「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

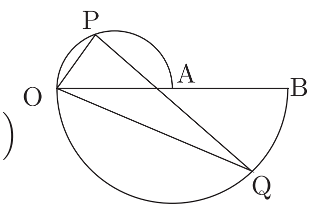
ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。
※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

問題

■演習

★【1】 xy 平面上で，3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(t,\ 2t^2+1)$ を考え，$\angle\mathrm{APB}$ の 2 等分線と x 軸との交点を Q とする．t がすべての実数値を動くとき，$\dfrac{\mathrm{QB}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ．

★★★【2】 長さ 1 の線分 OA を直径とする上半円上の動点を P，長さ 2 の線分 OB を直径とする下半円上の動点を Q とし，△ OPQ の面積を S とする．



(1) $\angle\mathrm{AOP}=\theta$, $\angle\mathrm{BOQ}=\varphi$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，S を θ と φ で表せ．

(2) S の最大値を求めよ．

★★★【3】 多項式の列 $f_n(x)$, $n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$ が

$$f_0(x)=2,\ f_1(x)=x,\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\quad(n=2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots)$$

をみたすとする．

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ であることを示せ．

(2) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく．このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)dx$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)dx$ の値を求めよ．

問題

【1】$\angle \mathrm{APQ} = \angle \mathrm{BPQ}$ だから

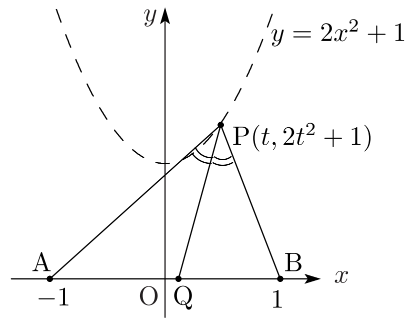
$$\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{AQ}} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}$$

よって

$$\left(\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{AQ}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}\right)^2$$

$$= \frac{(t-1)^2 + (2t^2+1)^2}{(t+1)^2 + (2t^2+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{4t}{4t^4 + 5t^2 + 2t + 2}$$



であり，これを $f(t)$ とおくと

$$f'(t) = -4 \cdot \frac{4t^4 + 5t^2 + 2t + 2 - t(16t^3 + 10t + 2)}{(4t^4 + 5t^2 + 2t + 2)^2}$$

$$= 4 \cdot \frac{12t^4 + 5t^2 - 2}{(4t^4 + 5t^2 + 2t + 2)^2}$$

$$= \frac{4(4t^2 - 1)(3t^2 + 2)}{(4t^4 + 5t^2 + 2t + 2)^2}$$

これより，$f(t)$ の増減は下のようになる．

t		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

そして

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{5},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{9},\ \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 1$$

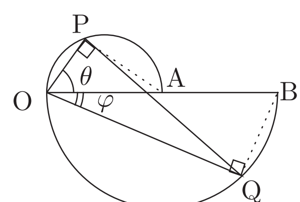
だから，$\dfrac{\mathrm{QB}}{\mathrm{AQ}}$ の

最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}$，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$　　(答)

【2】(1)

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OA}\cos\theta = \cos\theta$$

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OB}\cos\varphi = 2\cos\varphi$$



であるから，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin(\theta+\varphi)$$

$$= \boldsymbol{\cos\theta\cos\varphi\sin(\theta+\varphi)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) (1) より

$$S = \frac{1}{2}\{\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)\}\sin(\theta+\varphi)$$

$\theta+\varphi$ を $0<\theta+\varphi<\pi$ の範囲で固定し $\theta+\varphi=t$ とおくと,

$\sin t>0,\ -t<\theta-\varphi<t$

であるから，S は $\theta=\varphi$ のとき最大値

$$\frac{1}{2}(\cos t+1)\sin t=\frac{1}{2}(\sin t\cos t+\sin t)\cdots\cdots①$$

をとる．

次に，t を $0<t<\pi$ の範囲で変化させる．ここで，①を $f(t)$ とすると

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{1}{2}(\cos^2 t-\sin^2 t+\cos t)\\&=\frac{1}{2}(2\cos^2 t+\cos t-1)\\&=\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)(\cos t+1)\end{aligned}$$

したがって，$f(t)$ は表のように変化し，

$$t=\frac{\pi}{3}\qquad \therefore\ \theta=\varphi=\frac{\pi}{6}$$

のとき最大になる．ゆえに，S の最大値は，

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{3}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

【3】(1) i) $n=0,\ 1$ のとき

$f_0(x)=2,\ f_1(x)=x$

より，

$f_0(2\cos\theta)=2\cos(0\cdot\theta)=2,\ f_1(2\cos\theta)=2\cos(1\cdot\theta)=2\cos\theta$

よって，$n=0,\ 1$ のとき題意は成り立つ．

ii) $n=k,\ k+1$ のとき，題意が成り立つとすると，与えられた漸化式より，

$$\begin{aligned}f_{k+2}(2\cos\theta)&=2\cos\theta\cdot f_{k+1}(2\cos\theta)-f_k(2\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta-2\cos k\theta\\&=2\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-2\cos k\theta\\&=2\cos(k+2)\theta\end{aligned}$$

よって，$n=k+2$ のときも題意は成り立つ．

以上，i)，ii) より，任意の $n(=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で題意は成り立つ．　[証明終]

(2) $|x|\leqq 2$ のとき，$x=2\cos\theta(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおける．

ここで，(1) より，

$$\begin{aligned}f_n(x)=0&\iff f_n(2\cos\theta)=0\\&\iff 2\cos n\theta=0\cdots\cdots①\end{aligned}$$

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より

$0\leqq n\theta\leqq n\pi\cdots\cdots②$

に注意すると，$x=x_n$ のときの θ を θ_n とすれば，θ_n は①,②をみたす θ のうち最小のものなので，

$$n\theta_n=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\quad \theta_n=\frac{\pi}{2n}$$

$\therefore \quad x_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}$

さらに，$x = 2\cos\theta$ より

$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta \qquad \therefore \quad dx = -2\sin\theta d\theta$

よって，

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{x_n}^{2} f_n(x)dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2n}}^{0} f_n(2\cos\theta)(-2\sin\theta d\theta) \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2n}} 2\cos n\theta \cdot 2\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}} \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\} d\theta \\
&= 2\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2n}} \\
&= 2\left\{-\frac{1}{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1}{n-1}\right\} \\
&= 2\left(\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n-1}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{n^2-1}\left(n\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)dx \\
=& \lim_{n\to\infty} n^2 I_n \\
=& \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2-1}\left(n\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1-\frac{1}{n^2}}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
=& \frac{4}{1-0}\cdot\left(1\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
=& \boldsymbol{2(\pi-2)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$