

「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。

※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

27章 微積分 (1)

要点

< 極値 >

【1】『極値の計算』

(1) 3次関数 $y = x^3 + px$ が、 $x = 1$ で極小値をとるとき、極大値を与える x の値を求めよ。

(2) 3次関数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ で、(極大値)-(極小値)の値を求めよ。

【2】『3次関数の性質 (対称性)』

3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフは、点 $(3, -2)$ に関して対称であり、 $x = 1$ で極大値 $\frac{2}{3}$ をとる。 a, b, c, d の値を求めよ。

■解答

【1】

(1) $f(x) = x^3 + px$ とおくと $f'(x) = 3x^2 + p$

$f(x)$ が $x = 1$ で極小値をもつから

$$f'(1) = 0 \iff 3 + p = 0 \quad \therefore p = -3$$

このとき

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

であり、極大値を与える x の値は

$$x = -1 \quad (\text{答})$$

(2) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 12 = 3(x^2 - 6x + 4) = 3(x - 3 + \sqrt{5})(x - 3 - \sqrt{5})$$

いま、 $\alpha = 3 - \sqrt{5}$ 、 $\beta = 3 + \sqrt{5}$ とすると $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大、 $x = \beta$ で極小となる。

$$f(x) = (x^2 - 6x + 4)(x - 3) - 10x + 11 \text{ より}$$

$$f(\alpha) - f(\beta) = (-10\alpha + 11) - (-10\beta + 11)$$

$$= 10(\beta - \alpha) = 10 \times 2\sqrt{5} = 20\sqrt{5} \quad (\text{答})$$

<別解> 積分を利用する方法もある (α, β を設定するところまでは同じ)。

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx = \int_{\beta}^{\alpha} 3(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= 3 \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(\alpha - \beta)^3 \right\} = -\frac{1}{2}(-2\sqrt{5})^3$$

$$= 20\sqrt{5}$$

【2】

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフは、点 $(3, -2)$ に関して対称であり、 $x = 1$ で極大値をとるから、 $x = 5$ で極小となる。よって

$$f'(x) = 3a(x-1)(x-5) = 3ax^2 - 18ax + 15a$$

であるから、 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ と比較して

$$b = -9a, \quad c = 15a$$

$$\therefore f(x) = a(x^3 - 9x^2 + 15x) + d \dots\dots (*)$$

すると, $f(3) = -2, f(1) = \frac{2}{3}$ より

$$f(3) = a(27 - 81 + 45) + d = -2 \iff -9a + d = -2 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = a(1 - 9 + 15) + d = \frac{2}{3} \iff 7a + d = \frac{2}{3} \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$16a = \frac{8}{3} \quad \therefore a = \frac{1}{6}, d = -2 + \frac{9}{6} = -\frac{1}{2}$$

ゆえに, (*) は

$$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 15x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

よって

$$a = \frac{1}{6}, b = -\frac{3}{2}, c = \frac{5}{2}, d = -\frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

【3】『方程式』

$f(x)$ が x の 3 次関数であるとき、方程式 $f(x) = 0$ が 3 個の異なる実数解をもつことは、方程式 $f'(x) = 0$ が 2 個の異なる実数解をもつための 。

- [選択欄] (a) 必要条件であるが十分条件でない
 (b) 十分条件であるが必要条件でない
 (c) 必要十分条件である
 (d) 必要条件でも十分条件でもない

【4】『不等式』

$x \geq 0$ のすべての x について、不等式が $a(x-1) \leq x^3$ をみたす a の最大値を求めよ。

■解答

【3】

$f(x)$ が x の 3 次関数であるとき、

方程式 $f(x) = 0$ が 3 個の異なる実数解をもつ……①

$\iff f(x)$ が極値をもち、極値が異符号である

である。また、

方程式 $f'(x) = 0$ が 2 個の異なる実数解をもつ……②

$\iff f(x)$ が極値をもつ

だから

$$\textcircled{1} \implies \textcircled{2}, \quad \textcircled{1} \not\Leftarrow \textcircled{2}$$

\therefore (b) 十分条件であるが必要条件でない (答)

【4】

$p(x) = x^3 - a(x-1)$ とおき、 $x \geq 0$ で、つねに $p(x) \geq 0$ が成り立つための a の条件を考える。

$$p'(x) = 3x^2 - a$$

(i) $a \leq 0$ のとき、 $p'(x) \geq 0$ となり、 $p(x)$ は単調増加関数になるから、 $x \geq 0$ でつねに 0 以上になるための条件は

$$p(0) = a \geq 0 \quad \therefore a = 0$$

(ii) $a > 0$ のとき、 $p(x)$ は $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$ で極小かつ最小となるから、求める条件は

$$p\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = a\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \geq 0$$

$$a > 0 \text{ より } 1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \geq 0 \quad \therefore 0 < a \leq \frac{27}{4}$$

以上より、 a のとり得る値の範囲は

$$0 \leq a \leq \frac{27}{4}$$

となるので、求める a の最大値は $\frac{27}{4}$ である。 (答)

<別解> $f(x) = x^3$, $g(x) = a(x-1)$ とおく.

$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり, $y = g(x)$ のグラフは定点 $(1, 0)$ を通る傾き a の直線を表す. $y = g(x)$ が $y = f(x)$ に接するときを考える. (t, t^3) における $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$y = 3t^2(x-t) + t^3$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 \dots\dots ①$$

これが点 $(1, 0)$ を通るのは

$$0 = 3t^2 - 2t^3$$

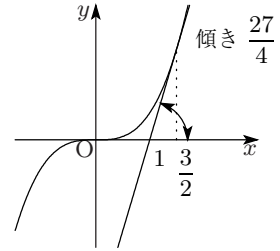
$$(2t-3)t^2 = 0 \quad \therefore t = 0, \frac{3}{2}$$

①に代入してそれぞれ $y = 0$, $y = \frac{27}{4}(x-1)$

題意の不等式が $x \geq 0$ の範囲でつねに成り立つための条件は

$$0 \leq a \leq \frac{27}{4}$$

よって a の最大値は $\frac{27}{4}$



【5】『文字の置き換え』

(1) $y = 2(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) + (\sin \theta + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき

(i) $x = \sin \theta + \cos \theta$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(ii) y の最大値, 最小値を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \log_{10}(24 - x^2) + \log_{10}(x + 3)$ の最大値を求めよ.

【6】『図形量の最大・最小』

側面を展開すると半径 a , 中心角 180° のおうぎ形になるような直円錐を考える. この直円錐に内接する直円柱の底面の半径を x とする. 次の問いに答えよ.

(1) 直円柱の体積を x を用いて表せ.

(2) x を変えたとき, 直円柱の体積の最大値を求めよ.

■解答

【5】

(1) (i) 合成して $x = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$

$$0 \leq \theta \leq \pi \iff \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \text{ より}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \quad \therefore -1 \leq x \leq \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(ii) $x = \sin \theta + \cos \theta$ の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$$

したがって

$$y = (\sin \theta + \cos \theta) \{ 2(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + 1 \}$$

$$= x \left\{ 2 \left(1 - \frac{x^2 - 1}{2} \right) + 1 \right\} = -x^3 + 4x$$

$y' = -3x^2 + 4$ より, $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ における増減は下表のようになる.

x	-1	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$...	$\sqrt{2}$
y'		+	0	-	
y	-3	↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	$2\sqrt{2}$

したがって 最大値 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$, 最小値 -3 (答)

(2) 真数条件より $f(x)$ の定義域は

$$\begin{cases} 24 - x^2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\sqrt{6} < x < 2\sqrt{6} \\ x > -3 \end{cases} \quad \therefore -3 < x < 2\sqrt{6}$$

また

$$f(x) = \log_{10}(24 - x^2) + \log_{10}(x + 3) = \log_{10}(24 - x^2)(x + 3)$$

であり, 底 10 の対数関数は単調に増加するので

$$g(x) = (24 - x^2)(x + 3) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 72$$

が最大となるときに $f(x)$ も最大となる.

$$g'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = -3(x + 4)(x - 2)$$

x	-3	...	2	...	$2\sqrt{6}$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		↗	100	↘	

よって, $f(x)$ の最大値は

$$\log_{10} 100 = 2 \quad (\text{答})$$

[6]

- (1) 直円錐の底面の半径を r とすると, 底面の円周の長さ

側面のおうぎ形の弧の長さは等しいから

$$2\pi r = 2\pi a \times \frac{180^\circ}{360^\circ}$$

より

$$r = \frac{a}{2}$$

$$\therefore (\text{直円錐の高さ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

よって, 直円錐に内接する直円柱の底面の半径が x のとき,

断面は右下図のようになる. 体積 V は

$$\text{円柱の高さ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - 2x)$$

より

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi x^2(a - 2x) \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right) \quad (\text{答})$$

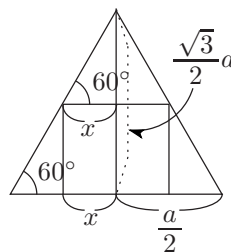
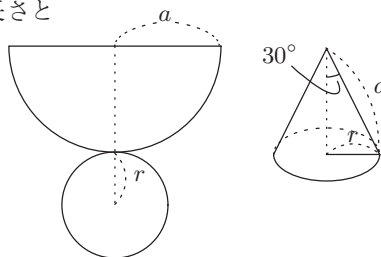
- (2) $f(x) = x^2(a - 2x) = ax^2 - 2x^3$ とおくと

$$f'(x) = 2ax - 6x^2 = -2x(3x - a)$$

x	0	...	$\frac{a}{3}$...	$\frac{a}{2}$
$f'(x)$	(0)	+	0	-	
$f(x)$		↗	極大	↘	

よって, $x = \frac{a}{3}$ のとき V は最大となり, 最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 \left(a - 2 \cdot \frac{a}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3 \quad (\text{答})$$



問題

■ 演習

- ★★
【1】 平面上の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ は、 x 軸と 3 点で交わり、その交点の x 座標を p, q, r ($p < q < r$) とするとき
- $$p + q + r = 9 \quad p^2 + q^2 + r^2 = 123$$
- をみたすとする。このとき、次の各問いに答えよ。
- (1) a と b の値を求めよ。
 - (2) c の値のとり得る値の範囲を求めよ。また、 c がその範囲の値をとるとき、 r のとり得る値の範囲を求めよ。

- ★★
【2】 t が 0 以上の値をとりながら変化するとき、 xy 平面上において、点 $(2, 1)$ がつねに円
- $$(x - t - 1)^2 + y^2 = \frac{a}{t + 1}$$
- の外部にあるような正の定数 a の条件を求めよ。

★【3】 次の各問に答えよ.

(1) $\sin \theta + \cos \theta = t$ とおく. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, t のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ のとり得る値の範囲を求めよ.

★★【4】 半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ.

27章 微積分 (1)

問題

【1】(1) 3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の3解が p, q, r であるから解と係数の関係より

$$p + q + r = -a$$

$$pq + qr + rp = b$$

$$pqr = -c$$

すると $p + q + r = 9$ より

$$-a = 9 \quad \therefore \mathbf{a = -9} \quad (\text{答})$$

また, $(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + qr + rp)$ なので

$$81 = 123 + 2b \quad \therefore \mathbf{b = -21} \quad (\text{答})$$

(2) 「 $y = x^3 - 9x^2 - 21x + c$ が x 軸と3点で交わる」

$$\iff \text{「} x^3 - 9x^2 - 21x + c = 0 \text{ が3つの異なる実数解をもつ」}$$

であり, さらに

$$x^3 - 9x^2 - 21x + c = 0 \iff x^3 - 9x^2 - 21x = -c$$

より

$$y = x^3 - 9x^2 - 21x \text{ と直線 } y = -c \text{ が3点で交わる}$$

と読み替えることができる.

$y = x^3 - 9x^2 - 21x$ より

$$y' = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x^2 - 6x - 7)$$

$$= 3(x - 7)(x + 1)$$

より, 増減は下表のようになる.

x		-1		7	
y'	+	0	-	0	+
y	\nearrow	11	\searrow	-245	\nearrow

よって

$$-245 < -c < 11$$

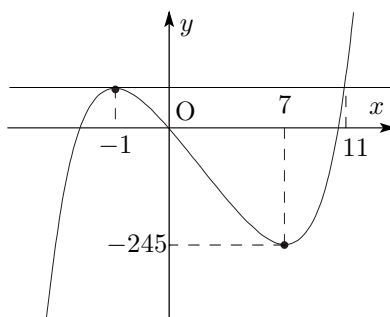
$$\therefore \mathbf{-11 < c < 245} \quad (\text{答})$$

また, p, q, r は $y = x^3 - 9x^2 - 21x$ と直線 $y = -c$ の交点の x 座標であり

$$x^3 - 9x^2 - 21x = 11 \iff (x + 1)^2(x - 11) = 0$$

なので

$$\mathbf{7 < r < 11} \quad (\text{答})$$



【2】円 $(x-t-1)^2 + y^2 = \frac{a}{t+1}$ の外部を表す不等式は

$$(x-t-1)^2 + y^2 - \frac{a}{t+1} > 0$$

であり、この領域に点 $(2, 1)$ がつねにあるためには 0 以上のすべての実数 t に対して

$$(2-t-1)^2 + 1^2 - \frac{a}{t+1} > 0$$

$$\iff t^2 - 2t + 2 - \frac{a}{t+1} > 0$$

$$\iff (t+1)(t^2 - 2t + 2) > a \quad (\because t+1 > 0)$$

$$\iff t^3 - 2t^2 + 2t + t^2 - 2t + 2 > a$$

$$\iff t^3 - t^2 + 2 > a$$

が成り立つことである。

$f(t) = t^3 - t^2 + 2$ とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 2t = 3t \left(t - \frac{2}{3} \right)$$

なので、 $t \geq 0$ における $f(t)$ の増減は下表のようになる。

t	0		$\frac{2}{3}$	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		\searrow	極小	\nearrow

したがって、 $t \geq 0$ において、 $f(t) > a$ がつねに

成立するためには

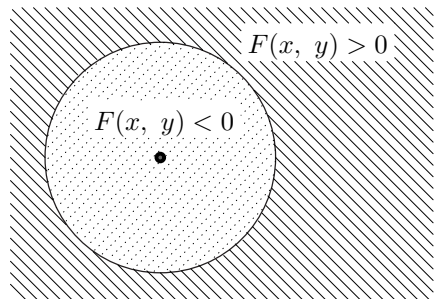
$$f\left(\frac{2}{3}\right) > a$$

であればよく

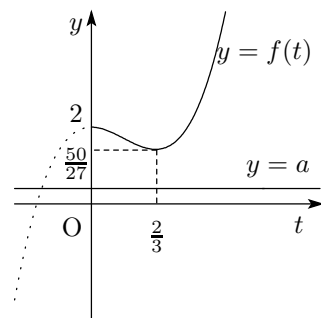
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + 2 = \frac{8-12+54}{27} = \frac{50}{27}$$

なので

$$0 < a < \frac{50}{27} \quad (\text{答})$$



$$F(x, y) = (x-t-1)^2 + y^2 - \frac{a}{t+1}$$



【3】(1) $t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

と変形できるので、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\therefore 1 \leq t \leq \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta$ より

$$t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

であるから、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ で表すと

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= t^3 - \frac{3(t^2 - 1)t}{2} = \frac{2t^3 + 3t - 3t^3}{2} = \frac{-t^3 + 3t}{2} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{-t^3 + 3t}{2} \text{ とおくと}$$

$$f'(t) = \frac{-3t^2 + 3}{2}$$

であり, $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ の範囲で $f'(t) \leq 0$ なので

$$f(\sqrt{2}) \leq f(t) \leq f(1)$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(t) \leq 1 \text{ すなわち } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin^3 \theta + \cos^3 \theta \leq 1 \quad (\text{答})$$

- 【4】 球の中心を O とし, 円柱の底面の半径を r ($0 < r < a$) とする. 円柱の上底, 下底の円の中心を通る平面による切り口を考えると

$$(\text{円柱の高さ}) = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

よって円柱の体積 V は

$$V = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2 r^4 - r^6}$$

$r^2 = x$ とし

$$f(x) = a^2 x^2 - x^3 \quad (0 < x < a^2)$$

の増減を調べる.

$$f'(x) = 2a^2 x - 3x^2 = -3x \left(x - \frac{2}{3}a^2 \right)$$

より, $0 < x < a^2$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x	0		$\frac{2}{3}a^2$		a^2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	極大	↘	

ここで

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}a^2\right) &= a^2 \cdot \frac{4}{9}a^4 - \frac{8}{27}a^6 \\ &= \frac{4}{27}a^6 \end{aligned}$$

であるから, 求める最大値は

$$V = 2\pi\sqrt{\frac{4}{27}a^6} = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}}\pi = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^3\pi \quad (\text{答})$$

