+1) = \mathbf{18}$（通り）　(答)

＜　不定方程式　＞

【5】『不定方程式（約数・倍数）』

(1) $xy = x - y + 5$ をみたす整数 $(x,\ y)$ の組を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{2}$ をみたす正の整数 $(x,\ y)$ の組を求めよ．

(3) $\sqrt{n^2+99}$ が整数となるような正の整数 n を求めよ．

■解答

【5】

(1) 与式は

$$\begin{aligned} xy = x - y + 5 &\iff x(y-1) + y - 5 = 0 \\ &\iff x(y-1) + y - 1 - 4 = 0 \\ &\iff (x+1)(y-1) = 4 \end{aligned}$$

よって，$x+1,\ y-1$ は整数であるから

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} &\iff 2y + 4x = xy \\ &\iff x(y-4) - 2y = 0 \\ &\iff x(y-4) - 2(y-4) - 8 = 0 \\ &\iff (x-2)(y-4) = 8 \end{aligned}$$

ここで，$x-2,\ y-4$ は整数であり，$x,\ y$ は正の整数すなわち $x-2 > -2,\ y-4 > -4$ をみたすので

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\sqrt{n^2+99} = m$ (m は正の整数) とおくと

$$n^2 + 99 = m^2 \iff (m+n)(m-n) = 3^2 \cdot 11$$

よって，$m+n,\ m-n$ は整数であり，$m > 0,\ n > 0$ より $m+n > 0,\ m+n > m-n$ をみたすので

$$\begin{pmatrix} m+n \\ m-n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \cdot 11 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3^2 \cdot 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 50 \\ 49 \end{pmatrix}$$

であるから，求める n の値は

$\boldsymbol{n = 1,\ 15,\ 49}$ 　(答)

＜　剰余，2 項定理　＞

【6】『剰余』

n は整数とする．

(1) n^3 を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しいことを示せ．

(2) n^2 を 5 で割った余りは 0 または 1 または 4 であることを示せ．

(3) $n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数であることを示せ．

【7】『2 項定理の利用』

n が正の偶数のとき，2^n-1 が 3 の倍数であることを示せ．

■解答

【6】

(1) n を 3 で割った余りで分類すると

$$n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2\ (k \text{ は整数})$$

であり

(i) $n=3k$ すなわち，n が 3 で割り切れるとき

$$n^3=3\cdot 3^2k^3$$

であるから，n^3 は 3 で割り切れる．

(ii) $n=3k+1$ すなわち，n を 3 で割った余りが 1 のとき

$$\begin{aligned} n^3=(3k+1)^3 &= 27k^3+27k^2+9k+1 \\ &= 3(9k^3+9k^2+3k)+1 \end{aligned}$$

であるから，n^3 を 3 で割った余りは 1 である．

(iii) $n=3k+2$ すなわち，n を 3 で割った余りが 2 のとき

$$\begin{aligned} n^3=(3k+2)^3 &= 27k^3+54k^2+36k+8 \\ &= 3(9k^3+18k^2+12k+2)+2 \end{aligned}$$

であるから，n^3 を 3 で割った余りは 2 である．

以上より n^3 を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しい．　（証終）

(2) 整数 n を 5 で割った余りで分類すると

$$n=5k,\ 5k\pm1,\ 5k\pm2\ (k \text{ は整数})$$

と表せ

(i) $n=5k$ のとき

$$n^2=5\cdot 5k^2$$

より，n^2 を 5 で割った余りは 0 である．

(ii) $n=5k\pm1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2=(5k\pm1)^2 &= 25k^2\pm10k+1 \\ &= 5(5k^2\pm2k)+1 \end{aligned}$$

より，n^2 を 5 で割った余りは 1 である．

(iii) $n=5k\pm2$ のとき

$$\begin{aligned} n^2=(5k\pm2)^2 &= 25k^2\pm20k+4 \\ &= 5(5k^2\pm4k)+4 \end{aligned}$$

より，n^2 を 5 で割った余りは 4 である．

以上より，n^2 を 5 で割った余りは 0 または 1 または 4 である．（証終）

＜補足＞ (2) では

$n = 5k,\ 5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$

として，この全ての場合を調べることもできるが

$5k+3 = 5(k+1)-2$

$5k+4 = 5(k+1)-1$

とみて，設定した方が早い．もちろん，(1) でも $n = 3k,\ 3k \pm 1$ としてもよいが，上記の解答と大差ない．

(3) 整数 n は

$n = 3k,\ 3k+1,\ 3k+2$（k は整数）

のいずれかで表せるので，$n,\ n+1,\ n+2$ のいずれか 1 つは 3 の倍数となる．

また，整数 n は

$n = 2k',\ 2k'+1$ (k'は整数)

とも表せるので，$n,\ n+1,\ n+2$ の少なくとも 1 つは偶数である．

以上より，3 つの連続した整数の積 $n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である．（証終）

【7】

n が正の偶数のとき，$n = 2m$ (m は正の整数) とおけて

$$2^n - 1 = 2^{2m} - 1 = 4^m - 1 = (3+1)^m - 1$$

ここで，2 項定理より

$$\begin{aligned}(3+1)^m &= 3^m + {}_m\mathrm{C}_1 3^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2 3^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} 3^1 + 1 \\ &= 3(3^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_1 3^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1}) + 1\end{aligned}$$

ゆえに

$$2^{2m} - 1 = 3(3^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_1 3^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1}) \left(= 3 \sum_{k=0}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k 3^{m-1-k} \right)$$

であり，$3^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_1 3^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は整数であるから，n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．（証終）

問題

■演習

★【1】次の各問いに答えよ．

(1) 108 の正の約数の個数を求めよ．

(2) a, b, c, d を自然数とし $a \geqq c$ とする．$m = 2^a 3^b$, $n = 2^c 3^d$ について，m, n の正の約数の個数がそれぞれ 80, 72 で，m と n の正の公約数の個数が 45 であるという．このとき a, b, c, d を求めよ．

★★【2】次の各問いに答えよ．

(1) $xy - 2x - y = 4$ をみたす正の整数の組 (x, y) は全部で何組あるか．また，$x + y$ の最大値を求めよ．

(2) $x^3 - y^3 = 65$ をみたす整数の組 (x, y) をすべて求めよ．

★【3】 $x,\ y,\ z$ を整数とする.

(1) x^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ.

(2) $x,\ y,\ z$ を奇数とする. $x^2+y^2+z^2$ は平方数にならないことを示せ.

★★【4】 a, b, n を正の整数とするとき, 次の各問いに答えよ.

(1) n が奇数のとき, $1+2^n$ は 3 の倍数であることを示せ.

(2) a, b を 3 で割ったときの余りを, それぞれ c, d とする. a^n+b^n が 3 の倍数になることと c^n+d^n が 3 の倍数になることは同値であることを示せ.

２１章　整数（１）

問題

【1】(1) $108 = 2^2 \cdot 3^3$ より 108 の正の約数は

$(2+1)(3+1) = \mathbf{12}$ (個)　　(答)

(2) $m = 2^a 3^b$ の正の約数が 80 個なので

$(a+1)(b+1) = 80 = 2^4 \cdot 5 \cdots\cdots$ ①

$n = 2^c 3^d$ の正の約数が 72 個なので

$(c+1)(d+1) = 72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdots\cdots$ ②

また，m と n の正の公約数の個数は m と n の最大公約数を M と表すと，M の正の約数の個数と一致する．すると $a \geqq c$ より

$M = 2^c 3^e$ (e は b，d のうち大きくない数)

であり，ここで $d = e$ とすると

$M = n$

となるので正の約数の個数は 45 個にならない．よって $b < d$ であり

$M = 2^c 3^b$

より

$(c+1)(b+1) = 45 = 3^2 \cdot 5 \cdots\cdots$ ③

よって，③より $c+1$，$b+1$ はともに奇数であるから①より

$b+1 = 1$ または 5

$b \geqq 1$ より

$\boldsymbol{b = 4}$

すると，①，②，③より

$a+1 = 2^4 \quad \therefore \quad \boldsymbol{a = 15}$

$c+1 = 3^2 \quad \therefore \quad \boldsymbol{c = 8}$

$d+1 = 2^3 \quad \therefore \quad \boldsymbol{d = 7}$

となる．　　(答)

【2】(1) 与式は

$$xy-2x-y=4 \iff x(y-2)-(y-2)=6 \iff (x-1)(y-2)=6$$

と変形できる．よって，$x-1$, $y-2$ は整数であり，$x-1 \geqq 0$, $y-2 \geqq -1$ より

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots\cdots (*)$$

となるので，(x, y) は全部で，**4 組**　(答)

また，$(*)$ より $x+y$ のとり得る値は，10，8 であるから最大値は　**10**　(答)

(2) 与式は

$$x^3-y^3=65 \iff (x-y)(x^2+xy+y^2)=5\cdot 13$$

と変形できる．ここで，$x^3-y^3>0$ より $x>y$ なので

$$\begin{pmatrix} x-y \\ x^2+xy+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 65 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 65 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x-y=1$ のとき

$$(x-y)^2+3xy=65 \qquad \therefore \quad 3xy=64$$

すると，左辺は 3 の倍数であるが，右辺は 3 の倍数でないので，これをみたす整数 x, y は存在しない.

$x-y=5 \iff x=y+5$ のとき

$$(y+5)^2+(y+5)y+y^2=13$$

$\therefore \quad 3y^2+15y+12=0$

$\therefore \quad y^2+5y+4=0$ すなわち $y=-4,\ -1$

ゆえに，$(x,\ y)=(1,\ -4),\ (4,\ -1)$

$x-y=13 \iff x=y+13$ のとき

$$(y+13)^2+(y+13)y+y^2=5$$

$\therefore \quad 3y^2+39y+164=0$ すなわち $3(y^2+13y)=-2^2\cdot 41$

すると，左辺は 3 の倍数であるが，右辺は 3 の倍数でないので，これをみたす整数 y は存在しない.

$x-y=65 \iff x=y+65$ のとき

$$(y+65)^2+(y+65)y+y^2=1$$

$\therefore \quad y^2+65y+1408=0$

であり，判別式 D とすると

$$D=65^2-4\cdot 1\cdot 1408=-1407<0$$

となり，これをみたす実数 y は存在しない．よって

$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ -4),\ (4,\ -1)}$　(答)

【3】(1) $x=2m+1$（m は整数）のとき

$$x^2=4m^2+4m+1=4(m^2+m)+1$$

なので，x^2 を 4 で割った余りは 1 である.

$x=2m$ のとき，$x^2=4m^2$ なので x^2 を 4 で割った余りは 0 である.

以上より，x^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である.　（証終）

(2) $x^2+y^2+z^2$ が平方数になると仮定すると

$x^2+y^2+z^2=n^2$ (n は整数) $\cdots\cdots$ $(*)$

と表される．ここで，x，y，z は奇数なので，(1) より x^2，y^2，z^2 をそれぞれ 4 で割った余りは 1 であるから

$x^2+y^2+z^2$を 4 で割った余りは 3

となる.

ところが，x，y，z が奇数なので n も奇数であり

n^2を 4 で割った余りは 1

となり $(*)$ は成立しない.

以上より，$x^2+y^2+z^2$ は平方数にならない. （証終）

【4】(1) 2 項定理より

$$\begin{aligned}2^n &= (3-1)^n\\ &= 3^n + {}_n\mathrm{C}_1 3^{n-1}(-1)^1 + {}_n\mathrm{C}_2 3^{n-2}(-1)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 3^1 (-1)^{n-1} + (-1)^n\end{aligned}$$

であり，n が奇数のとき，$(-1)^n=-1$ であるから

$$\begin{aligned}1+2^n &= 3^n + {}_n\mathrm{C}_1 3^{n-1}(-1)^1 + {}_n\mathrm{C}_2 3^{n-2}(-1)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 3^1 (-1)^{n-1}\\ &= 3M\end{aligned}$$

(ただし $M=3^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1 3^{n-2}(-1)^1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(-1)^{n-1}$)

と表せる．よって，M は整数であるから，n が奇数のとき，$1+2^n$ は 3 の倍数である.

（証終）

(2) a，b を 3 で割った商をそれぞれ p，q とすると

$a=3p+c$，$b=3q+d$ (ただし $c=0$，1，2；$d=0$，1，2)

であり，2 項定理より

$$\begin{aligned}a^n &= (3p+c)^n\\ &= (3p)^n + {}_n\mathrm{C}_1(3p)^{n-1}c^1 + {}_n\mathrm{C}_2(3p)^{n-2}c^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}(3p)^1 c^{n-1} + c^n\\ &= 3P + c^n\end{aligned}$$

(ただし $P=3^{n-1}p^n+{}_n\mathrm{C}_1 3^{n-2}p^{n-1}c+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}pc^{n-1}$)

$$\begin{aligned}b^n &= (3q+d)^n\\ &= (3q)^n + {}_n\mathrm{C}_1(3q)^{n-1}d^1 + {}_n\mathrm{C}_2(3q)^{n-2}d^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}(3q)^1 d^{n-1} + d^n\\ &= 3Q + d^n\end{aligned}$$

(ただし $Q=3^{n-1}q^n+{}_n\mathrm{C}_1 3^{n-2}q^{n-1}d+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}qd^{n-1}$)

すなわち

$a^n+b^n-(c^n+d^n)=3(P+Q)$ (3 の倍数)

であるから，a^n+b^n を 3 で割った余りと c^n+d^n を 3 で割った余りは一致する．ゆえに，a^n+b^n が 3 の倍数になることと c^n+d^n が 3 の倍数になることは同値である. （証終）

センター試験演習問題

a，b を実数とし，x の二つの 2 次関数

$$y = 3x^2 - 2x - 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = x^2 + 2ax + b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。

以下では，G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。

このとき

$$b = \boxed{\text{ア}}\,a^2 + \boxed{\text{イ}}\,a - \boxed{\text{ウ}}$$

であり，G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(-a,\ \boxed{\text{エ}}\,a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

となる。

(1) G_2 の頂点の y 座標は，$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，G_2 の軸は直線 $x = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{\boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

(2) G_2 が点$(0, 5)$を通るとき，$a = \boxed{\text{ツ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

$a = \boxed{\text{ツ}}$ のとき，G_2 を x 軸方向に $\boxed{\text{ニ}}$，y 軸方向にも同じく $\boxed{\text{ニ}}$ だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ は0でない数とする。

センター試験演習問題

《2次関数》

②を変形すると

$$y=(x+a)^2-a^2+b$$

となるから，G_2 の頂点の座標は

$$(-a,\ -a^2+b)$$

これが G_1 上にあるので

$$-a^2+b=3\cdot(-a)^2-2\cdot(-a)-1$$

$$\therefore\quad b=4a^2+2a-1$$

これより，G_2 の頂点の座標は

$$(-a,\ 3a^2+2a-1)\quad\cdots\cdots③$$

(1) $3a^2+2a-1$ を変形すると

$$3a^2+2a-1=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-1$$

$$=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

よって，G_2 の頂点の y 座標は

$$a=\frac{-1}{3}\ \text{のとき，最小値}\ \frac{-4}{3}$$

をとる。$a=-\frac{1}{3}$ のとき，G_2 の軸の方程式は

$$x=-a=\frac{1}{3}$$

また，このとき G_2 の頂点の座標は $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$ となるので

$$G_2:y=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

これと x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ として

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{1\pm2\sqrt{3}}{3}$$

(2) $G_2:y=x^2+2ax+4a^2+2a-1$ が点 $(0,\ 5)$ を通るとき

$$5=4a^2+2a-1\qquad\therefore\quad 2a^2+a-3=0$$

これより

$$(a-1)(2a+3)=0\qquad\therefore\quad a=1,\ \frac{-3}{2}$$

$a=1$ のとき，G_2 の頂点は③より点 $(-1,\ 4)$ となる。こ

れを x 軸方向に k，y 軸方向に k $(k \neq 0)$ だけ平行移動すると，点 $(-1+k,\ 4+k)$ にうつる。これが G_1 上にあるとき

$$4+k=3\cdot(-1+k)^2-2\cdot(-1+k)-1$$

$$3k^2-9k=0 \qquad \therefore \quad k(k-3)=0$$

$k \neq 0$ であるから

$$k=3$$