「Z会の映像」 教材見本

こちらの見本は、実際のテキストから1回分を抜き出したものです。

ご受講いただいた際には、郵送にて、冊子をお届けします。
※実際の教材は、問題冊子と解説冊子に分かれています。

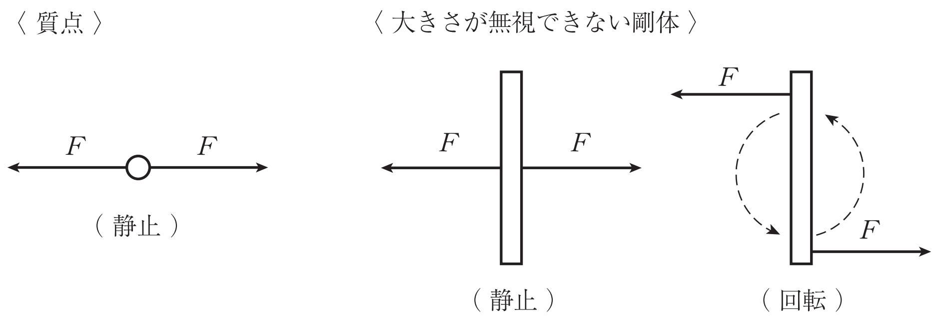
7章　力のモーメント

要点

今回のテーマ

【物体のつり合い】

今まで扱ってきた物体は質点（質量は無視できないが大きさは無視できる物体）でしたが，大きさが無視できない棒のような物体は，力がつり合っているだけでは静止しません．以下では，大きさが無視できない物体は，剛体（曲がらない物体）であるとします．

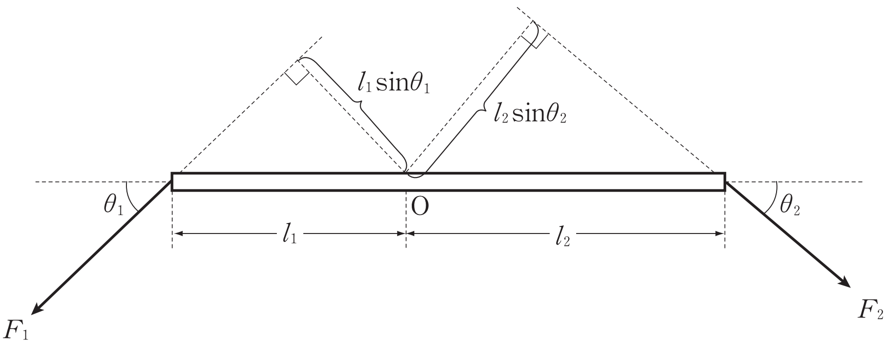


大きさが無視できない剛体の場合は，働く力の作用線が一致しないと回転してしまいます．そこで，大きさが無視できない剛体が静止するには，回転しない条件である，力のモーメントのつり合いが必要になります．

大きさが無視できない剛体が静止する条件	力がつり合う	$\cdots$ 並進運動しない
	力のモーメントがつり合う	$\cdots$ 回転運動しない

【力のモーメント】

回転の目安となる「力のモーメント」は，（力のモーメントの大きさ）＝（力の大きさ）×（回転中心から力の作用線までの距離）で計算されます． 力が回転中心のまわりに, 時計回りか反時計回りかによって，正負の符号をつけます．簡単な例を挙げてみましょう．



図で，棒の両端に働く O 点まわりのモーメントを，反時計回りを正とすると

大きさ F_1 の力のモーメント $\cdots \; +F_1 \times l_1 \sin\theta_1$

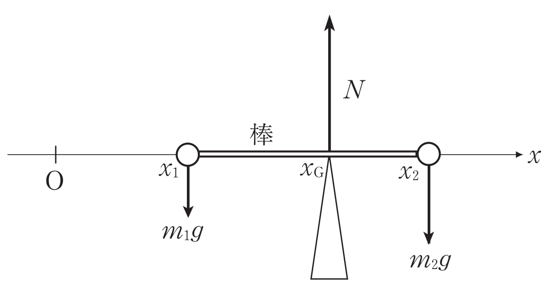
大きさ F_2 の力のモーメント $\cdots \; -F_2 \times l_2 \sin\theta_2$

これらのモーメントの和が 0 となるとき，この棒は回転しません.

【重心】

力のモーメントのつり合いを利用すると，系の重心の位置を求めることができます.

$x = x_1$ の位置にある質量 m_1 の物体と，$x = x_2$ の位置にある質量 m_2 の物体の系の重心の位置を $x = x_{\mathrm{G}}$ とすると



棒に働く力のつり合いより　　　$N = (m_1 + m_2)g$

O 点まわりのモーメントのつり合いより　$Nx_{\mathrm{G}} + (-m_1 g x_1) + (-m_2 g x_2) = 0$

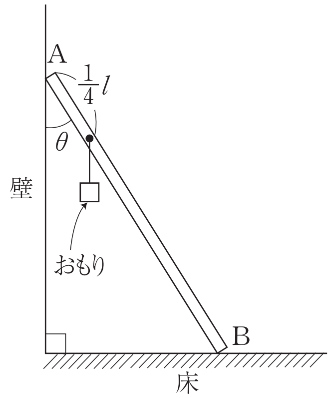
$$\therefore \quad x_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

と表すことができます.

■確認問題

図のように，なめらかで鉛直な壁と摩擦のある水平な床に，長さ l で，重さ W の一様な棒 AB を立てかけた．この棒には A からの距離 $\dfrac{1}{4}l$ の点に重さ $\dfrac{1}{2}W$ のおもりがつるしてある．

棒が床をすべりだす直前になったとき，棒と壁とのなす角は θ であった．



(1) 一般に，剛体のつり合いの条件のうち剛体が平行移動しないための条件は何かを言葉で記せ．

(2) 一般に，剛体のつり合いの条件のうち剛体が回転しないための条件は何かを言葉で記せ．

(3) 棒に働く重力とおもりに働く重力の合力の作用線は，棒 AB 上で A からどれだけの距離のところを通るか．

(4) 棒の一端 B において，棒が床から受ける垂直抗力の大きさはいくらか．

(5) 床と棒との間の摩擦力の大きさはいくらか．

(6) 床と棒との間の静止摩擦係数はいくらか．

(千葉工業　改)

■**解答**

(1) 剛体に働く力がつり合うこと

(2) 剛体に働く力のモーメントがつり合うこと

(3) A から，棒に働く重力とおもりに働く重力の合力の作用線までの距離を x とおき，反時計回りを正とすると

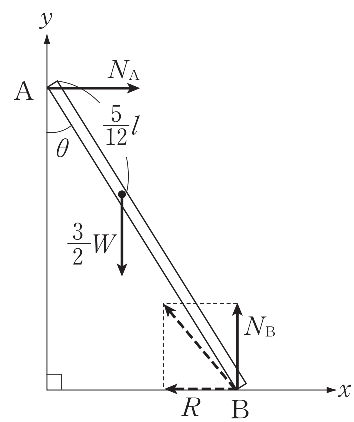
A まわりの棒に働く重力のモーメント　…　$-W \times \dfrac{l}{2}\sin\theta$

A まわりのおもりに働く重力のモーメント　…　$-\dfrac{W}{2} \times \dfrac{l}{4}\sin\theta$

A まわりの合力のモーメント　…　$-\left(W + \dfrac{W}{2}\right) \times x\sin\theta$

よって，$-\left(W + \dfrac{W}{2}\right) \times x\sin\theta = -W \times \dfrac{l}{2}\sin\theta - \dfrac{W}{2} \times \dfrac{l}{4}\sin\theta \qquad \therefore \quad x = \underline{\dfrac{5}{12}l}$

(4) A に働く垂直抗力の大きさを N_{A}，B に働く垂直抗力の大きさを N_{B}，摩擦力の大きさを R とすると，力のつり合いより



$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{3}{2}W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{\mathrm{A}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ N_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} N_{\mathrm{A}} + (-R) = 0 \\ -\dfrac{3}{2}W + N_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases}$$

上式より　$N_{\mathrm{B}} = \underline{\dfrac{3}{2}W}$

(5) A まわりのモーメントのつり合いより，反時計回りを正とすると

$$N_{\mathrm{B}} \times l\sin\theta + (-R \times l\cos\theta) + \left(-\frac{3}{2}W \times \frac{5}{12}l\sin\theta\right) = 0$$

(4) の結果より

$$\frac{3}{2}Wl\sin\theta - Rl\cos\theta - \frac{5}{8}Wl\sin\theta = 0 \qquad \therefore \quad R = \underline{\frac{7}{8}W\tan\theta}$$

(6) 棒が床をすべりだす直前の棒と壁とのなす角が θ なので，静止摩擦係数を μ とすると

$$R = \mu N_{\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad \mu = \frac{R}{N_{\mathrm{B}}} = \frac{7}{8}W\tan\theta \times \frac{2}{3W} = \underline{\frac{7}{12}\tan\theta}$$

問題

■演習

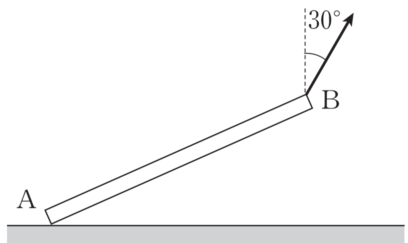
★

【1】

まっすぐで密度が一定でない細い棒 AB が水平な床の上に置いてある．棒の長さは l，質量は M である．棒の端 B には軽いひもが結ばれており，そのひもを引っ張って端 B を持ち上げることができる．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．

(1) ひもを $\dfrac{1}{3}Mg$ の力で鉛直上方に引っ張ったところ，棒の端 B がわずかに持ち上がってつり合った．このとき棒の端 A が床を押している力の大きさを求めよ．

(2) この棒の重心の位置の端 A からの距離を求めよ．



(3) 次に，図のように端 B を持ち上げたところ，ひもが鉛直方向と 30° をなす角度でつり合い，ひもの張力の大きさは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}Mg$ であった．このとき棒の端 A が床から受ける垂直抗力の大きさを求めよ．

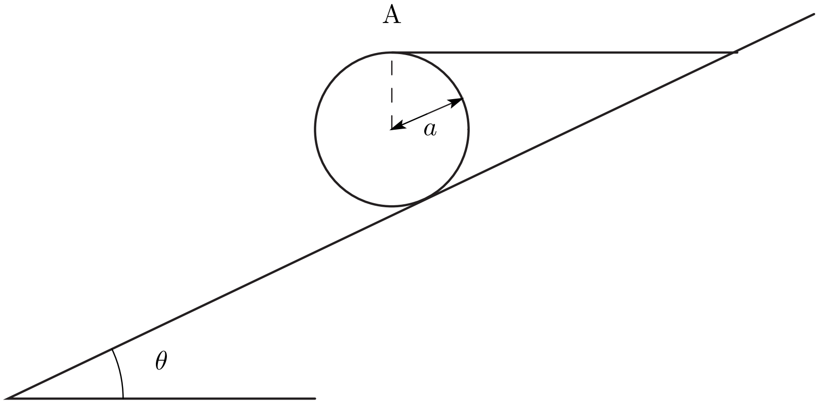
(4) (3) よりわずかにひもの張力を増したら，棒は床の上を滑り始めた．この棒と床の間の静止摩擦係数 μ を求めよ．

（名城　改）

★★★

【2】

質量 M，半径 a の一様な密度をもった球が，水平面と角度 θ だけ傾いたあらい斜面上に，図のようにその上端 A を糸で水平に引っ張られて静止している．糸の質量を無視し，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．



(1) この糸の張力の大きさを求めよ．

(2) 斜面が球におよぼす垂直抗力の大きさを求めよ．

(3) 球が静止しているためには，斜面と球との間の静止摩擦係数は θ によって決まるある値より大きくなければならない．その値はいくらか．

7章　力のモーメント

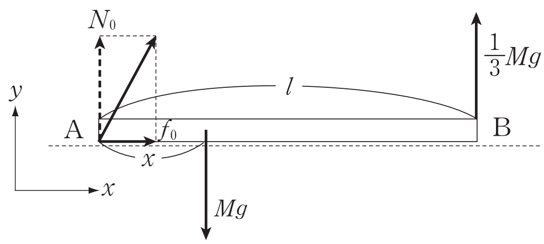
問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 端 A が床から受ける垂直抗力の大きさを N_0，摩擦力の大きさを f_0 とおくと，棒に働く力のつり合いより



$$\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0 \\ N_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ -Mg + N_0 + \dfrac{1}{3}Mg = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad N_0 = \frac{2}{3}Mg$$

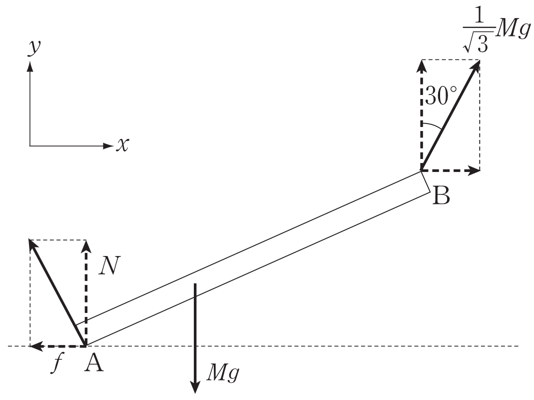
棒の端 A が床を押している力の大きさを F とおくと，この力は端 A が床から受ける垂直抗力の反作用の力であるから

$$F = N_0 = \underline{\frac{2}{3}Mg}$$

(2) 端 A から棒の重心までの距離を x とおくと，反時計回りを正として，A まわりのモーメントのつり合いより

$$\frac{1}{3}Mg \times l + (-Mg \times x) = 0 \qquad \therefore \quad x = \underline{\frac{1}{3}l}$$

(3) 端 A が床から受ける垂直抗力の大きさを N，摩擦力の大きさを f とおくと，棒に働く力のつり合いより



$$\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}Mg\sin 30^\circ \\ \frac{1}{\sqrt{3}}Mg\cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -f + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}Mg = 0 & \therefore \quad f = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}Mg \\ -Mg + N + \dfrac{1}{2}Mg = 0 & \therefore \quad N = \underline{\dfrac{1}{2}Mg} \end{cases}$$

(4) (3) における f が最大静止摩擦力となるから

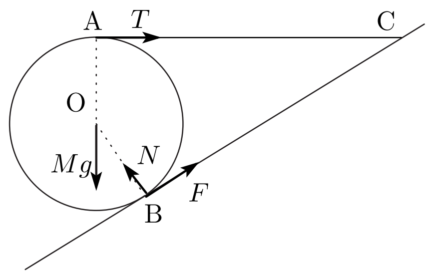
$$f = \mu N$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}Mg = \frac{1}{2}\mu Mg \qquad \therefore \quad \mu = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

【2】

《解答》

(1),(2) 右の図のように，球と斜面との接点を B，糸の右端を C，球の中心を O とする．また，糸の張力の大きさを T，球が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを F とする．



O まわりの力のモーメントの総和が 0 であること，すなわち

$$0 = aT - aF$$

および，力のつり合いの各成分

$$\text{斜面に垂直：} 0 = N - Mg\cos\theta - T\sin\theta$$
$$\text{斜面に平行：} 0 = F - Mg\sin\theta + T\cos\theta$$

より，

$$F = T = \underline{\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}Mg}\left(= \tan\frac{\theta}{2}\cdot Mg\right)$$
$$N = \underline{Mg}$$

■別解　糸の長さを l とすると，C まわりの力のモーメントのつり合いは

$$0 = lN - lMg \qquad \therefore \quad N = \underline{Mg}$$

(3) 静止摩擦係数を μ とする．球が滑り出さない条件

$$\frac{F}{N} \leqq \mu$$

に (1) と (2) の結果を代入すると，

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \leqq \mu$$

これより，μ の最小値は

$$\underline{\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}\left(= \tan\frac{\theta}{2}\right)$$