「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。
※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

９章　微分・積分（１）

要点

■ポイント

▼ **整関数のグラフと微分係数，接線.**

関数 $y = f(x)$ で，$f(x)$ が x の整式であるとき，$f(x)$ は『整関数』と言われる.

次は認めることとする.

- 整関数のグラフは，実数全体で連続である.
- $\left|f(x)\right|$ は，$|x|$ を大きくすれば，いくらでも大きくなる.

▼ **関数の極大・極小.**

次が成り立つが，逆は成り立たない：

$$f(x) \text{ が } x = a \text{ で極値をもつならば，} f'(a) = 0.$$

つまり，導関数の値が 0 であることは，極値をもつための必要条件ではあるが，十分条件ではない．反例を与えよ．また，必要十分であるためには，どのような条件を加えればいいかを考えよ.

■ポイント

▼ **3 次関数の性質 (1).**

3 次関数のグラフは常に点対称である．対称の中心は，微分して出来る導関数 — 2 次関数 — を平方完成して，その軸を求めれば見つけることが出来る．例えば $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (ただし $a \neq 0$) であれば，微分して

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{b^2}{3a} + c$$

となるから，$y = f'(x)$ の軸は $x = -\dfrac{b}{3a}$ である．図 1 を参照のこと.

従って，対称の中心 K は $\mathrm{K}\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ となる.

▼ **3 次関数の性質 (2).**

3 次関数が極値をもつときには，更に次の性質をもつ ($\alpha < \beta$ とする)：

3 次関数 $y = f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値 $y = M$ を，$x = \beta$ で極小値 $y = m$ をとるとする.

このとき (図 2 を参照せよ),

- 直線 $y = M$ と $y = f(x)$ の接点以外の交点の x 座標は $x = \dfrac{3\beta - \alpha}{2}$ であり，
- 直線 $y = m$ と $y = f(x)$ の接点以外の交点の x 座標は $x = \dfrac{3\alpha - \beta}{2}$ である.

図 1　対称の中心

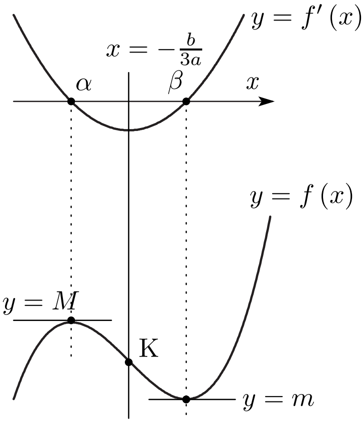
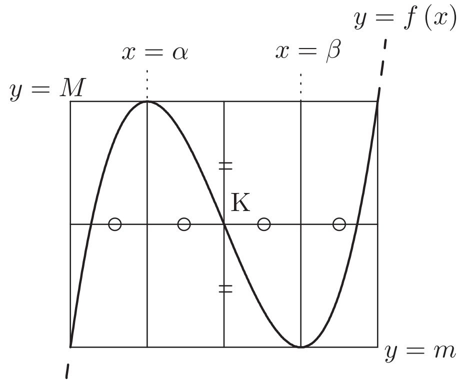


図 2　極値に等しい関数値



■ポイント

▼ 重接線.

1 つの曲線に 1 本の直線が 2 個以上の点で接するとき，その接線を重接線という.

3 次関数には重接線は存在しないから，接線と接点は一対一に対応する．つまり，接線の本数と接点の個数はつねに等しい.

それに対して 4 次以上の関数のグラフには，重接線が存在する．従って，接点の個数と接線の本数は一般には一致しない.

関数 $y=f(x)$ が 4 次関数で，その 4 次の係数が 1 であり，また重接線 ℓ の方程式が $y=ax+b$ であるとき，接点の x 座標が α, β であるならば，方程式 $f(x)=ax+b$ は α と β を 2 重解にもつ．つまり，次が恒等式として成立する：

$$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

例題 1

曲線 $C : y = x^3 - x + 6$ について次の問に答えよ．

(1) C 上の点 $(t,\ t^3 - t + 6)$ での接線の方程式を求めよ．

(2) (1) の接線が $(-2,\ 0)$ を通るとき，接線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた接線と曲線 C との共有点を求めよ．

■解答

(1) $y' = 3x^2 - 1$ より

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t + 6$$

$$\therefore \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 6 \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の式が $(x,\ y) = (-2,\ 0)$ で成り立つから

$$0 = (3t^2 - 1)\cdot(-2) - 2t^3 + 6 \qquad \therefore \quad 2t^3 + 6t^2 - 8 = 0$$

よって

$$(t - 1)(t^2 + 4t + 4) = (t - 1)(t + 2)^2 = 0 \qquad \therefore \quad t = 1,\ -2$$

以上より

$t = 1$ のとき，$y = 2x + 4$，$t = -2$ のとき，$y = 11x + 22$ となる．　(答)

(3) $y = 2x + 4$ と C との交点は，方程式を連立して

$$x^3 - x + 6 - (2x + 4) = (x - 1)^2(x + 2) = 0$$

より，$x = 1$ (2 重解)，$x = -2$ (単解) となる．よって共有点は

$(1,\ 6)$，$(-2,\ 0)$　(答)

$y = 11x + 22$ と C との交点は

$$x^3 - x + 6 - (11x + 22) = (x + 2)^2(x - 4) = 0$$

より，$x = -2$ (2 重解)，$x = 4$ (単解) となる．よって共有点は

$(4,\ 66)$，$(-2,\ 0)$　(答)

例題 2

曲線 $C: y=x^3-x+6$ とする．x 軸上の点 $(t,\ 0)$ (ただし $t>0$) から曲線 C に 3 本の接線が引けるような，t の値の範囲を求めよ．

■解答

C の方程式を微分して

$$y'=3x^2-1$$

であるから，$x=s$ での接線は

$$\begin{aligned} y&=(3s^2-1)(x-s)+s^3-s+6 \\ &=(3s^2-1)x-2s^3+6 \end{aligned}$$

これが $(t,\ 0)$ を通るので

$$0=(3s^2-1)t-2s^3+6 \Longleftrightarrow 2s^3-3ts^2+t-6=0$$

これをみたす s の異なる 3 個の実数解が存在することが必要かつ十分．そこでこれを s の方程式とみて，異なる 3 つの実数解が存在する条件を求める．この左辺を

$$f(s)=2s^3-3ts^2+t-6$$

とおく．

$$f'(s)=6s^2-6ts=6s(s-t)$$

より，$t>0$ のとき，$s=0,\ t$ で極値をもつ．

よって, 異なる 3 実解をもつためには，$f(0)$ と $f(t)$ が異符号であることが必要かつ十分である：

$$\begin{aligned} &f(0)\cdot f(t)<0 \\ \therefore\quad &(t-6)(-t^3+t-6)<0 \\ \therefore\quad &(t-6)(t^3-t+6)=(t-6)(t+2)(t^2-2t+3)>0 \end{aligned}$$

よって，$t^2-2t+3=(t-1)^2+2>0,\ t>0$ より，求める t の範囲は

$t>6$　　(答)

問題

■演習

★【1】3 次関数

$$f(x)=x^3+kx^2+(3-k)x$$

が極大値と極小値をもつとする．このとき, 次の問に答えよ．

(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ で $f(x)$ が極大値，極小値をとるとき，$\beta-\alpha$ を k で表せ．

(3) $f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 のとき，k の値を求めよ．

★★【2】座標平面上で, 点 $(4,\ 5)$ を通る直線が, 曲線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と異なる 2 点 P, Q で交わっている．

このとき, 線分 PQ の長さが最小となるような直線の傾きと，線分 PQ の最小値を求めよ．

★★【3】$a,\ b,\ c$ を実数とする．$y=x^3+3ax^2+3bx$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという．

このとき $a^2>b$ が成立することを示し，さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間

$$\left(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b}\right)$$

に含まれていることを示せ．

ただし，$p<q$ をみたす実数 p, q について，「開区間 $(p,\ q)$」とは

$$(p,\ q)=\left\{x\,\middle|\,p<x<q\right\}$$

のこととする．

★【4】曲線 $C\ :\ y=x^3-4x$ について, 次の問に答えよ．

(1) C の接線のうち, 点 $(-2,\ 4)$ を通るものをすべて求めよ．

(2) C 上の点 $(3,\ 15)$ における接線が, 再び C と交わる点の座標を求めよ．

☆【5】曲線 $y=x^4-6x^2$ に，点 (a,b) を通る 4 つの接線が引けるのは，(a,b) がどのような範囲にあるときか，図示せよ．

９章　微分・積分（１）

問題

【1】(1) $f\,(x)$ を微分すれば

$$f'\,(x) = 3x^2 + 2kx + 3 - k$$

である．$f(x)$ が極大値，極小値をもつためには，2 次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 実解をもつことが必要かつ十分であるから，その判別式を D として

$$D/4 = k^2 - 3(3-k) > 0$$

$$\iff k < \frac{-3-3\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} < k \qquad \text{(答)}$$

(2) α，β は (1) で考えた 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の解だから，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2k}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{3-k}{3}$$

これより，

$$\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{k^2+3k-9}}{3} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より，

$$f(\alpha) - f(\beta) = 4$$

左辺に注目すると，

$$(\text{左辺}) = \int_\beta^\alpha f'(x)dx \ = \ 3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= \frac{3(\beta-\alpha)^3}{6}$$

よって，

$$\frac{3(\beta-\alpha)^3}{6} = 4 \iff \beta - \alpha = 2$$

$$\iff \frac{2\sqrt{k^2+3k-9}}{3} = 2 \quad (\because \quad (2)\ \text{より})$$

$$\iff k^2 + 3k - 9 = 9$$

$$\iff (k+6)(k-3) = 0$$

$$\iff k = -6,\ 3 \qquad \text{(答)}$$

これらは (1) で求めた条件をみたす．

【2】$y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の 2 点 P, Q の x 座標を $p,\ q\ (p<q)$ とすると, 直線 PQ の式は

$$y=\frac{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{4}p^2}{q-p}(x-p)+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}(p+q)x-\frac{1}{4}pq \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①が点 $(4,\ 5)$ を通るので

$$p+q-\frac{1}{4}pq=5$$

①の傾きを m とおくと

$$p+q=4m, \quad pq=4(4m-5)$$

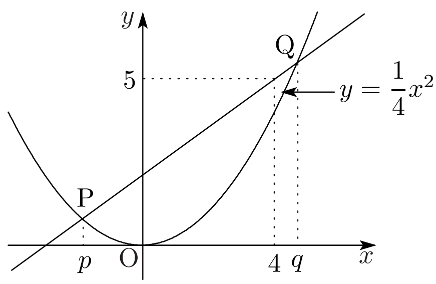
従って, $p,\ q$ は

$$t^2-4mt+4(4m-5)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

の 2 解である．ここで, ②の判別式を D とすれば,

$$\frac{D}{4}=4m^2-4(4m-5)=4\{(m-2)^2+1\}>0$$

より，$p,\ q$ は確かに実数で，また $p\neq q$ をみたす.



ここで

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{1+m^2}(q-p)$$

$$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=16m^2-16(4m-5)=16\left(m^2-4m+5\right)$$

だから

$$\mathrm{PQ}^2=\left(1+m^2\right)(q-p)^2=16\left(m^2+1\right)\left(m^2-4m+5\right)$$

そこで，$f(m)=\left(m^2+1\right)\left(m^2-4m+5\right)$ と置くと,

$$f'(m)=4m^3-12m^2+12m-4=4(m-1)^3$$

だから，$f'(m)=0$ より

$$m=1$$

を得る．関数 $f(m)$ の増減表は次のようになる：

m	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(m)$	$-$	0	$+$
$f(m)$	↘	極小	↗

このとき，$f(1)=4,\ \mathrm{PQ}=4\sqrt{f(m)}$ より,

傾き $m=1$ のとき, PQ の最小値は 8 となる.　　(答)

【3】$f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ とおく．

$y=f(x)$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつためには，関数 $f(x)$ が極大値・極小値を持つことが必要である．

従って，$f'(x)=3x^2+6ax+3b$ であるから

$f'(x)=3x^2+6ax+3b=3(x^2+2ax+b)=0 \quad \cdots$①

が相異なる 2 つの実数解を持たなくてはならない．よって①の判別式を D として

$\dfrac{D}{4}=a^2-b>0$

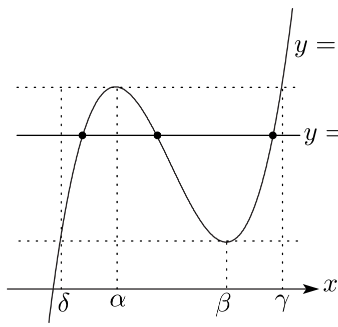
が成立することが必要．

ここで，①の 2 つの実数解を $\alpha=-a-\sqrt{a^2-b}$, $\beta=-a+\sqrt{a^2-b}$ とする．このとき，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小である．

次に，$f(x)=f(\alpha)$ となる α 以外の x の値を γ とし，$f(x)=f(\beta)$ となる β 以外の x の値を δ とすると，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	δ	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$

これより，下のグラフを得る：



従って，2 つのグラフが相異なる 3 つの交点を持つのは $f(\beta)<c<f(\alpha)$ のときであり，また，このとき $y=f(x)$ と $y=c$ の交点の x 座標は 3 つの開区間

$(\delta,\ \alpha)$, $(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \gamma)$

に各々 1 つずつある．

方程式

$f(x)-f(\alpha)=x^3+3ax^2+3bx-(\alpha^3+3a\alpha^2+3b\alpha)=0$

の解が，α, γ となるので，解と係数の関係より

$\gamma+2\alpha=-3a$

よって

$\gamma=-a+2\sqrt{a^2-b}$

同様にして，$\delta=-a-2\sqrt{a^2-b}$ となる．

以上より題意が示された．（証明終）

【4】(1) $y=x^3-4x$ より, $y'=3x^2-4$ であるから，接点の x 座標を t とおくと, 接線の方程式は,

$$y=(3t^2-4)(x-t)+t^3-4t$$
$$\therefore y=(3t^2-4)x-2t^3 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

これが点 $(-2,\ 4)$ を通ることから,

$$4=-2(3t^2-4)-2t^3$$
$$\therefore t^3+3t^2-2=0$$

これを解いて,

$$(t+1)(t^2+2t-2)=0$$
$$\therefore t=-1, \quad -1\pm\sqrt{3}$$

これらを①に代入して, 求める接線の方程式は,

$y=-x+2, \quad y=(8\pm 6\sqrt{3})x+20\pm 12\sqrt{3}$ (複号同順)　(答)

(2) C 上の点 $(3,\ 15)$ における接線の方程式を $y=mx+n$ とおくと, 2 式より y を消去して得られる 3 次方程式

$$x^3-4x=mx+n \quad \Longrightarrow \quad x^3-(m+4)x-n=0$$

は接点の x 座標 $x=3$ を重解にもつ．よって, 残りの解を α とおくと, 解と係数の関係より,

$$3+3+\alpha=0 \qquad \therefore \quad \alpha=-6$$

これは接線が再び C と交わる点の x 座標である．

従って求める座標は，$(-6,\ -192)$ である．　(答)

【5】曲線 $y=x^4-6x^2$ は x 軸に関して対称であるから，点 (a, b) が $x \geqq 0$ をみたす領域にある場合を考える．

このとき，$y=x^4-6x^2$ の $x=t$ における接線の方程式は，$y'=4x^3-12x$ より

$$\begin{aligned} y&=(4t^3-12t)(x-t)+t^4-6t^2 \\ &=(4t^3-12t)x-3t^4+6t^2 \end{aligned}$$

となる．これが点 $(a,\ b)$ を通るので

$$b=(4t^3-12t)a-3t^4+6t^2 \quad \therefore\ 3t^4-4at^3-6t^2+12at+b=0 \ \cdots\cdots\cdots ①$$

ところで，曲線 $y=x^4-6x^2$ のグラフにおいて，相異なる 2 点で接する直線

$$y=-9$$

が 1 本存在する．従って，相異なる 4 つの接線が引けるための条件は

- ①が相異なる 4 つの解をもち，かつ
- 点 (a, b) が直線 $y=-9$ 上にない，つまり $b\neq -9$

が成り立つことである．

そこで，①の左辺を $f(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t)&=12t^3-12at^2-12t+12a=12(t^3-at^2-t+a) \\ &=12(t-a)(t-1)(t+1) \end{aligned}$$

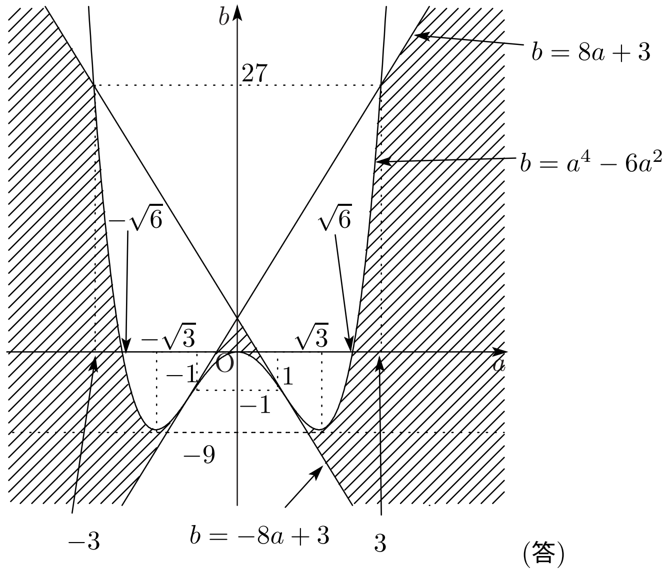
であるから，一つ目の条件から，$a \fallingdotseq 1$ であり

(i) $a>1$ のとき

$$f(-1)<0,\ f(1)>0,\ f(a)<0$$

(ii) $0 \leqq a < 1$ のとき

$f(-1) < 0,\ f(a) > 0,\ f(1) < 0$



(答)

ここで

$f(a) = -a^4 + 6a^2 + b,\ f(1) = 8a + b - 3,\ f(-1) = -8a + b - 3$

であるから，$a < 0$ の場合も考慮すると点 $(a,\ b)$ の存在する領域は

(i) $-8a + b - 3 < 0,\ 8a + b - 3 > 0,\ -a^4 + 6a^2 + b < 0,\ b \neq -9,\ a > 1$

(ii) $-8a + b - 3 < 0,\ 8a + b - 3 < 0,\ -a^4 + 6a^2 + b > 0,\ b \neq -9,\ 0 \leqq a < 1$

(iii) (i)，(ii) と b 軸に関して対称な領域

である．

これを図示すると上図の斜線部分のようになる．ただし，境界は含まず，また直線 $b = -9$ も含まない．

直線 $b = 8a + 3,\ b = -8a + 3$ は，4 次曲線 $b = a^4 - 6a^2$ の，それぞれ点 $(1,\ -1)$，$(-1,\ -1)$ における接線になっていることに注意せよ．

また，与えられた 4 次曲線 $y = x^4 - 6x^2$ を，2 回微分すると

$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x + 1)(x - 1)$

となり，これら 2 点はこの曲線の変曲点であることが解る．

一般に，変曲点で接する接線は，その曲線と交差的に接する．