「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。
※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

１８章ー１　微積分（１）

要点

＜　極値　＞

【1】『極値の計算』

(1) 3 次関数 $y=x^3+px$ が，$x=1$ で極小値をとるとき，極大値を与える x の値を求めよ．

(2) 3 次関数 $f(x)=x^3-9x^2+12x-1$ で，(極大値)−(極小値) の値を求めよ．

【2】『3 次関数の性質（対称性）』

3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは，点 $(3,\ -2)$ に関して対称であり，$x=1$ で極大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．a，b，c，d の値を求めよ．

■解答

【1】

(1) $f(x)=x^3+px$ とおくと　　$f'(x)=3x^2+p$

$f(x)$ が $x=1$ で極小値をもつから

$f'(1)=0 \Longleftrightarrow 3+p=0$　　　$\therefore\ \ p=-3$

このとき

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

であり，極大値を与える x の値は

$\boldsymbol{x=-1}$　　(答)

(2) $f(x)=x^3-9x^2+12x-1$ より

$f'(x)=3x^2-18x+12=3(x^2-6x+4)=3(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})$

いま，$\alpha=3-\sqrt{5}$，$\beta=3+\sqrt{5}$ とすると $f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となる．

$f(x)=(x^2-6x+4)(x-3)-10x+11$ より

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)=&(-10\alpha+11)-(-10\beta+11)\\ =&10(\beta-\alpha)=10\times 2\sqrt{5}=\boldsymbol{20\sqrt{5}}\end{aligned}$$　　(答)

≪別解≫　積分を利用する方法もある（α，β を設定するところまでは同じ）．

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)=&\int_\beta^\alpha f'(x)dx=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)dx\\ =&3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right\}=-\frac{1}{2}(-2\sqrt{5})^3\\ =&20\sqrt{5}\end{aligned}$$

【2】

$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは，点 $(3,\ -2)$ に関して対称であり，$x=1$ で極大値をとるから，$x=5$ で極小となる．よって

$f'(x)=3a(x-1)(x-5)=3ax^2-18ax+15a$

であるから，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ と比較して

$b=-9a$，$c=15a$

$\therefore \quad f(x)=a(x^3-9x^2+15x)+d \ \cdots\cdots(*)$

すると，$f(3)=-2$，$f(1)=\dfrac{2}{3}$ より

$f(3)=a(27-81+45)+d=-2 \iff -9a+d=-2 \cdots$ ①

$f(1)=a(1-9+15)+d=\dfrac{2}{3} \iff 7a+d=\dfrac{2}{3} \cdots$ ②

② − ① より

$16a=\dfrac{8}{3} \qquad \therefore \quad a=\dfrac{1}{6},\ d=-2+\dfrac{9}{6}=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$(*)$ は

$f(x)=\dfrac{1}{6}(x^3-9x^2+15x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}$

よって

$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{6},\ b=-\dfrac{3}{2},\ c=\dfrac{5}{2},\ d=-\dfrac{1}{2}}$ (答)

＜　微分法の応用　＞

【3】『方程式』

$f(x)$ が x の 3 次関数であるとき，方程式 $f(x)=0$ が 3 個の異なる実数解をもつことは，方程式 $f'(x)=0$ が 2 個の異なる実数解をもつための $\boxed{}$.

[選択欄]　(a)　必要条件であるが十分条件でない
(b)　十分条件であるが必要条件でない
(c)　必要十分条件である
(d)　必要条件でも十分条件でもない

【4】『不等式』

$x \geqq 0$ のすべての x について，不等式が $a(x-1) \leqq x^3$ をみたす a の最大値を求めよ.

■解答

【3】

$f(x)$ が x の 3 次関数であるとき，

方程式 $f(x)=0$ が 3 個の異なる実数解をもつ $\cdots\cdots$①

$\Longleftrightarrow$ $f(x)$ が極値をもち，極値が異符号である

である．また，

方程式 $f'(x)=0$ が 2 個の異なる実数解をもつ $\cdots\cdots$②

$\Longleftrightarrow$ $f(x)$ が極値をもつ

だから

① $\Longrightarrow$ ②,　① $\not\Longleftarrow$ ②

$\therefore$　**(b) 十分条件であるが必要条件でない**　(答)

【4】

$p(x)=x^3-a(x-1)$ とおき，$x \geqq 0$ で，つねに $p(x) \geqq 0$ が成り立つための a の条件を考える．

$p'(x)=3x^2-a$

(i) $a \leqq 0$ のとき，$p'(x) \geqq 0$ となり，$p(x)$ は単調増加関数になるから，$x \geqq 0$ でつねに 0 以上になるための条件は

$p(0)=a \geqq 0$　　$\therefore$　$a=0$

(ii) $a>0$ のとき，$p(x)$ は $x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ で極小かつ最小となるから，求める条件は

$$p\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=a\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \geqq 0$$

$a>0$ より　$1-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}} \geqq 0$　　$\therefore$　$0<a \leqq \dfrac{27}{4}$

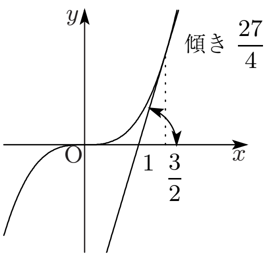
以上より，a のとり得る値の範囲は

$$0 \leqq a \leqq \frac{27}{4}$$

となるので，求める a の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$ である．　(答)

≪別解≫ $f(x)=x^3$，$g(x)=a(x-1)$ とおく．

　$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，$y=g(x)$ のグラフは定点 $(1,\ 0)$ を通る傾き a の直線を表す．$y=g(x)$ が $y=f(x)$ に接するときを考える．$(t,\ t^3)$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は



$$y=3t^2(x-t)+t^3$$

$$\therefore\quad y=3t^2x-2t^3 \ \cdots\cdots ①$$

これが点 $(1,\ 0)$ を通るのは

$$0=3t^2-2t^3$$

$$(2t-3)t^2=0 \qquad \therefore\quad t=0,\ \frac{3}{2}$$

①に代入してそれぞれ　　$y=0,\ y=\frac{27}{4}(x-1)$

題意の不等式が $x \geqq 0$ の範囲でつねに成り立つための条件は

$$0 \leqq a \leqq \frac{27}{4}$$

よって　　a の最大値は　$\frac{27}{4}$

< 最大・最小 >

【5】『文字の置き換え』

(1) $y=2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とするとき

(i) $x=\sin\theta+\cos\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(ii) y の最大値，最小値を求めよ.

(2) 関数 $f(x)=\log_{10}(24-x^2)+\log_{10}(x+3)$ の最大値を求めよ.

【6】『図形量の最大・最小』

側面を展開すると半径 a，中心角 π のおうぎ形になるような直円錐を考える．この直円錐に内接する直円柱の底面の半径を x とする．次の問いに答えよ.

(1) 直円柱の体積を x を用いて表せ.

(2) x を変えたとき，直円柱の体積の最大値を求めよ.

■解答

【5】

(1) (i) 合成して $x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi\iff\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ $\quad\therefore\quad \boldsymbol{-1\leqq x\leqq\sqrt{2}}$ (答)

(ii) $x=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗して

$$x^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$$

したがって

$$y=(\sin\theta+\cos\theta)\{2(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+1\}$$
$$=x\left\{2\left(1-\frac{x^2-1}{2}\right)+1\right\}=-x^3+4x$$

$y'=-3x^2+4$ より，$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ における増減は下表のようになる.

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	-3	$\nearrow$	$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

したがって　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{16\sqrt{3}}{9}}$，**最小値** $\boldsymbol{-3}$ (答)

(2) 真数条件より $f(x)$ の定義域は

$$\begin{cases}24-x^2>0\\ x+3>0\end{cases}\iff\begin{cases}-2\sqrt{6}<x<2\sqrt{6}\\ x>-3\end{cases}\qquad\therefore\quad -3<x<2\sqrt{6}$$

また

$$f(x)=\log_{10}(24-x^2)+\log_{10}(x+3)=\log_{10}(24-x^2)(x+3)$$

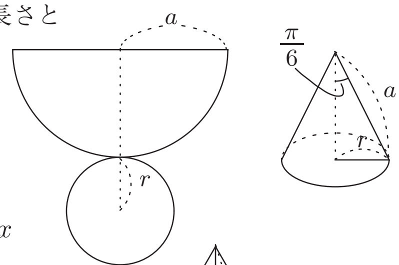
であり，底 10 の対数関数は単調に増加するので $g(x) = (24 - x^2)(x + 3) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 72$ が最大となるときに $f(x)$ も最大となる．

$$g'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = -3(x + 4)(x - 2)$$

x	-3	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{6}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

よって，$f(x)$ の最大値は　　$\log_{10} 100 = \mathbf{2}$　　(答)

【6】



(1) 直円錐の底面の半径を r とすると，底面の円周の長さと側面のおうぎ形の弧の長さは等しいから

$$r \cdot 2\pi = a \cdot \pi$$

より

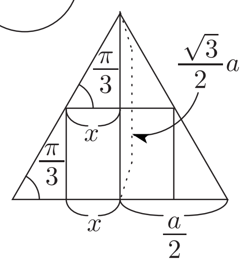
$$r = \frac{a}{2} \qquad \therefore \text{（直円錐の高さ）} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

よって，直円錐に内接する直円柱の底面の半径が x のとき，断面は右下図のようになる．体積 V は

$$\text{円柱の高さ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - 2x)$$

より

$$V = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi x^2(a - 2x)} \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right) \qquad \text{(答)}$$



(2) $f(x) = x^2(a - 2x) = ax^2 - 2x^3$ とおくと

$$f'(x) = 2ax - 6x^2 = -2x(3x - a)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	$\frac{a}{2}$
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$x = \frac{a}{3}$ のとき V は最大となり，最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2\left(a - 2 \cdot \frac{a}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3} \qquad \text{(答)}$$

問題

■演習

★★【1】 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となる．このとき，次の等式が成り立つことをそれぞれ示せ．

(1) $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

(2) $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

(3) $f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$

★【2】 t が 0 以上の値をとりながら変化するとき，xy 平面上において，点 $(2,\ 1)$ がつねに円

$$(x-t-1)^2+y^2=\frac{a}{t+1}$$

の外部にあるような正の定数 a の条件を求めよ．

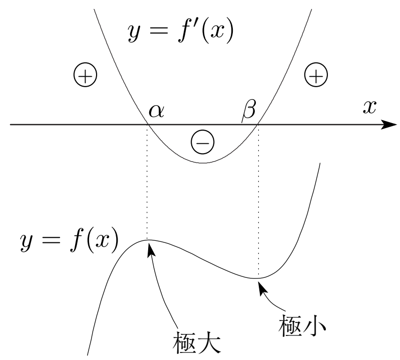
★★【3】 半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ．

★【4】 $-1<t<1$ とし，xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(t,\ \sqrt{1-t^2}\right)$, $\mathrm{C}(t,\ 0)$ をとる．$\triangle\mathrm{ABC}$ を x 軸の周りに回転させて得られる円すいの側面積を $S(t)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $S(t)$ を求めよ．

(2) $S(t)$ が最大になる t を求めよ．

問題



【1】$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

であり，$f(x)$ の極値が存在するので，

$f'(x)=0$ の判別式 D に対して

$$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$$

のもとで考える．

$x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となるので

$$f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0,\ \alpha<\beta$$

をみたす．

(1) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

$$\text{商：}\frac{1}{3}x+\frac{a}{9}$$

$$\text{余り：}\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)x+c-\frac{ab}{9}$$

であるから

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{a}{9}\right)f'(x)+\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)x+c-\frac{ab}{9}$$

が成り立つ．すると

$$f(\alpha)=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)\alpha+c-\frac{ab}{9}$$

$$f(\beta)=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)\beta+c-\frac{ab}{9}$$

$$\therefore\quad f(\alpha)+f(\beta)=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)(\alpha+\beta)+2c-\frac{2ab}{9}$$

また，$f'(x)=0$ の 2 解が α，β なので解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}a,\ \alpha\beta=\frac{b}{3}$$

よって

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)\left(-\frac{2}{3}a\right)+2c-\frac{2ab}{9}\\&=\frac{4}{27}a^3-\frac{4}{9}ab+2c-\frac{2ab}{9}\\&=\frac{4}{27}a^3-\frac{2ab}{3}+2c\ \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$$

一方

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)&=f\left(-\frac{a}{3}\right)=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c\\&=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

が成立する．　　　　（証終）

(2) (1) と同様にして

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)(\alpha-\beta)$$

であり，$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a,\ \alpha\beta=\dfrac{b}{3}$ より

$$a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta),\ b=3\alpha\beta$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2&=\frac{2}{3}\cdot 3\alpha\beta-\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{4}(\alpha+\beta)^2\\&=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\\&=-\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{2}=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\end{aligned}$$

よって

$$f(\alpha)-f(\beta)=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\cdot(\alpha-\beta)=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}$$

が成り立つ．（証終）

≪別解≫ $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=\Big[f(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}=\int_{\beta}^{\alpha}f'(x)dx\\&=\int_{\beta}^{\alpha}3(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3\\&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

が成立する．（証終）

(3)

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{\alpha}^{\beta}\\&=\frac{1}{4}(\beta^4-\alpha^4)+\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)\\&=\frac{\beta-\alpha}{2}\left\{\frac{(\beta^2+\alpha^2)(\beta+\alpha)}{2}+\frac{2a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3}+b(\beta+\alpha)+2c\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)}{2}+\frac{2a}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c$$

すると

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b$$

より

$$\begin{aligned}\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx&=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)\\&\qquad+\frac{2a}{3}\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b+\frac{b}{3}\right)+b\left(-\frac{2a}{3}\right)+2c\\&=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c\end{aligned}$$

よって，(1) の ① より

$$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

が成立する． （証終）

【2】円 $(x-t-1)^2+y^2=\dfrac{a}{t+1}$ の外部を表す不等式は

$$(x-t-1)^2+y^2-\frac{a}{t+1}>0$$

であり，この領域に点 (2, 1) がつねにあるためには 0 以上のすべての実数 t に対して

$$(2-t-1)^2+1^2-\frac{a}{t+1}>0$$

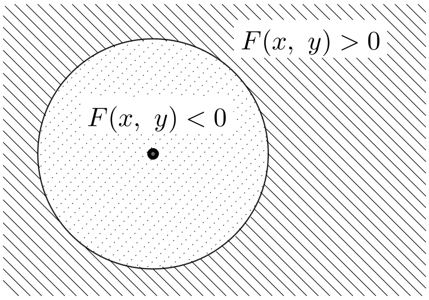
$$\iff t^2-2t+2-\frac{a}{t+1}>0$$

$$\iff (t+1)(t^2-2t+2)>a\ (\because t+1>0)$$

$$\iff t^3-2t^2+2t+t^2-2t+2>a$$

$$\iff t^3-t^2+2>a$$

が成り立つことである．



$$F(x,\ y)=(x-t-1)^2+y^2-\frac{a}{t+1}$$

$f(t)=t^3-t^2+2$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-2t=3t\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

なので，$t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	0		$\frac{2}{3}$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$t\geqq 0$ において，$f(t)>a$ がつねに成立するためには

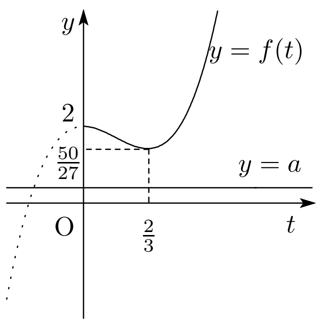
$$f\left(\frac{2}{3}\right)>a$$

であればよく

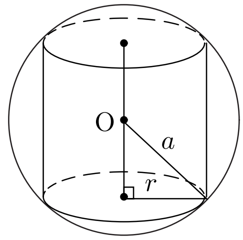
$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}+2=\frac{8-12+54}{27}=\frac{50}{27}$$

なので

$$\boldsymbol{0<a<\frac{50}{27}}$$ （答）



【3】 球の中心を O とし，円柱の底面の半径を r $(0 < r < a)$ とする．円柱の上底，下底の円の中心を通る平面による切り口を考えると



$$(\text{円柱の高さ}) = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

よって円柱の体積 V は

$$V = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2 r^4 - r^6}$$

$r^2 = x$ とし

$$f(x) = a^2 x^2 - x^3 \ (0 < x < a^2)$$

の増減を調べる．

$$f'(x) = 2a^2 x - 3x^2 = -3x\left(x - \frac{2}{3}a^2\right)$$

より，$0 < x < a^2$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0		$\frac{2}{3}a^2$		a^2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

ここで

$$f\left(\frac{2}{3}a^2\right) = a^2 \cdot \frac{4}{9}a^4 - \frac{8}{27}a^6$$

$$= \frac{4}{27}a^6$$

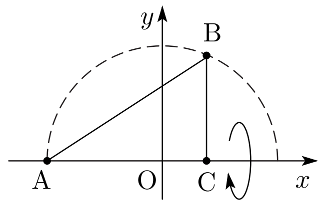
であるから，求める最大値は

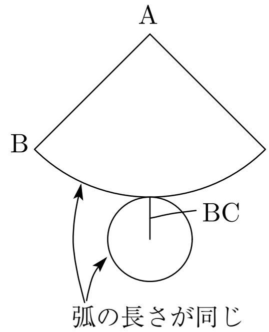
$$V = 2\pi\sqrt{\frac{4}{27}a^6} = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}}\pi = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{9}a^3\pi} \qquad (\text{答})$$

【4】(1)

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(t+1)^2 + (1-t^2)}$$
$$= \sqrt{2(1+t)}$$
$$2\pi\mathrm{BC} = 2\pi\sqrt{1-t^2}$$

より，側面の展開図は右下図のようになり





$$S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2(1+t)} \cdot 2\pi\sqrt{1-t^2}$$
$$= \boldsymbol{\pi\sqrt{2(1-t^2)(1+t)}} \qquad \text{(答)}$$

である．

(2) $f(t) = (1-t^2)(1+t)\ (-1 < t < 1)$ とおくと

$$f'(t) = (-3t^2 - 2t + 1)$$
$$= -(3t-1)(t+1)$$

より，$f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	-1		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

$f(t)$ が最大のとき $S(t)$ も最大になるから，求める t は

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

である．