「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。
※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

1章　復元力と単振動（1）

要点

今回のテーマ

運動方程式から得られる加速度にもとづいて，運動が単振動であることを判定すること．さらに，時刻 t における位置を具体的に決定すること．

■単振動の定義

今回は，物体の運動として最も重要な「単振動 (調和振動)」を取り扱います．**単振動というのは「つりあいからのずれ X」が時刻 t の $\sin$ 関数または $\cos$ 関数として表せる振動運動のこと**で，単振動をひき起こす力が「復元力」です．

A，ω，α を正の定数とすると，単振動の一般式は次のようになります．

$$\text{つりあいからのずれ} \quad \cdots \quad X(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

ここで A は「つりあいからのずれ」の最大値すなわち「振幅 (amplitude)」を表し，ω は「角振動数 (angular frequency)」と呼ばれています．また，$\sin$ の中にある「$\omega t + \alpha$」をまとめて「位相 (phase)」と呼びます．これらの用語はとても頻繁に用いるので，必ず覚えてください．

■単振動の周期

1 回の振動に要する時間すなわち「周期 (period)」もまた，振動を特徴付ける量の 1 つです．**1 回の振動が起こる間に「位相」は 2π だけ変化する**ので，「角振動数 ω」が分かっていると「周期 T」を求めることができます．

$$\{\omega(t+T)+\alpha\} - (\omega t + \alpha) = 2\pi \qquad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

この後でみるとおり，角振動数 ω は運動方程式にもとづいて求めることができ，上式を利用すると周期 T が得られるわけです．

■単振動の方程式と一般解

確認問題 1 にまとめてありますが，x 軸上で起こる単振動が満たす方程式とその一般解は次のとおりです．

$$\text{時刻 } t \text{ における位置} \quad \cdots \quad x(t) = (\text{中心 } x_0) + A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\text{満たしている方程式} \quad \cdots \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2\{x(t) - x_0\}$$

これと関連して，1 つだけ強調しておくことにしましょう．

単振動の中心位置は，物体に作用する力がつりあう位置と一致する．

振動の中心を座標原点に選んである場合には，この特徴を意識しないですむのですが，振動の中心が座標原点と一致していない場合には，この特徴がとても重要となります．

■問題解決の基本手順

それでは，実戦的な手順を整理することにしましょう．慣れてくると③は省略することも可能です．

① 振動の途中における x を用いて，ばねの伸び (または縮み) を表す．
② 振動の途中における運動方程式を立式する．
③ 運動方程式で加速度が 0 となる「振動の中心位置 x_0」を求める．
④ $\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0)$ の形を目指して，運動方程式を変形する．
⑤ 角振動数 ω を読みとって，周期 T を求める．

時刻 t での位置 $x(t)$ を決定するには，さらに次の手順をふむことが必要です．

⑥ $x(t) = x_0 + A\sin(\omega t + \alpha)$ と仮定して，対応する $\dot{x}(t)$ を求める．
⑦ 初期条件を満たすように A，α を決定する．

あるいは，仮定する一般解の形を少し変えておくことも可能です．

⑥′ $x(t) = x_0 + B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$ と仮定して，対応する $\dot{x}(t)$ を求める．
⑦′ 初期条件を満たすように B，C を決定する．

なお，簡単な初期条件の場合は，$x - t$ グラフや $\dot{x} - t$ グラフを描くことを通じて，時刻 t での位置 $x(t)$ を求めてしまうこともできます．

■確認問題 1

つりあいの位置 $x=x_0$ からのずれ $X=x-x_0$ が，図 1 及び図 2 のように変動する振動運動を考える．

(1) sin または cos を用いて，図 1 及び図 2 の振動を表す式 $X(t)$ を答えよ．

一般に，つりあいの位置 $x=x_0$ からのずれ $X=x-x_0$ が次式で表せる運動を単振動と呼ぶ．(1) で得た $X(t)$ は，この一般式に含まれていることが分かる．

$$X(t)=A\sin(\omega t+\alpha) \qquad [-\pi<\alpha\leqq\pi]$$

以下の設問では，必要に応じて次の微分公式を用いよ．

$$\text{微分公式①} \quad \cdots \quad \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\cos\theta$$

$$\text{微分公式②} \quad \cdots \quad \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta$$

(2) 時刻 t の係数 ω と周期 T の関係を答えよ．
(3) 時刻 t における単振動の速度 $\dot{x}(t)$ を求めよ．
(4) 時刻 t における単振動の加速度 $\ddot{x}(t)$ を求めよ．
(5) つりあいの位置からのずれ $x(t)-x_0$ と加速度 $\ddot{x}(t)$ の関係式を答えよ．

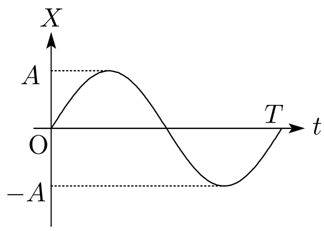


図 1

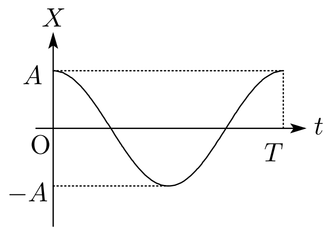


図 2

■解答

(1)
$$\begin{cases}\text{図 1 の振動} \quad \cdots \quad X=A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)\\[2ex] \text{図 2 の振動} \quad \cdots \quad X=A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)=A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

(2) 時間 T の間に，位相 $\omega t+\alpha$ が 2π だけ変化するので，

$$\{\omega(t+T)+\alpha\}-(\omega t+\alpha)=2\pi \qquad \therefore \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

(3) 単振動の一般式より，

$$x(t)-x_0=A\sin(\omega t+\alpha) \qquad \therefore \quad x(t)=x_0+A\sin(\omega t+\alpha)$$

$\theta = \omega t + \alpha$ とおくと，

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\mathrm{d}(x_0 + A\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &= A\cos\theta \times \omega \\ &= A\omega\cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

(4) (3) と同様にして，

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{\mathrm{d}(A\omega\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &= -A\omega\sin\theta \times \omega \\ &= -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

(5) $\ddot{x}(t) = -\omega^2\{x(t) - x_0\}$

■確認問題２

水平でなめらかな床の上にばね定数 k のばねの一端を固定し，他端に質量 m の小物体をとりつける．小物体に初期変位または初速度を与えると，小物体は往復運動をはじめる．この運動について，以下の問いに答えよ．

(1) 図のように，ばねが自然長であるときの小物体の位置を原点として，右向きを正とする x 軸をとる．小物体の位置が x($x > 0$ のときは伸びが x，$x < 0$ のときは縮みが $|x|$) であるときの，小物体の運動方程式を示せ．

(2) (1) の運動方程式を満たす x は，時刻 t の関数として次のように表すことができる．

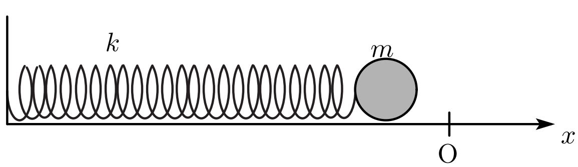
$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (A, B\ \text{は定数})$$

この式から加速度を求めることにより，ω を k と m で表せ．

(3) (2) の A と B は小物体がどのように動き始めたかによってきまる．次の 2 つの場合 (a)，(b) について，小物体がどのように動き始めたかを説明せよ．

(a) $A = 0$，$B > 0$

(b) $A > 0$，$B = 0$



■解答

(1) $\begin{cases} x \geqq 0 \text{ のとき} & \cdots \quad m\ddot{x} = -kx \\ x < 0 \text{ のとき} & \cdots \quad m\ddot{x} = k \cdot (-x) \end{cases}$

(2) 加速度の x 成分を求めると,

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t) - \omega^2 B \cos(\omega t) \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

これと (1) より,

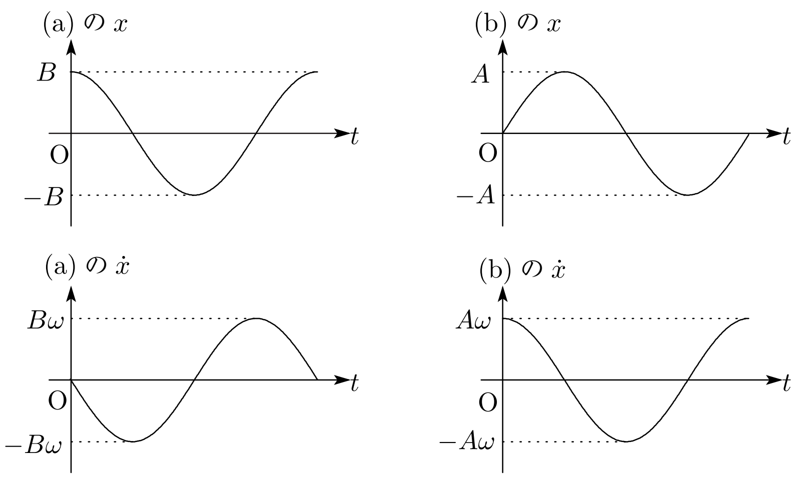
$$m \cdot (-\omega^2 x) = -kx \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(3) (a) 振動の右端となる $x = B$ から,初速度 0 で動き始めた.

(b) 振動の中心となる $x = 0$ から,初速度 $A\omega$ で動き始めた.

■解説

(3) では $x - t$ グラフおよび $\dot{x} - t$ グラフを描いてみるとよい.(a),(b) それぞれについてのグラフは次のようになる.



問題

■演習

★

【1】

質量 m の物体 P があらい水平面をもつ台 Q の上にのっている．次の問いに答えよ．ただし，重力加速度を g とする．

(1) 図 1 のように，台は水平方向に単振動し，物体はすべることなく台とともに動いている場合を考える．単振動の中心を原点 O とし，物体の変位を表す x 軸を図 1 のように定める．物体の変位 x と時間 t の関係は，図 2 のように与えられる．

(a) 物体の変位 x と時間 t の関係式を，図 2 の記号を使って表せ.

(b) 時刻 t における物体の速度と加速度を図 2 の記号を使って表せ.

(c) 時刻 t において物体が台から受ける摩擦力を求めよ.

(d) 物体がすべらないためには，単振動の周期はどのような条件を満たさなければならないか．不等式で表せ．ただし，物体と台との間の静止摩擦係数を μ とする．

(2) 次に，図 3 のように，台は上下方向に単振動し，物体は台から離れることなく台とともに動いている場合を考える．単振動の中心を原点 O とし，物体の変位を表す x 軸を図 3 のように定める．物体の変位 x と時間 t の関係は，図 2 と同じである．

(a) 時刻 t において物体が台から受ける抗力を求めよ．

(b) 物体が台から離れないためには，単振動の周期はどのような条件を満たさなければならないか．不等式で表せ．

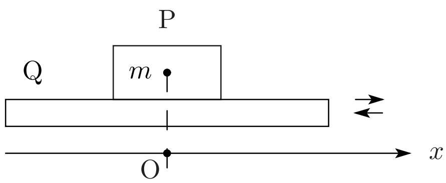


図 1

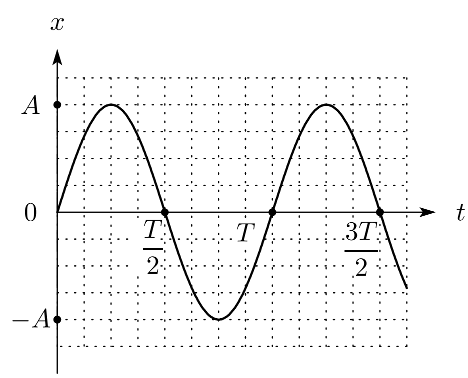


図 2

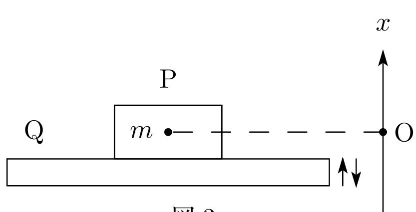


図 3

(富山)

★

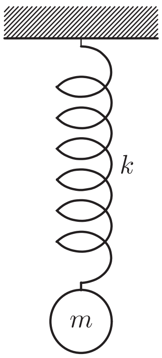
【2】

図のように，質量 m の小球を，自然長 l，ばね定数 k のばねでつるす．時刻 $t=0$ に小球に以下のような初期条件を与えた場合について，時刻 t における小球の位置を表す関数を求めよ．ただし重力加速度の大きさを g とする．なお，座標軸は各自で設定して，正の向きと原点を明らかにせよ．

(1) 小球をつるしてつり合いの位置に静止させてから，鉛直上向きに速さ v_0 を与える．

(2) (1) の静止位置から，小球を距離 a だけ鉛直下向きに引っ張り，静かに放す．a は l に比べ十分小さいとする．

(3) 小球をばねの自然長の位置まで持ち上げ，静かに放す．



★★
【3】

質量の無視できるばねの両端に同じ質量 m の物体 A と物体 B をとりつけた．重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ．

(1) 図のように滑らかな円筒状のガードでばねが鉛直に保たれるようにして，B を床の上に置いたところ，ばねの長さが自然長より a だけ縮んだ位置 O で A は静止した．このばねのばね定数はどれだけか．

(2) (1) の状態のとき，床が B から受ける力の大きさはどれだけか．

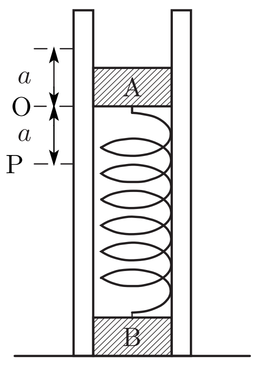
(3) A を O 点よりさらに a だけ下の P 点まで押し下げて，静かに放した．

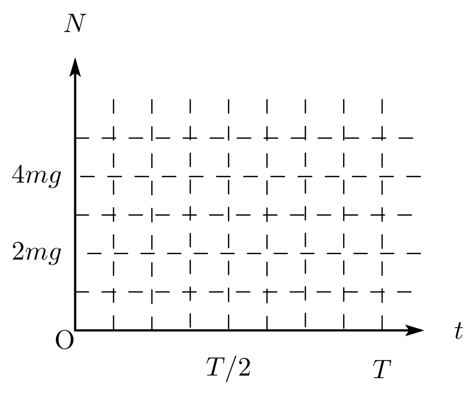
(a) O 点を原点とし，鉛直方向下向きを正とする y 軸をとると，A の位置 y は放してからの時間 t とともにどのように変わるか．y を t の関数として表す式を書け．

(b) A が O 点を通過するときの速さはどれだけか．

(c) A が P 点から運動を始めた後，床が B から受ける力の大きさ N は時間 t とともにどのように変わるか．A が再び P 点に戻る時間を T として，$t = 0$ から T までの間に，N がどのように変化するかを示すグラフの概略を描け．

(4) はじめに A を O 点より押し下げる距離を b にして運動させたとき，A の運動中に B が床から離れて上方に動きださないためには b の値はどれだけ以下でなければならないか．





1章　復元力と単振動（1）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) (a) $x = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$

(b) (a) の x を t で微分していくことにより，

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2\pi A}{T}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) \\ \ddot{x} = -\dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) \end{cases}$$

(c) 右向きを正として摩擦力を F とおくと，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = F \qquad \therefore \quad F = -\frac{4\pi^2 Am}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

(d) 鉛直方向の力のつりあいより，垂直抗力の大きさは mg と分かる．また，(c) より $F_{\max} = \dfrac{4\pi^2 Am}{T^2}$ なので，物体 P がすべらないための条件は，

$$\frac{4\pi^2 Am}{T^2} \leqq \mu mg \qquad \therefore \quad T \geqq 2\pi\sqrt{\frac{A}{\mu g}}$$

(2) (a) 垂直抗力の大きさを R とすると，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = R - mg \qquad \therefore \quad R = mg - \frac{4\pi^2 Am}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

(b) (a) より $R_{\min} = mg - \dfrac{4\pi^2 Am}{T^2}$ なので，物体が台から離れないための条件は，

$$mg - \frac{4\pi^2 Am}{T^2} \geqq 0 \qquad \therefore \quad T \geqq 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$$

【2】

《解答》

座標軸設定①

ばねの自然長の位置を原点として，鉛直下向きに x 軸を設定する．この場合，物体の位置とばねの伸びは一致する．運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx + mg \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

これより，小球は中心が $x = \dfrac{mg}{k}$ で角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることが分かる．振幅を $A(>0)$，初期位相を α とすると，一般解は，

$$x = \frac{mg}{k} + A\sin(\omega t + \alpha) \qquad \therefore \quad \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

(1) 初期条件 $x(0) = \dfrac{mg}{k}$，$\dot{x}(0) = -v_0$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{k} = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ -v_0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{v_0}{\omega} \\ \alpha = \pi \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \pi) = \frac{mg}{k} - v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2) 初期条件 $x(0) = \dfrac{mg}{k} + a$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{k} + a = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = a \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{mg}{k} + a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(3) 初期条件 $x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{mg}{k} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

座標軸設定②

つり合い位置を原点として，鉛直下向きに x 軸を設定する．この場合，ばねの伸びは，$\dfrac{mg}{k}+x$ と表せる．運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -k\left(x+\frac{mg}{k}\right)+mg \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

これより，小球は中心が $x=0$ で角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることが分かる．振幅を $A(>0)$，初期位相を α とすると，一般解は，

$$x = A\sin(\omega t+\alpha) \qquad \therefore \quad \dot{x} = A\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

(1) 初期条件 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=-v_0$ より，

$$\begin{cases} 0 = A\sin\alpha \\ -v_0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{v_0}{\omega} \\ \alpha = \pi \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\pi) = -v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2) 初期条件 $x(0)=a$，$\dot{x}(0)=0$ より，

$$\begin{cases} a = A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = a \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(3) 初期条件 $x(0)=-\dfrac{mg}{k}$，$\dot{x}(0)=0$ より，

$$\begin{cases} -\dfrac{mg}{k} = A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{mg}{k} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

【3】

《解答》

(1) ばね定数を k とすると，A の運動方程式は，

$$m\cdot 0=-ka+mg \qquad \therefore\quad k=\frac{mg}{a}$$

(2) 求める力の大きさを N_0 とすると，B が床から受ける力の大きさも N_0 である．(1) の状態における B の運動方程式は，

$$m\cdot 0=+ka-N_0+mg \qquad \therefore\quad N_0=2mg$$

(3) B が床から離れないと仮定すると，A，B の運動方程式は，

$$\begin{cases}\mathrm{A}: m\ddot{y}=-k(y+a)+mg=-ky\\ \mathrm{B}: m\cdot 0=+k(y+a)-N+mg\end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases}\ddot{y}=-\dfrac{k}{m}y\\ N=k(y+a)+mg\end{cases}$$

(a) A の運動は，中心が $y=0$ で，角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動と分かる．初期条件 $y(0)=a$，$\dot{y}(0)=0$ を満たす解は，

$$y(t)=a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

(b) $y(t_0)=0$ となるとき，

$$\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t_0=0 \qquad \therefore\quad \sqrt{\frac{g}{a}}t_0=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

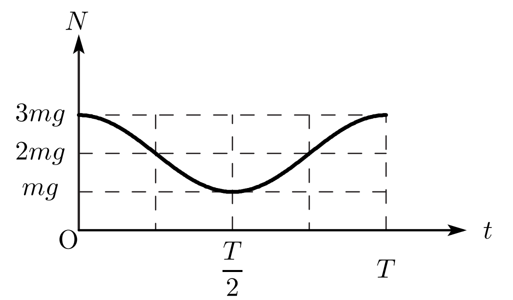
このときの速さは，

$$|\,\dot{y}(t_0)\,|=\left|-\sqrt{\frac{g}{a}}a\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t_0\right|=\sqrt{ga}$$

(c) (a) をふまえると，

$$\begin{aligned}N&=k(a\cos\omega t+a)+mg\\ &=mg\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t+2mg\end{aligned}$$

これをグラフに描くと右図のようになる．



(4) b だけ縮めて静かに離した場合の解は，$y(t) = b\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$ なので，

$$N = k(y+a) + mg = mg\left(2 + \frac{b}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)$$
$$= \frac{bmg}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + 2mg$$

B が床から離れないための条件 $N_{\mathrm{min}} \geqq 0$ より，

$$\frac{bmg}{a}\cdot(-1) + 2mg \geqq 0 \qquad \therefore \quad b \leqq 2a$$